Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Latvijas 68. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

9. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

08.03.2018.

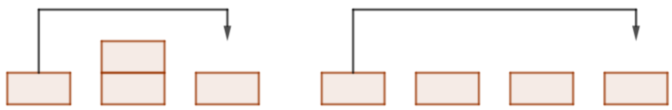
1. Zināms, ka a un b ir pozitīvi skaitļi, un kvadrātfunkciju $y = ax^2 + 2018x + b$ un $y = bx^2 + 2018x + a$ minimālo vērtību summa ir nulle. Pierādīt, ka katrai no šīm kvadrātfunkcijām minimālā vērtība ir nulle!

2. Izvēlēti trīs dažādi naturāli skaitļi un aprēķināti to reizinājumi pa pāriem, iegūstot trīs reizinājumus. Pierādīt, ka šos reizinājumus dalot ar 4, vismaz divi dod vienādus atlikumus!

3. Rūtiņu tabulas ar izmēriem 8×14 katrā rūtiņā sēž tieši viena muša. Visas mušas pārlido uz citu tabulu ar izmēriem 7×16 rūtiņas tā, ka katrā rūtiņā atkal ir tieši viena muša. Vai iespējams, ka visas mušas, kas bija kaimiņi sākotnējā izvietojumā (atradās blakus rūtiņās ar kopīgu malu) būs kaimiņi arī jaunajā izvietojumā?

4. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AC = 6$ un $AB = BC = 5$. Uz malas AB atlikts tāds punkts D, ka $BD = 2$, un uz malas AC atlikts tāds punkts E, ka $AE = 2$. Nogriežņi BE un CD krustojas punktā M. Aprēķināt trijstūra BMC laukumu!

5. Rindā izvietotas 2018 monētas. Vienā gājienā drīkst paņemt vienu monētu, pārcelt to pāri tieši divām monētām un uzlikt to uz nākamās monētas. Vai 1009 gājienos visas monētas iespējams savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē?



1. att.

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919
LATVIJAS UNIVERSITĀTE Fizikas un matemātikas fakultāte
A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

Latvijas 68. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

10. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

08.03.2018.

1. Atrast visus tādus veselu skaitļu pārus $(x; y)$, kas apmierina nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0 \\ x+2y<\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

2. Paralelograma $ABCD$ punkti K un M attiecīgi ir malu BC un CD viduspunkti. Aprēķināt AD garumu, ja $AK=6$, $AM=3$ un $\sphericalangle KAM=60°$.

3. Skaitļus a, b, c sauksim par *skaistu trijnieku*, ja tiem piemīt šādas īpašības:

- tie ir trīs pēc kārtas esoši naturāli skaitļi;
- katrs no tiem dalās ar savu ciparu summu.

Piemēram, *skaists trijnieks* ir 8, 9, 10.
a) Atrast tādu *skaistu trijnieku*, kurā mazākais skaitlis ir lielāks nekā 10.
b) Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *skaistu trijnieku*!

4. Desmit šahisti katrs ar katru izspēlēja vienu šaha partiju, dažas no tām beidzās neizšķirti. Ir zināms, ka bija tieši viens šahists, kas neizšķirti nospēlēja tieši vienu partiju, divi šahisti – kas nospēlēja divas, trīs šahisti – kas nospēlēja trīs, un četri šahisti, kas neizšķirti nospēlēja tieši četras partijas. Šos pēdējos četrus šahistus (kas katrs četras partijas nospēlēja neizšķirti) sauksim par *neizšķirtu karaļiem*, bet par *karalisku neizšķirtu* sauksim partiju, kurā neizšķirtu izcīnīja divi *neizšķirtu karaļi*. Vai var apgalvot, ka tika izspēlēts **a)** vismaz viens *karaliskais neizšķirts*, **b)** *vismaz divi karaliskie neizšķirti*?

5. Izvēlēti 12 dažādi naturāli skaitļi, neviens no tiem nepārsniedz 35. Pierādīt, ka starp šiem skaitļiem iespējams izvēlēties trīs atšķirīgus skaitļu pārus tā, ka visiem trīs pāriem lielākā un mazākā skaitļa starpība ir vienāda. Viens skaitlis var ietilpt arī divos pāros (vienreiz kā lielākais, otrreiz – kā mazākais).

Latvijas 68. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

11. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

08.03.2018.

1. Atrisināt nevienādību $\left|\left||x-2|-3\right|-7\right|<5.$

2. Vienādsānu trijstūrī ABC no pamata BC viduspunkta H novilkts perpendikuls HE pret sānu malu AC, punkts O ir nogriežņa HE viduspunkts. Pierādīt, ka $AO\perp BE$!

3. Skaitļus a,b,c,d,e sauksim par *skaistu piecinieku*, ja tiem piemīt šādas īpašības:

- tie ir pieci pēc kārtas esoši naturāli skaitļi;
- katrs no tiem dalās ar savu ciparu summu.

Piemēram, *skaists piecinieks* ir 6, 7, 8, 9, 10.
a) Atrast tādu *skaistu piecinieku*, kurā mazākais skaitlis ir lielāks nekā 10.
b) Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *skaistu piecinieku*!

4. Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos

$$\begin{cases} x^3+4x=5y \\ y^3+4y=5z \\ z^3+4z=5x \end{cases}$$

5. Trīs 500 litru mucās atrodas attiecīgi 100, 107 un 113 litri ūdens. Vienā gājienā atļauts jebkurā mucā M pieliet klāt no jebkuras citas mucas tik daudz ūdens, cik mucā M jau atrodas. Vai, veicot šādus gājienus, iespējams iztukšot **a)** vienu mucu, **b)** divas mucas?

Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Latvijas 68. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

12. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

08.03.2018.

1. Apzīmēsim $a = 2018^{\lg(\lg 2018)}$, $b = (\lg 2018)^{\lg 2018}$ un $c = (\lg(\lg 2018))^{2018}$. Aprēķināt izteiksmes $\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$ vērtību!

2. Uz trijstūra ABC malas AB atlikti punkti D un E tā, ka $AD = DE = EB$, uz malas BC punkti F un G tā, ka
$BF = FG = GC$, uz malas AC punkts H tā, ka $2AH = CH$. Nogrieznis DF krusto nogriežņus EH un EG attiecīgi punktos P un R. Pierādīt, ka $DP = PR = RF$.

3. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.

4. Taisnstūris, kura izmēri ir $n \times m$ rūtiņas, griežot par rūtiņu līnijām, sagriezts 1×6 rūtiņas lielos taisnstūros. Pierādīt, ka n vai m dalās ar 6.

5. Trīs mucās attiecīgi ir a, b un c litri ūdens, kur a, b, c ir naturāli skaitļi. Katras mucas tilpums ir lielāks nekā $a + b + c$ litri. Vienā gājienā atļauts jebkurā mucā M pieliet klāt no jebkuras citas mucas (kurā ir vismaz tikpat daudz ūdens kā mucā M) tik daudz ūdens, cik mucā M jau atrodas. Pierādīt, ka, veicot šādus gājienus, vienmēr iespējams iztukšot vienu no mucām!