Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 3. posma 2. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Pierādīt, ka dažādiem reāliem skaitļiem *a*, *b* un *c* sakarība $a+b+c=0$ ir spēkā tad un tikai tad, ja $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Atrisinājums

Otro sakarību pārrakstām formā $a^3+b^3+c^3-3abc=0$. Ievērojam, ka

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2-ab+b^2-ac+c^2-bc)=(a+b+c)\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2}.$$

Lai pierādītu prasīto, jāpierāda nepieciešamais un pietiekamais nosacījums.

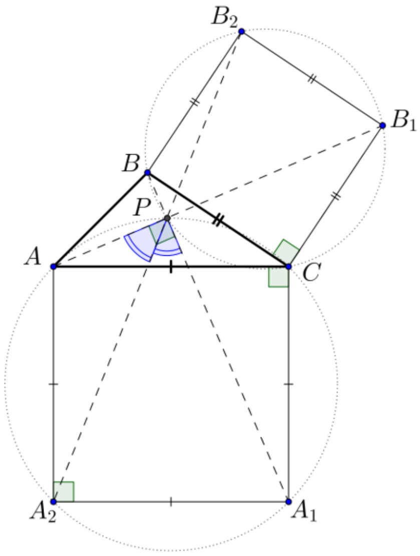
$\Rightarrow$ Ja $a+b+c=0$, tad $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

$\Leftarrow$ Ja $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, tad tā kā *a*, *b* un *c* visi ir atšķirīgi, otrais reizinātājs vienmēr ir pozitīvs, līdz ar to $a+b+c=0$.

2. Uz trijstūra *ABC* malām *AC* un *BC* uz āru ir konstruēti kvadrāti ACA_1A_2 un BCB_1B_2. Pierādīt, ka taisnes A_1B, A_2B_2 un AB_1 krustojas vienā punktā!

Atrisinājums

Tā kā $AC=A_1C$, $\angle ACB_1=\angle ACB+\angle BCB_1=\angle ACB+\angle ACA_1=\angle A_1CB$, $BC=B_1C$, tad $\Delta ACB_1=\Delta A_1CB$ pēc pazīmes $m\ell m$ (skat. A1. att.). Ievērojam, ka, ΔACB_1 pagriežot par $90°$, tas sakrīt ar ΔA_1CB. Tāpēc $AB_1\perp BA_1$. Apzīmējam AB_1 un BA_1 krustpunktu ar *P*. Tā kā $\angle AA_2A_1=\angle APA_1=90°$, tad ap PA_1A_2A var apvilkt riņķa līniju. Tad $\angle A_1PA_2=\angle A_2PA=45°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādām hordām. Līdzīgi iegūst, ka $\angle BPB_2=\angle B_2PB_1=45°$. Tas nozīmē, ka punkti A_2, *P* un B_2 atrodas uz vienas taisnes jeb taisnes A_1B, A_2B_2 un AB_1 krustojas vienā punktā, kas arī bija jāpierāda.



A1. att.

3. Naturālus skaitļus *x* un *y* sauc par *draudzīgiem*, ja $xy+1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Piemēram, skaitļi 2 un 40 ir draudzīgi. Pierādīt: ja skaitļi *a* un *b* ir *draudzīgi*, tad eksistē tāds naturāls skaitlis *c*, ka vienlaikus *a* un *c* ir *draudzīgi*, un arī *b* un *c* ir *draudzīgi*.

Atrisinājums

Pēc dotā $ab+1=k^2$. Ja $c=2k+a+b$, tad

- $ac+1=2ka+a^2+ab+1=2ka+a^2+k^2=(a+k)^2$;
- $bc+1=2kb+b^2+ab+1=2kb+b^2+k^2=(b+k)^2$.

Līdz ar to esam parādījuši, ka vērtība $c=2k+a+b$ atbilst uzdevuma nosacījumiem.

4. Atrast visas funkcijas, kas definētas veseliem skaitļiem un pieņem veselas vērtības, tādas, ka $f(1) = f(-1)$ un visiem veseliem *x* un *y* izpildās

$$f(x) + f(y) = f(x+2xy) + f(y-2xy).$$

Atrisinājums

Der visas funkcijas formā $f(m\cdot 2^i) = k_i$, kur k_i katram $i \geq 0$ ir kāds patvaļīgs vesels skaitlis un *m* ir nepāra.

Ievietosim $x = 1$ un $y = n$, tad

$$f(1) + f(n) = f(1+2n) + f(-n). \qquad (*)$$

Ievietojot $x = n$ un $y = -1$, iegūst

$$f(n) + f(-1) = f(-n) + f(2n-1).$$

Salīdzinot šos vienādojumus, iegūst, ka $f(2n-1) = f(2n+1)$, kas nozīmē, ka

$$... = f(-5) = f(-3) = f(-1) = f(1) = f(3) = f(5) = ...$$

Tātad funkcijas vērtība ir viena un tā pati visiem nepāra skaitļiem, citiem vārdiem sakot, $f(2n+1) = f(1)$ visiem veseliem *n*.

Ievietojot vienādojumā (*) sakarību $f(2n+1) = f(1)$, iegūst, ka $f(n) = f(-n)$ visiem veseliem *n*.

Dotajā vienādībā ievietojot $x = 2k+1$ un $y = n$ un ievērojot, ka $x + 2xy$ šajā gadījumā ir nepāra skaitlis, tātad $f(x)$ un $f(x+2xy)$ saīsinās, iegūst:

$$f(n) = f(n - 2\cdot(2k+1)\cdot n) = f(-(4k+1)\cdot n) = f((4k+1)\cdot n).$$

Dotajā vienādībā ievietojot $x = n$ un $y = 2k+1$ un ievērojot, ka $y - 2xy$ šajā gadījumā ir nepāra skaitlis, tātad $f(y)$ un $f(y-2xy)$ saīsinās, iegūst:

$$f(n) = f(n + 2\cdot(2k+1)\cdot n) = f((4k+3)\cdot n).$$

Tātad $f(n) = f(mn)$ jebkuram nepāra skaitlim *m*.

Tas nozīmē, ka funkcijas vērtības tiek viennozīmīgi noteiktas ar tās vērtībām punktos 2^i, jo jebkuru naturālu skaitli *n* var izteikt formā $n = m\cdot 2^i$, kur *m* – nepāra skaitlis, tātad $f(n) = f(m\cdot 2^i) = f(2^i)$. Funkcijas vērtības punktos 2^i, var izvēlēties patvaļīgi, t. i., $f(2^i) = k_i$, kur k_i ir patvaļīgs vesels skaitlis visiem $i \geq 0$. Funkcijas vērtība tad tiek definēta ar izteiksmi $f(m\cdot 2^i) = k_i$ visiem nepāra *m* un $i \geq 0$.

Parādīsim, ka visas šādas funkcijas der. Pieņemsim, ka $x = u\cdot 2^i$ un $y = v\cdot 2^j$, kur *u* un *v* ir nepāra. Tad

$$f(x) = k_i,\ f(y) = k_j,$$

$$f(x+2xy) = f(u\cdot 2^i + uv\cdot 2^{i+j+1}) = f(2^i(u + uv\cdot 2^{j+1})) = k_i,$$

$$f(y-2xy) = f(v\cdot 2^j - uv\cdot 2^{i+j+1}) = f(2^j(v - uv\cdot 2^{i+1})) = k_j$$

un dotā vienādība $f(x) + f(y) = f(x+2xy) + f(y-2xy)$ izpildās.

5. Parlamentā, kurā ir $n \geq 2$ deputāti, darbojas $k \geq 0$ komisijas. Katrā komisijā ir vismaz divi deputāti, nevienā komisijā neietilpst visi *n* deputāti. Katrs deputāts var darboties vienā vai vairākās komisijās, var arī nebūt nevienā komisijā. Kādai lielākajai *k* vērtībai deputātus noteikti iespējams nosēdināt rindā tā, ka nevienas komisijas deputāti tajā nesēž visi pēc kārtas?

Atrisinājums

Lielākā *k* vērtība ir $k = n-2$.

Pierādīsim, ka lielāka *k* vērtība nav iespējama.

Apzīmēsim deputātus ar numuriem no 1 līdz *n*, tad komisijas būs skaitļu no 1 līdz *n* apakškopas.

Ja $k = n-1$, tad var izvēlēties komisijas, piemēram, šādi: {1, 2}, {1, 3}, ..., $\{1, n-1\}$, $\{1, n\}$. Tā kā 1 noteikti atradīsies rindā blakus kādam citam deputātam, tad ir komisija, kuras visi deputāti sēž pēc kārtas.

Pamatosim, ka vērtība $k = n-2$ apmierina uzdevuma nosacījumus. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju. Komisiju, kurā ir tikai 2 deputāti, sauksim par 2-komisiju.

Indukcijas bāze. Ja $n = 2$, tad $k = 0$ un nevienas komisijas deputāti nesēž pēc kārtas.

Induktīvā pieņēmums. Pieņemsim, ka $n-1$ deputātu var nosēdināt rindā tā, ka nevienas no $k = n-3$ komisijām visi locekļi nesēž pēc kārtas.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka *n* deputātus var nosēdināt rindā tā, ka nevienas no $k = n-2$ komisijām visi locekļi nesēž pēc kārtas.

- Pieņemsim, ka ir deputāts *A*, kurš nav nevienā komisijā. Tad atlikušo $n-1$ deputātu var nosēdināt rindā pēc induktīvā pieņēmuma un deputātu *A* nosēdināt rindas beigās (vai jebkurā citā vietā).
- Pieņemsim, ka ir deputāts *B*, kurš ietilpst tikai vienā komisijā *K*. Tad, izslēdzot deputātu *B* un likvidējot komisiju *K*, pārējo $n-1$ deputātu pēc induktīvā pieņēmuma var sasēdināt tā, ka nosacījums izpildās. Tad, ja kādā galā nesēž neviens no komisijas *K*, deputātu *B* var sēdināt tajā galā, pretējā gadījumā jebkur (jo tad komisijas *K* locekļiem jau tāpat kāds sēž pa vidu).
- Atliek gadījums, kad katrs deputāts ietilpst vismaz divās komisijās. Šajā gadījumā noteikti atradīsies deputāts, kurš piedalās ne vairāk kā vienā 2-komisijā – pretējā gadījumā, ja katrs no *n* deputātiem piedalās vismaz divās 2-komisijās, tad kopējais 2-komisiju skaits būtu vismaz $2n : 2 = n$, bet kopējais komisiju skaits ir $n-2$.

  Izvēlamies deputātu *C*, kurš piedalās ne vairāk kā vienā 2-komisijā. Apzīmēsim šo 2-komisiju ar K_2, bet, ja tādas nav, tad par K_2 ņemsim jebkuru komisiju, kurā šis deputāts piedalās. Izslēgsim *C* no parlamenta un no visām komisijām, kur tas ietilpst, komisiju K_2 likvidēsim. Tad pēc induktīvā pieņēmuma atlikušo $n-1$ deputātu var nosēdināt rindā tā, lai atlikušo $n-3$ komisiju deputāti tajā nesēdētu pēc kārtas. Tad deputātu *C* (analogi kā otrajā gadījumā) var nosēdināt tā, lai komisija K_2 arī nesēdētu pēc kārtas.