Līdzfinansē Eiropas Savienība
2027 Nacionālais attīstības plāns
Valsts izglītības attīstības aģentūra

Eiropas Sociālā fonda Plus projekts Nr. 4.2.2.3/1/24/I/001 "Pedagogu profesionālā atbalsta sistēmas izveide"

Latvijas 76. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi

9.–12. klase

---

9. klase

9.1. Doti četri naturāli skaitļi $a < b < c < d$. Zināms, ka skaitļu a, b, c vidējais aritmētiskais ir divas reizes mazāks par skaitļu a, b, c, d vidējo aritmētisko. Kāda ir mazākā iespējamā d vērtība?

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\begin{gathered} 2\frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+d}{4} \\ 8(a+b+c) = 3(a+b+c+d) \\ 8(a+b+c) - 3(a+b+c) = 3d \\ 5(a+b+c) = 3d \\ d = \frac{5}{3}(a+b+c). \end{gathered}$$

Tā kā $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$, tad secinām, ka

$$d = \frac{5}{3}(a+b+c) \geq \frac{5}{3}(1+2+3) = 10,$$

kas nozīmē, ka mazākā iespējamā d vērtība ir 10. To var sasniegt, ja $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ un $d = 10$.

9.2. Ilmārs un Kims spēlē spēli, pamīšus izdarot gājienus, Ilmārs sāk pirmais. Sākumā uz tāfeles ir uzrakstīts skaitlis 2. Savā gājienā spēlētājs nodzēš uz tāfeles uzrakstīto skaitli x un tā vietā uzraksta kādu naturālu skaitli y, kuram $x < y < 2x$. Uzvar tas spēlētājs, kas uzraksta uz tāfeles skaitli **a)** 31; **b)** 2026. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

Atrisinājums.
b) Ievērosim, ka, ja spēlētājs savā gājienā uzraksta skaitli k, tad savā nākamajā gājienā viņš noteikti var uzrakstīt vai nu skaitli $2k$, vai arī $2k+1$.
Patiešām, ja spēlētājs uzraksta uz tāfeles skaitli k, tad pretinieks nākamajā gājienā var iegūt tikai skaitli no intervāla $[k+1; 2k-1]$. Redzams, ka pat pašam mazākajam skaitlim no šī intervāla $k+1$ izpildās nevienādības $k+1 < 2k < 2(k+1)$ un $k+1 < 2k+1 < 2(k+1)$, un acīmredzami tās izpildīsies arī visiem pārējiem skaitļiem no šī intervāla, tātad gan skaitli $2k$, gan $2k+1$ viņš savā nākamajā gājienā uzrakstīt varēs.
No šī varam secināt, ka spēlētājs, kurš savā gājienā uzrakstīs skaitli 1013, var garantēti uzvarēt (jo savā nākamajā gājienā viņš vienmēr varēs uzrakstīt skaitli $2 \cdot 1013 = 2026$). Līdzīgi spriežot, spēlētājs, kurš savā gājienā uzrakstīs skaitli 506, arī var garantēt uzvaru (jo tad savā nākamajā gājienā viņš varēs uzrakstīt skaitli $2 \cdot 506 + 1 = 1013$ un aiznākamajā – 2026). Analoģiski turpinot šo virkni, iegūsim, ka uzvaru var garantēt tas spēlētājs, kas savā gājienā uzraksta skaitli

$$2026, 1013, 506, 253, 126, 63, 31, 15, 7, 3$$

(šajā virknē katrs skaitlis k ir izsakāms no iepriekšējā, kā $\frac{k}{2}$, ja k ir pāra, un $\frac{k-1}{2}$, ja k ir nepāra).
Tātad uzvarēs pirmais spēlētājs (Ilmārs), jo savā pirmajā gājienā viņš varēs uzrakstīt skaitli 3 (un tad attiecīgi savā otrajā gājienā skaitli 7, savā trešajā gājienā skaitli 15 utt.).
a) Ievērosim, ka b) gadījumā iegūtajā virknē ir arī skaitlis 31, tātad, ievērojot to pašu stratēģiju, Ilmārs atkal var garantēt uzvaru.

9.3. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka tam var atrast trīs dažādus tā dalītājus a, b, c, kuri ir lielāki par 1 un kuriem izpildās, ka skaitlis $(a-1)(b-1)(c-1)$ dalās ar: **a)** n; **b)** n^2?

Atrisinājums. **a)** Jā, eksistē.
Der, piemēram, $n=60$, $a=4$, $b=5$, $c=6$, jo tādā gadījumā $(a-1)(b-1)(c-1)=(4-1)(5-1)(6-1)=60$, tātad visas dalāmības izpildās.

b) Nē, neeksistē.
Pieņemsim pretējo, ka eksistē. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $c<b<a$. Ievērosim, ka, tā kā n dalās ar a, tad $n^2 \,\vdots\, a^2$, līdz ar to ir jāizpildās $(a-1)(b-1)(c-1) \,\vdots\, a^2$. Ievērosim, ka skaitļi a un $a-1$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tāpēc a^2 un $a-1$ arī ir savstarpēji pirmskaitļi. Tas nozīmē, ka $(b-1)(c-1) \,\vdots\, a^2$. Ievērosim, ka

$$(b-1)(c-1)=bc-b-c+1<bc<a^2,$$

līdz ar to dalāmība nevar izpildīties. Secinām, ka mūsu pieņēmums ir aplams, līdz ar to skaitlis n, kas apmierina uzdevuma prasības, neeksistē.

9.4. Skolotājs uz tāfeles uzrakstīja kvadrātvienādojumu $x^2+10x+20=0$. Pēc tam katrs skolēns pēc kārtas palielināja vai samazināja par 1 vai nu koeficientu pie x, vai brīvo locekli (bez x). Galarezultātā uz tāfeles palika uzrakstīts kvadrātvienādojums $x^2+20x+10=0$. Vai noteikti var apgalvot, ka kādā brīdī uz tāfeles bija uzrakstīts kvadrātvienādojums ar veselām saknēm?

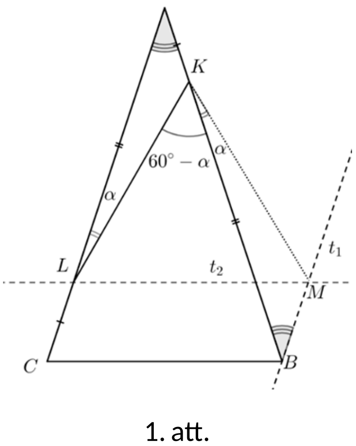
Atrisinājums. Jā, kvadrātvienādojums ar veselām saknēm vienmēr atradīsies.
Apzīmēsim koeficientus uz tāfeles kā $x^2+bx+c=0$. Sākumā $(b,c)=(10,20)$, bet beigās $(b,c)=(20,10)$. Aplūkosim starpību $d=b-c$. Sākumā $d=10-20=-10$, bet beigās $d=20-10=10$. Ievērosim, ka starpība d vienmēr mainās tieši par ±1, jo:
- ja $b\to b\pm1$, tad $d\to d\pm1$;
- ja $c\to c\pm1$, tad $d\to d\mp1$.

Tā kā sākumā $d=-10$ un beigās $d=10$, tad kaut kādā brīdī d vērtība bija vienāda ar 1. Tas nozīmē, ka $d=b-c=1$ jeb $b=c+1$. Tādā gadījumā uz tāfeles ir uzrakstīts kvadrātvienādojums $x^2+(c+1)x+c=0$ un tam ir 2 veselas saknes: -1 un $-c$.

9.5. Uz vienādsānu trijstūra ABC sānu malām AB un AC atlikti attiecīgi punkti K un L tā, ka $AK=CL$ un $\sphericalangle ALK+\sphericalangle BKL=60^\circ$. Pierādīt, ka $KL=BC$.

Atrisinājums.

Tā kā $AK=LC$ un trijstūris ABC ir vienādsānu, tad arī $AL=KB$. Konstruē taisni $t_1 \parallel AC$, kas iet caur punktu B, un taisni $t_2 \parallel BC$, kas iet caur punktu L (skat. 1. att.). Apzīmējam taišņu t_1 un t_2 krustpunktu ar M. Tādā gadījumā četrstūris $CLMB$ ir paralelograms, jo tā malas ir pa pāriem paralēlas. Paralelograma pretējās malas ir pa pāriem vienādas, tātad $LC=BM$ un $LM=CB$. Tā kā $AC\parallel MB$, tad $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ABM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie $AC\parallel MB$, ko krusto AB, kas nozīmē, ka $\triangle AKL=\triangle BMK(m\ell m)$. Tad (kā vienādu trijstūru atbilstošie elementi) $\sphericalangle ALK=\sphericalangle MKB=\alpha$ un $KL=MK$. Aplūkojot trijstūri LKM, tas ir vienādsānu ($KL=MK$) ar $\sphericalangle LKM=60^\circ$, no kā var secināt, ka $\triangle LKM$ ir vienādmalu un $LK=KM=ML$. Kā pierādīts iepriekš, $ML=CB$, tātad arī $KL=CB$, kas arī bija jāpierāda.



1. att.

10. klase

10.1. Vai eksistē kvadrāttrinoms $ax^2 + bx + c$, kur a, b, c ir veseli nepāra skaitļi un $\frac{1}{2026}$ ir viena no tā saknēm?

Atrisinājums. Nē, jo, ievietojot $\frac{1}{2026}$ vienādojumā, iegūst

$$a\left(\frac{1}{2026}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2026} + c = 0 \mid \cdot 2026^2$$
$$2026^2 c + 2026b + a = 0.$$

Tā kā pirmie divi saskaitāmie ir pāra skaitļi neatkarīgi no b un c paritātes, tad, lai summā iegūtu 0 (pāra skaitli), arī a jābūt pāra skaitlim, kas ir pretrunā ar doto.

10.2. Ar $d(a)$ apzīmēsim naturāla skaitļa a dalītāju skaitu no 1 līdz a ieskaitot. Naturālu skaitli $n > 1$ sauksim par *stilīgu*, ja tam izpildās šādas divas īpašības:

- $d(n)$ ir nepāra skaitlis;
- $d(k) \leq d(l)$ visiem $k < l$, kas abi ir skaitļa n dalītāji.

Pierādi, ka skaitlis ir stilīgs tad un tikai tad, ja tas izsakāms formā p^{2m}, kur m ir naturāls skaitlis un p ir pirmskaitlis!

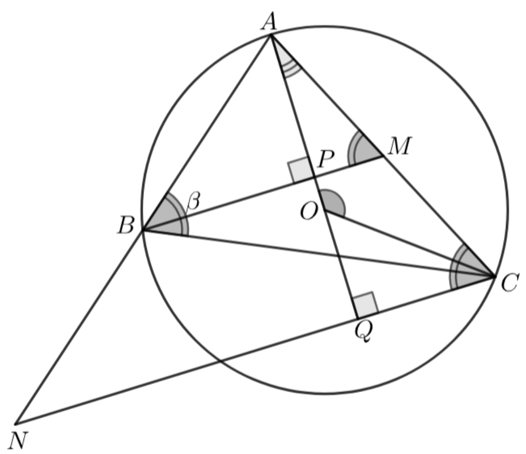
Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka $d(n)$ ir nepāra tikai naturālu skaitļu kvadrātiem. Aplūkosim naturālu skaitli n. Ievērosim, ka, ja skaitlis l ir skaitļa n dalītājs, tad skaitlis $\frac{n}{l}$ arī ir dalītājs. Tas nozīmē, ka visus skaitļa n dalītājus var sadalīt pāros $\left(l, \frac{n}{l}\right)$, līdz ar to skaitļa n dalītāju skaits (tas ir, skaitlis $d(n)$) ir pāra skaitlis, izņemot gadījumu $n = k^2$, jo tādā gadījumā k un $\frac{k^2}{k}$ sakrīt. Secinām, ka $d(n)$ ir pāra skaitlis visiem skaitļiem, izņemot, ja n ir naturāla skaitļa kvadrāts (jeb pāra pakāpe), kas arī bija jāpierāda.

Pierādīsim, ka tādu skaitļu pāra pakāpes, kuru pirmreizinātāju vidū ir vairāk nekā viens pirmskaitlis, neder. Pieņemsim, ka dota tāda naturāla skaitļa, kas satur pirmreizinātājus $p_1 < p_2$, pāra pakāpe. Tad šīs pakāpes dalītāju vidū ir skaitļi $p_1^2 < p_1p_2 < p_2^2$. Tā kā tie ir pirmskaitļi, tad $d(p_2^2) = 3$, jo p_2^2 dalās tikai ar 1, p_2, p_2^2, bet $d(p_1p_2) = 4$, jo p_1p_2 dalās ar 1, p_1, p_2 un p_1p_2. Iegūta pretruna, jo $p_1p_2 < p_2^2$, bet $d(p_1p_2) > d(p_2^2)$.

Visbeidzot pamatosim, ka skaitļiem, kas ir viena pirmskaitļa pāra pakāpes, izpildās prasītais. Tad varam izteikt $n = p^{2m}$, kur $m \in \mathbb{N}$. Tas nozīmē, ka skaitļa n dalītāju vidū ir 1, p, p^2, p^3, $\ldots$, p^{2m}. Tā kā p – pirmskaitlis, tad skaidrs, ka katra nākamā pakāpe ir lielāka par iepriekšējo, un tās dalītāju skaits palielinās par 1, tāpēc uzdevuma nosacījumi izpildīsies.

10.3. Dots trijstūris ABC. Punkts O ir trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs. Perpendikuls, kas vilkts no punkta B pret AO, krusto malu AC punktā M. Perpendikuls, kas vilkts no punkta C pret AO, krusto taisni AB punktā N. Pierādīt, ka $BC^2 = BM \cdot CN$.

Atrisinājums.



2. att.

Apzīmēsim $\sphericalangle ABC = \beta$ (skat. 2. att.). Tad $\sphericalangle AOC = 2\beta$ kā centra leņķis trijstūrim ABC apvilktajā riņķa līnijā. Tā kā $AO = OC$, tad $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$. Aplūkojot trijstūra AQC iekšējo leņķu summu, iegūst $\sphericalangle ACN = \beta$. Aplūkojot trijstūra APM iekšējo leņķu summu, $\sphericalangle AMB = \beta$. Tad $\triangle ABM \sim \triangle ACB$, jo $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ABC = \beta$ un $\sphericalangle BAC-$ kopīgs leņķis. No tā izriet, ka $\frac{BM}{BC} = \frac{AB}{AC}$. Tāpat $\triangle ACN \sim \triangle ABC$, jo $\sphericalangle BAC-$ kopīgs leņķis un $\sphericalangle ACN = \sphericalangle ABC = \beta$. No tā izriet, ka $\frac{CN}{BC} = \frac{AC}{AB}$. Tā kā

$$\left.\begin{aligned}\frac{BM}{BC} &= \frac{AB}{AC}\\ \frac{CN}{BC} &= \frac{AC}{AB}\end{aligned}\right\} \Rightarrow BM \cdot CN = BC^2 \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = BC^2.$$

10.4. Uz 6×6 šaha galdiņa katra lauciņa sākumā atrodas pa tornim. Katrā gājienā drīkst noņemt no galdiņa jebkuru vienu torni, kas apdraud nepāra skaitu citu torņu (torņi apdraud viens otru, ja tie atrodas vienā rindā vai vienā kolonnā un starp tiem nav citu torņu). Kāds ir lielākais torņu skaits, ko var noņemt?

Atrisinājums. Atbilde ir 31.

Vispirms pierādīsim, ka noteikti vismaz 5 torņi paliks nenoņemti. Acīmredzami, ka torņi, kas ir stūros, paliks nenoņemti, jo jebkurā brīdī stūros esošie torņi apdraud tieši 2 torņus. Brīdī, kad uz šaha galdiņa palikuši 5 torņi, aplūkosim torni, kas nav viens no stūros esošajiem torņiem. Ja šis tornis atrodas pirmajā rindā, pēdējā rindā, pirmajā kolonnā vai pēdējā kolonnā, tad tas apdraud tieši 2 citus torņus, pretējā gadījumā šis tornis apdraud 0 citus torņus. Secinām, ka šo torni mēs noņemt nevarēsim, tāpēc vismaz 5 torņi paliks nenoņemti. Līdz ar to noņemt mēs varēsim ne vairāk kā $36 - 5 = 31$ torni.

Konstrukcija, kā noņemt 31 torni, ir šāda. Zemāk redzamajā tabulā katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis attēlo gājiena numuru, kurā no attiecīgās rūtiņas tika noņemts tornis.

	1	2	3	4	5	6
1	X	1	26	24	21	X
2	3	2	23	25	22	20
3	4	27	30	29	18	19
4	5	8	31	28	17	X
5	6	7	16	14	13	15
6	X	9	10	11	12	X

Uzdevumam pastāv arī alternatīvās konstrukcijas, kas ļauj panākt 31 noņemtu torni.

10.5. Doti pozitīvi reāli skaitļi x, y, z ar īpašību, ka jebkuru divu šo skaitļu starpība ir mazāka nekā 2. Pierādīt, ka

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$

Atrisinājums. Ievērosim, ka, ja mēs pierādītu, ka $\sqrt{xy+1} > \frac{x+y}{2}$, $\sqrt{yz+1} > \frac{y+z}{2}$ un $\sqrt{zx+1} > \frac{z+x}{2}$, tad, saskaitot šīs 3 nevienādības kopā, mēs iegūtu, ka

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} = x + y + z,$$

kas ir mūsu pierādāmā nevienādība.
Pierādīsim, ka $\sqrt{xy+1} > \frac{x+y}{2}$ (pārējās divas nevienādības pierāda analogi). Veicot ekvivalentus pārveidojumus, varam iegūt, ka

$$\begin{gathered}\sqrt{xy+1} > \frac{x+y}{2}\\ (xy+1) > \frac{(x+y)^2}{4}\\ 4xy + 4 > (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\\ 4 > x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2.\end{gathered}$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo pēc uzdevuma nosacījumiem $2 > |x-y|$, kas nozīmē, ka $4 > (x-y)^2$. Analoģiski varam pierādīt, ka $\sqrt{yz+1} > \frac{y+z}{2}$ un $\sqrt{zx+1} > \frac{z+x}{2}$, kas atrisina uzdevumu.

11. klase

11.1. Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b. Zināms, ka 2026 skaitļu $\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2026}{b+2026}$ summa ir vienāda ar 2026. Ar ko ir vienāds šo 2026 skaitļu reizinājums?

Atrisinājums. Doto 2026 skaitļu reizinājums ir vienāds ar 1.

Ievērosim, ka

$$\frac{a+1}{b+1} + \frac{a+2}{b+2} + \ldots + \frac{a+2026}{b+2026} = 2026$$
$$\left(\frac{a+1}{b+1} - 1\right) + \left(\frac{a+2}{b+2} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{a+2026}{b+2026} - 1\right) = 0$$
$$\frac{a-b}{b+1} + \frac{a-b}{b+2} + \ldots + \frac{a-b}{b+2026} = 0$$
$$(a-b) \cdot \left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} + \ldots + \frac{1}{b+2026}\right) = 0.$$

Tā kā $\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} + \ldots + \frac{1}{b+2026} \neq 0$, jo b ir pozitīvs skaitlis, tad secinām, ka $a - b = 0$, kas nozīmē, ka $a = b$. Tādā gadījumā

$$\frac{a+1}{b+1} = \frac{a+2}{b+2} = \ldots = \frac{a+2026}{b+2026} = 1,$$

kas nozīmē, ka doto 2026 skaitļu reizinājums ir vienāds ar 1.

11.2. Reālu skaitļu trijnieku x, y, z sauksim par *triādi*, ja $x + y + z = 1$.
a) Atrast lielāko konstanti C ar īpašību, ka jebkurai triādei max$(x^2 + y, y^2 + z, z^2 + x) \geq C$.
b) Pierādīt, ka neeksistē tāda konstante C, ka jebkurai triādei min$(x^2 + y, y^2 + z, z^2 + x) \leq C$.

Atrisinājums. **a)** Lielākā iespējamā C vērtība ir $C = \frac{4}{9}$.

Ja $x = y = z = \frac{1}{3}$, tad $x + y + z = 1$ un $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x = \frac{4}{9}$, kas nozīmē, ka $\frac{4}{9} \geq C$. Tagad pierādīsim, ka jebkurai triādei izpildās, ka

$$\text{max}(x^2 + y, y^2 + z, z^2 + x) \geq \frac{4}{9}.$$

Ievērosim, ka visiem reāliem skaitļiem a, b, c izpildās, ka max$(a, b, c) \geq \frac{a+b+c}{3}$, tāpēc, ja mēs pierādītu, ka

$$\frac{(x^2 + y) + (y^2 + z) + (z^2 + x)}{3} \geq \frac{4}{9}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq \frac{4}{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 \geq \frac{4}{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3},$$

tad prasītais būtu pierādīts. Taču, izmantojot to, ka $x + y + z = 1$, varam iegūt, ka

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$$
$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 1$$
$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$$
$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$$
$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo reālu skaitļu kvadrātu summa ir nenegatīvs lielums. Tā kā šī nevienādība tika iegūta, ekvivalenti pārveidojot sākotnējo nevienādību, tad arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

b) Tagad pierādīsim, ka neeksistē tāda konstante, ka $\min(x^2+y, y^2+z, z^2+x) \leq C$. Aplūkosim skaitļus $x=0$, $y=t$, $z=1-t$, kur t ir reāls skaitlis. Tad

$$\min(x^2+y, y^2+z, z^2+x) = \min(t, t^2-t+1, 1-2t+t^2)$$

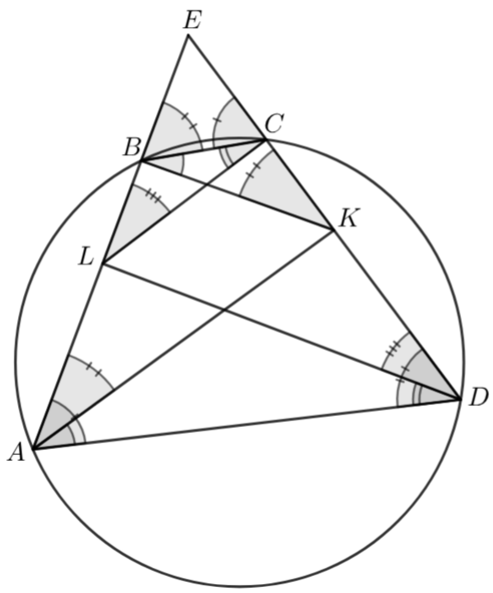
Ievērosim, ka jebkurai $t>3$ vērtībai izpildās, ka $t^2-t+1>t$, jo tas ir ekvivalenti ar $(t-1)^2>0$, un $t^2-2t+1>t$, jo tas ir ekvivalenti ar $t(t-3)+1>0$. Līdz ar to

$$\min(x^2+y, y^2+z, z^2+x) = \min(t, t^2-t+1, 1-2t+t^2) = t$$

Taču, tā kā mēs skaitli t varam izvēlēties pēc patikas lielu, tad neeksistē tāda konstante C, ka $t \leq C$, kas arī bija jāpierāda.

11.3. Dots riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$, kuram $BC<AD$. Punkts E ir taišņu AB un CD krustpunkts Punkti K un L ir izvēlēti attiecīgi uz malām CD un AB ar īpašību, ka $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KBC$ un $\sphericalangle LDA = \sphericalangle LCB$. Pierādīt, ka $EK=EL$.

Atrisinājums.



3. att.

Ievērosim, ka, tā kā ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCE$ un $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CBE$. Ievērosim, ka

$$\sphericalangle EAK = \sphericalangle BAD - \sphericalangle KAD = \sphericalangle BCE - \sphericalangle KBC = \sphericalangle BKE,$$
$$\sphericalangle EDL = \sphericalangle CDA - \sphericalangle LDA = \sphericalangle EBC - \sphericalangle LCB = \sphericalangle ELC,$$

kur mēs izmantojām to, ka $\sphericalangle BCE$ ir trijstūra BCK ārējais leņķis un $\sphericalangle EBC$ ir trijstūra KBC ārējais leņķis.

Tā kā $\sphericalangle EAK = \sphericalangle BKE$, tad $\triangle EBK \sim \triangle EKA$ pēc pazīmes $\ell\ell$, un, tā kā $\sphericalangle EDL = \sphericalangle ELC$, tad $\triangle ELC \sim \triangle EDL$ pēc pazīmes $\ell\ell$. Līdz ar to

$$\frac{EL}{EC} = \frac{ED}{EL} \implies EL^2 = ED \cdot EC$$
$$\frac{EK}{EB} = \frac{EA}{EK} \implies EK^2 = EB \cdot EA.$$

Līdz ar to, tā kā $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCE$ un $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CBE$, tad $\triangle EBC \sim \triangle EDA$ pēc pazīmes $\ell\ell$, kas nozīmē, ka

$$\frac{EB}{ED} = \frac{EC}{EA} \implies EB \cdot EA = EC \cdot ED.$$

Secinām, ka

$$EL^2 = ED \cdot EC = EB \cdot EA = EK^2 \implies EL = EK,$$

kas arī bija jāpierāda.

11.4. Atrast visus naturālo skaitļu trijniekus a, b, c, kuriem eksistē tādi naturāli skaitļi x, y, z, ka $ab+1 = x!$, $bc+1 = y!$ un $ca+1 = z!$.
Piezīme. Ar $n!$ apzīmē skaitļa n faktoriālu – pirmo n naturālo skaitļu reizinājumu, piemēram, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Atrisinājums. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $a \leq b \leq c$. Tādā gadījumā $ab \leq ac \leq bc$ un

$$ab+1 \leq ac+1 \leq cb+1 \implies x \leq z \leq y.$$

Tā kā $z! \vdots x!$ un $y! \vdots x!$, jo $x \leq z$ un $x \leq y$, tad secinām, ka $(ca+1) \vdots (ab+1)$ un $(bc+1) \vdots (ab+1)$. Pamanīsim, ka

$$a(c-b) = ((ca+1)-(ab+1)) \vdots (ab+1)$$
$$b(c-a) = ((bc+1)-(ab+1)) \vdots (ab+1).$$

Ievērosim, ka LKD$(ab+1, a) =$ LKD$(bc+1, b) = 1$, līdz ar to $(c-b) \vdots (ab+1)$ un $(c-a) \vdots (ab+1)$. Tas nozīmē, ka

$$(c-a)-(c-b) = (b-a) \vdots (ab+1).$$

Lai šī dalāmība izpildītos, ir jābūt patiesai nevienādībai $ab+1 \leq b-a$, taču ievērosim, ka $b-a < b \leq ba < ba+1$, tāpēc dalāmība var izpildīties tad un tikai tad, ja $a-b = 0$ jeb $a = b = t$, kur t ir kaut kāds naturāls skaitlis. Ievērosim, ka tādā gadījumā $t^2+1 = x!$. Ja $x \geq 3$, tad $x!$ dalās ar 3, kas nozīmē, ka $(t^2+1) \vdots 3$. Taču t^2 dod atlikumus 0 vai 1, dalot ar 3, tāpēc $(t^2+1) \not\vdots\, 3$. Secinām, ka $x = 1$ vai $x = 2$. Acīmredzami, ka $x = 1$ nav iespējams, tāpēc $x = 2$, kas nozīmē, ka $a = b = 1$. Tādā gadījumā $c+1 = y!$, kas nozīmē, ka $c = y! - 1$. Secinām, ka visi iespējamie atrisinājumi ir $(t!-1, 1, 1)$, $(1, t!-1, 1)$ un $(1, 1, t!-1)$.

11.5. Alberts ir pierakstījis virkni $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$, kurā katrs no skaitļiem $1, 2, \ldots, 2026$ parādās tieši vienu reizi. Kristīne vēlas noteikt šo virkni, veicot vairākus gājienus, pēc kuriem Alberts viņai sniedz informāciju. Vienā gājienā Kristīne uz lapas uzraksta skaitļus no 1 līdz 2026 un dažus no tiem savieno ar līnijām tā, ka katrs skaitlis ir savienots ar ne vairāk kā vienu citu skaitli. Pēc tam viņa iedod šo lapu Albertam. Tad Alberts uz citas lapas uzraksta skaitļus no 1 līdz 2026 un katram skaitļu pārim i un j, kurus Kristīne savienoja ar līniju, viņš savieno ar līniju skaitļus a_i un a_j. Beigās viņš iedod šo lapu Kristīnei. Kāds ir mazākais gājienu skaits, kas nepieciešams, lai Kristīne varētu noteikt Alberta sākotnējo virkni?

Atrisinājums. Atbilde ir $n = 2$.

Pēc viena gājiena Kristīne nekādi nevar ar pārliecību noteikt Alberta virkni. Proti, ja uz Alberta lapas ir savienoti skaitļi a_i un a_j, tad Kristīne nevar zināt, kurš no tiem ir a_i un kurš ir a_j.

Pierādīsim, ka Kristīne vienmēr var ar pārliecību noteikt Alberta virkni pēc diviem gājieniem, tāpēc minimālais nepieciešamais gājienu skaits ir tieši 2. Pirmajā gājienā Kristīne savieno pārus 3–4, 5–6, ..., 2025–2026. Otrajā gājienā Kristīne savieno pārus 2–3, 4–5, ..., 2024–2025.

Pamatosim, ka pēc šiem diviem gājieniem Kristīne zina skaitļus a_1, a_2 un a_{2026}. Patiešām, skaitlis a_1 ir vienīgais, kas nebija savienots ar nevienu citu skaitli ne pirmajā, ne otrajā gājienā. Skaitlis a_2 ir vienīgais, kas tika savienots ar kādu citu skaitli tikai otrajā gājienā, bet skaitlis a_{2026} ir vienīgais, kas tika savienots ar kādu citu skaitli tikai pirmajā gājienā.

Tālāk Kristīne zina arī a_3, jo pēc otrā gājiena šis skaitlis ir savienots ar a_2. Savukārt skaitlis a_4 pirmajā gājienā bija savienots ar a_3, tāpēc Kristīne zina arī a_4. Turpinot šādi spriest, Kristīne nosaka visus pārējos skaitļus no a_1 līdz a_n; $(n+1)$-ajā solī viņa nosaka a_{n+1}, jo šis skaitlis tieši vienā no apmaiņām bija savienots ar a_n, un, atkarībā no skaitļa n paritātes, viņa zina arī, kurā no apmaiņām tas notika.

12. klase

12.1. Kāda trijstūra leņķi ir α, β un γ. Zināms, ka $\alpha < \beta < \gamma$ un

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta.$$

Pierādīt, ka $\gamma = 90°$.

1. atrisinājums. Tā kā trijstūra leņķu summa ir $180°$, tad mums pietiek pierādīt, ka $\alpha + \beta = 90°$. Skaidrs, ka leņķi α un β ir šauri, apzīmēsim $\varphi = 90° - \beta$ un ievērosim, ka arī φ ir šaurs. Tādā gadījumā mums jāpierāda, ka $\alpha = \varphi$. Ievietojot dotajā vienādojumā $\beta = 90° - \varphi$ un izmantojot to, ka $\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi$ un $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$, iegūstam, ka

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \varphi = \cos^2 \alpha + \sin^2 \varphi.$$

Tālāk ievietojot $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ un $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$, iegūstam, ka

$$\sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \varphi = 1 - \sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi,$$

ko vienkāršojot iegūstam, ka $\sin^2 \alpha = \sin^2 \varphi$. Tā kā α un φ ir šauri leņķi, tad to sinusi ir pozitīvi, tātad $\sin\alpha = \sin\varphi$. Tā kā sinuss ir augoša funkcija intervālā $[0, 90°]$, tad varam secināt, ka $\alpha = \varphi$, kas arī bija vajadzīgs.

2. atrisinājums. Pamanīsim, ka α un β ir šauri leņķi (citādi trijstūra leņķu summa pārsniegtu $180°$, jo $\gamma \geq \beta$). Pārveidosim doto izteiksmi:

$$\begin{gathered}
\left(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha\right) + \left(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta\right) = 0 \\
\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 0 \\
2\cos\frac{2\alpha - 2\beta}{2}\cos\frac{2\alpha + 2\beta}{2} = 0 \\
\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = 0
\end{gathered}$$

Ievērosim, ka, tā kā α un β ir šauri, tad $|\alpha - \beta| < 90°$, tātad $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$. Tas nozīmē, ka $\cos(\alpha + \beta) = 0$, tātad $\alpha + \beta = 90° + 180°n$, kur $n \in \mathbb{Z}$. Tā kā α un β ir šauri, mums der tikai $\alpha + \beta = 90°$, taču no trijstūra leņķu summas izriet, ka $90° = \alpha + \beta = 180° - \gamma$, tātad $\gamma = 90°$, kas arī bija jāpierāda.

12.2. Doti reāli skaitļi a_1, a_2, ..., a_{104}, kuriem izpildās

$$a_1 + a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{104} = a_2 + a_3 \cdot \ldots \cdot a_{104} \cdot a_1 = \ldots = a_{104} + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{103} = 2026$$

Pierādīt, ka starp skaitļiem a_1, a_2, ..., a_{104} ir vismaz 52 vienādi.

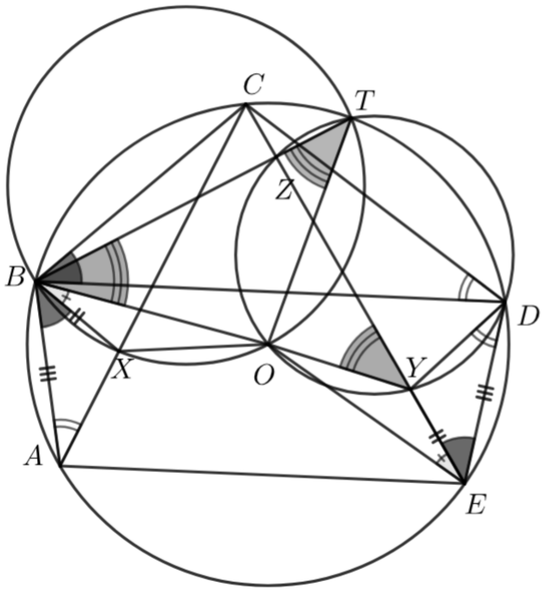
Atrisinājums. Ar P apzīmēsim $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{104}$. Ievērosim, ka no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $a_i^2 + P = 2026 a_i$ katram $1 \leq i \leq 2026$. Tas nozīmē, ka skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$ ir vienādojuma $x^2 - 2026x + P = 0$ saknes. Taču kvadrātvienādojumam ir ne vairāk kā 2 dažādas saknes, tāpēc pēc Dirihlē principa starp skaitļiem a_1, a_2, ..., a_{104} vismaz $104 \div 2 = 52$ ir vienādi.

12.3. Riņķa līnijā ω, kuras centrs ir punkts O, ir ievilkts piecstūris $ABCDE$ tā, ka taisnes AE un BD ir paralēlas. Uz diagonālēm AC un CE ir attiecīgi izvēlēti punkti X un Y ar īpašību, ka

$$\sphericalangle ABX = \sphericalangle CBD \quad \text{un} \quad \sphericalangle EDY = \sphericalangle CDB$$

Pierādīt, ka ap trijstūriem DYO un BXO apvilktās riņķa līnijas vēlreiz krustojas punktā, kas atrodas uz ω.

Atrisinājums.



4. att.

Tā kā $AE \parallel BD$, tad $ABDE$ ir vienādsānu trapece, tāpēc $AB = DE$. Ievērosim, ka $\sphericalangle BAX = \sphericalangle BDC = \sphericalangle EDY = \alpha$ un $\sphericalangle ABX = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DEY = \beta$, kur mēs izmantojām to, ka leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi. Secinām, ka $\triangle ABX = \triangle DEY$ pēc pazīmes $\ell m\ell$. Tādā gadījumā $BX = YE$ kā vienādos trijstūros atbilstošie elementi.

Ievērosim, ka $OB = OA = OE = OD$ kā rādiusi un $\sphericalangle BOA = \sphericalangle EOD$, jo loki AB un DE ir vienādi, kas nozīmē, ka $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OAB = \sphericalangle OED = \sphericalangle ODE$. Tādā gadījumā

$$\sphericalangle XBO = \sphericalangle OBA - \sphericalangle ABX = \sphericalangle OED - \sphericalangle YED = \sphericalangle YEO.$$

Secinām, ka $\triangle XBO = \triangle YEO$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tādā gadījumā $\sphericalangle BXO = \sphericalangle OYE$ kā vienādos trijstūros atbilstošie elementi.

Pieņemsim, ka trijstūra BXO apvilktā riņķa līnija krusto ω punktā T. Ievērosim, ka $\sphericalangle BTO = 180^\circ - \sphericalangle BXO = 180^\circ - \sphericalangle OYE = \sphericalangle OYC$. Pieņemsim, ka taisnes CE un BT krustojas punktā Z. Tādā gadījumā esam ieguvuši, ka $\sphericalangle ZTO = \sphericalangle OYZ$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $OYTZ$ var apvilkt riņķa līniju.

Ievērosim, ka $\sphericalangle ZYD = \sphericalangle YDE + \sphericalangle YED = \alpha + \beta$ kā trijstūra YDE ārējais leņķis. Atzīmēsim arī to, ka

$$\sphericalangle BCD = 180^\circ - \sphericalangle DBC - \sphericalangle CDB = 180^\circ - \beta - \alpha = \sphericalangle BTD$$

kā leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Secinām, ka $\sphericalangle BTD + \sphericalangle ZYD = 180^\circ$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $ZTYD$ var apvilkt riņķa līniju. Esam ieguvuši, ka četrstūri $OYTZ$ un $ZTYD$ ir ievilkti. Tādā gadījumā punkti O un D pieder trijstūrim ZTY apvilktai riņķa līnijai, tāpēc visi pieci punkti Z, T, Y, O, D atrodas uz vienas riņķa līnijas. Secinām, ka ap četrstūri $OYDT$ var apvilkt riņķa līniju, kas atrisina uzdevumu.

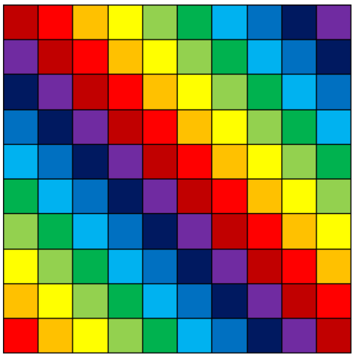
12.4. Dota 10×10 rūtiņu tabula, katrā tās rūtiņā ir ierakstīts kāds vesels skaitlis (starp tiem var gadīties arī vienādi). Sauksim rūtiņu par *labu*, ja visu skaitļu summa kolonnā, kurā atrodas šī rūtiņa, nepārsniedz visu skaitļu summu rindā, kurā atrodas šī rūtiņa. Atrodiet mazāko iespējamo labo rūtiņu skaitu šādā tabulā.

Atrisinājums.
Mazākais iespējamais labo rūtiņu skaits ir 10. Piemēram, pirmajā rindā visās rūtiņās ieraksta 1, bet visās pārējās rindās visās rūtiņās ieraksta 0 (skat. 5. att. (a)). Tad pirmās rindas summa ir 10, bet katras kolonnas summa ir 1, tāpēc visas pirmās rindas rūtiņas ir labas (to ir 10), bet visas pārējās nav labas; tātad var panākt tieši 10 labas rūtiņas.

Tagad pierādīsim, ka mazāk par 10 labām rūtiņām nevar būt. Sadalām tabulas rūtiņas 10 grupās pa 10 rūtiņām tā, lai katrā grupā rūtiņas atrastos dažādās rindās un dažādās kolonnās (piemēram, ņemot cikliskās diagonāles, kā redzams 5. att. (b)). Pieņemsim, ka kādā grupā visas rūtiņas nav labas; tad katrai rūtiņai šajā grupā tās rindas summa ir mazāka nekā tās kolonnas summa. Saskaitot šīs nevienādības pa visām grupas rūtiņām, iegūstam, ka visu tabulas skaitļu summa, saskaitīta pa rindām, ir mazāka nekā tā pati summa, saskaitīta pa kolonnām, kas nav iespējams. Tātad katrā grupā ir vismaz viena laba rūtiņa, un labo rūtiņu skaits ir vismaz 10.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(a)



(b)

5. att.

12.5. Naturālu skaitļu kopu S sauksim par *latvisku*, ja tai izpildās šādas divas īpašības:

- katriem diviem dažādiem kopas S elementiem a, b piemīt īpašība, ka a^2+1 dalās ar b un b^2+1 dalās ar a;
- katrs kopas S elements ir lielāks nekā 2026.

Atrast visus naturālos skaitļus $n \geq 2$, kuriem eksistē latviska naturālu skaitļu kopa, kas sastāv tieši no n dažādiem elementiem.

Atrisinājums. Atbilde ir $n=2$.
Pieņemsim, ka eksistē latviska skaitļu kopa, kas sastāv no $n \geq 3$ elementiem. Aplūkosim 3 šīs kopas lielākos elementus $a < b < c$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $(a^2+1) \vdots b$ un $(a^2+1) \vdots c$. Ja skaitļiem b, c ir kopīgs dalītājs d, tad tā kā $(b^2+1) \vdots c$ no uzdevuma nosacījumiem un d dala gan c, gan b^2, tad tam ir jādala 1. Secinām, ka b, c ir savstarpēji pirmskaitļi, līdz ar to $(a^2+1) \vdots bc$. Taču ievērosim, ka $a^2+1 < bc$, tāpēc dalāmība nevar izpildīties.

Tagad pierādīsim, ka eksistē latviska skaitļu kopa, kas sastāv no 2 elementiem. Vajag atrast naturālu skaitļu pārus $x, y > 2026$, kuriem izpildās, ka $(y^2+1) \vdots x$ un $(x^2+1) \vdots y$. Ievērosim, ka, ja mēs atradīsim skaitļu pārus, kuriem izpildās $x^2+y^2+1=3xy$, tad

$$(x^2+y^2+1) \vdots x \implies (y^2+1) \vdots x$$

$$(x^2+y^2+1) \vdots y \implies (x^2+1) \vdots y.$$

Pierādīsim, ka, ja (x_0, y_0) ir vienādojuma $x^2+y^2+1=3xy$ atrisinājums, tad arī $(y_0, 3y_0-x_0)$ ir atrisinājums. Patiešām

$$\begin{gathered} y_0^2+(3y_0-x_0)^2+1=3y_0(3y_0-x_0) \\ y_0^2+9y_0^2-6x_0y_0+x_0^2+1=9y_0^2-3x_0y_0 \\ x_0^2+y_0^2+1=3x_0y_0. \end{gathered}$$

Pēdējā sakarība ir patiesa, jo pēc pieņēmuma (x_0, y_0) ir vienādojuma $x^2+y^2+1=3xy$ atrisinājums. Līdz ar to, tā kā $(1,1)$ ir vienādojuma $x^2+y^2+1=3xy$ atrisinājums, tad varam iegūt šādu bezgalīgu atrisinājumu virkni:

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,5) \to (5,13) \to \ldots$$

Redzam, ka, turpinot šo atrisinājumu virkni pietiekami ilgi, iegūsim atrisinājumu, kurā $x, y > 2026$, kas arī atrisina uzdevumu.