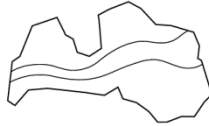




Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

9. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

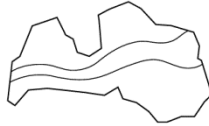
06.04.2023.

1. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y , ka izteiksmes $x^2 - x - y^2 + y$ vērtība ir **a)** 10, **b)** 2023?
2. Doti 8 atsvari, kuru masas attiecīgi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 un 8 kg. Vai šos atsvarus var novietot uz sviru svaru kausiem tā, lai izpildās abi nosacījumi:
 - sākumā uz katra svaru kausa būtu 4 atsvari un svāri atrastos līdzsvarā;
 - atsvarus varētu pārmaiņus noņemt no viena svaru kausa un no otra tā, lai pēc katra atsvara (izņemot pēdējā) noņemšanas tas kausis, no kura noņem atsvaru, kļūtu vieglāks nekā otrs svaru kausis?
3. Pa apli uzrakstīti n skaitļi, kur katrs no tiem ir 0 vai 1. Vienā gājienā Māris var izvēlēties kādu skaitli, kuram blakus abās pusēs (pa labi un pa kreisi) uzrakstītie skaitļi ir vienādi, un izvēlēta skaitļa vietā uzrakstīt otru skaitli (tas ir, skaitļa 0 vietā uzrakstīt 1 un otrādi). Vai Māris, atkārtojot šādus gājienu, vienmēr (neatkarīgi no sākotnējām skaitļu vērtībām un izkārtojuma) var panākt, ka visi pa apli uzrakstītie skaitļi ir vienādi, ja: **a)** $n = 72$; **b)** $n = 73$; **c)** $n = 74$?
4. Plaknē atzīmēti punkti $A(5; 2)$, $B(m; 5)$ un $C(3; m)$. Kādām reālām m vērtībām trijstūris ABC ir taisnleņķa trijstūris?
5. Uz tāfeles uzrakstīti dažādi pirmskaitļi, kuru vidējais aritmētiskais ir 25. Kāds vislielākais pirmskaitlis var būt uzrakstīts uz tāfeles?



Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

10. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

06.04.2023.

1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu

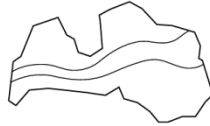
$$3(x^2 + y^2 + z^2 + 4) - 2(xy + yz + zx) - 4(x + y + z) = 0.$$

2. Doti 8 atsvari, kuru masas attiecīgi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 un 8 kg. Vai šos atsvarus var novietot uz sviru svaru kausiem tā, lai izpildās abi nosacījumi:
- sākumā uz katra svaru kausa būtu 4 atsvari un svāri atrastos līdzsvarā;
 - atsvarus varētu pārmaiņus noņemt no viena svaru kausa un no otra tā, lai pēc katra atsvara (izņemot pēdējā) noņemšanas tas kausis, no kura noņem atsvaru, kļūtu vieglāks nekā otrs svaru kausis?
3. Rindā kaut kādā secībā uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2023. Vienā gājienā tiek sareizināti katri divi blakus esošie skaitļi un zem tiem tiek uzrakstīta šī reizinājuma ciparu summa; šādā veidā tiek iegūta jauna rinda, kurā ir par vienu skaitli mazāk nekā sākotnējā rindā. Pēc pirmā gājiena tiek iegūta jauna rinda, kurā ir 2022 skaitļi, pēc otrā gājiena tiek iegūta jauna rinda, kurā ir 2021 skaitļi utt., līdz pēc 2022. gājiena tiek iegūta pēdējā jaunā rinda, kurā ir tikai viens skaitlis. Atrast visas iespējamās šī pēdējā skaitļa vērtības!
4. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāļu krustpunkts ir O . Zināms, ka $\sphericalangle CAD = 30^\circ$, $\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle BAD$ un $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle ADC$. Aprēķināt $\sphericalangle COD$!
5. Pa apli sarakstīti n skaitļi, kur katrs no tiem ir 0 vai 1. Vienā gājienā Kims var izvēlēties kādu skaitli, kuram blakus abās pusēs (pa labi un pa kreisi) uzrakstītie skaitļi ir vienādi, un izvēlētā skaitļa vietā uzrakstīt otru skaitli (tas ir, skaitļa 0 vietā uzrakstīt 1 un otrādi). Kādām n vērtībām Kims, atkārtot šādus gājienu, vienmēr (neatkarīgi no skaitļu sākotnējām vērtībām un izkārtojuma) var panākt, ka visi pa apli uzrakstītie skaitļi kļūst vienādi?



Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA

Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

11. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

06.04.2023.

1. Doti tādi reāli skaitļi x un y , ka $x + y = 1$ un $x^2 + y^2 = 3$. Pierādīt, ka izteiksmes $x^{11} + y^{11}$ vērtība ir naturāls skaitlis, un atrast šo vērtību!
2. Augoša aritmētiskā progresija sastāv no trīs trīsciparu skaitļiem. Zināms, ka jebkuru no šiem trīsciparu skaitļiem var iegūt no jebkura cita, samainot vietām tā ciparus. Kāda ir mazākā iespējamā šīs aritmētiskās progresijas diference?
3. Dota vienādsānu trapece $ABCD$, tās pamati ir AB un CD un diagonāles krustojas punktā X . Malas AD viduspunktu apzīmēsim ar M . Caur X vilktā taisne, kas paralēla AB , krusto malu AD punktā Y . Pierādīt, ka punkti B, C, M, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas!
4. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu četrinieku $(a_1; b_1; a_2; b_2)$, ka $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$ un
$$2^{a_1} - (b_1)^2 = 2^{a_2} - (b_2)^2 > 0.$$
5. Sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2023 (katrs tieši vienu reizi). Vienā gājienā Ilmārs var izvēlēties jebkurus divus uz tāfeles uzrakstītos skaitļus, nodzēst tos, un vietā uzrakstīt to vidējo aritmētisko. Pēc 2022 gājieniem uz tāfeles būs palicis tieši viens skaitlis. Kādas ir iespējamās naturālās šīs skaitļa vērtības?



Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA

Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 73. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

12. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

06.04.2023.

1. Doti tādi reāli skaitļi x un y , ka $x + y = 1$ un $x^3 + y^3 = 4$. Pierādīt, ka izteiksmes $x^{13} + y^{13}$ vērtība ir naturāls skaitlis, un atrast šo vērtību!
2. Uz trijstūra ABC malas BC izvēlēts patvaļīgs punkts D . Punkti I_1 un I_2 ir attiecīgi trijstūros ABD un ACD ievilkto riņķa līniju centri. Trijstūrim AI_1B apvilktā riņķa līnija krusto taisni BC punktā X , kas nesakrīt ar B , bet trijstūrim AI_2C apvilktā riņķa līnija krusto taisni BC punktā Y , kas nesakrīt ar C . Pierādīt, ka $DX = DY$.
3. Uz tāfeles uzrakstīti 100 reāli pozitīvi skaitļi (ne obligāti dažādi). Ja uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi x un y (ne obligāti dažādi), tad uz tās ir uzrakstīts arī skaitlis $\frac{2xy}{x+y}$. Kāda var būt visu 100 uzrakstīto skaitļu summa, ja zināms, ka viens no uzrakstītajiem skaitļiem ir 73?
4. Pierādīt, ka nevar atrast tādus pirmskaitļus p un q , kuriem $p^{q-1} + q^{p-1} + 1$ ir vesela skaitļa kvadrāts!
5. Kādā valstī ir 100 pilsētas, dažas no tām ir savienotas ar ceļiem. Katrs ceļš savieno tieši divas pilsētas un ārpus pilsētām ceļi nekrustojas (izmantoti viadukti). Kāds ir pats mazākais kopējais ceļu skaits, pie kura noteikti (neatkarīgi no ceļu izvietojuma) var apgalvot, ka no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu (varbūt arī caur vienu vai vairākām citām pilsētām)?