



Valsts izglītības satura centrs

Vaļņu iela 2, Rīga, LV - 1050, tālr. 67216500, fakss 67223801, e-pasts visc@visc.gov.lv, www.visc.gov.lv

Latvijas 74. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

9. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

27.03.2024.

1. Vai eksistē 5 dažādi naturāli skaitļi ar īpašību, ka to vidējais aritmētiskais ir: **a)** tieši 3 reizes lielāks; **b)** tieši 2 reizes lielāks nekā visu šo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs?
2. Uz nogriežņa AB atlikts iekšējs punkts C tā, ka $AC < CB$ un uz vienu pusi no AB konstruēti divi kvadrāti $ADEC$ un $CFGB$. Nogriežņi AG un CE krustojas punktā H . Pierādīt, ka trijstūru ACH un HEG laukumi ir vienādi!
3. Datorklasē ir n ($n \geq 3$) datori, daži no tiem ir savienoti savā starpā. Zināms, ka katrs dators ir savienots ar vismaz diviem citiem datoriem. Ik pa brīdim kāds no datoriem, kurš pirms tam vēl neko nav sūtījis, nosūta ziņojumu visiem datoriem, ar ko tas ir savienots. Pierādīt, ka jebkurā laika brīdī var atrast divus datorus, kuri ir saņēmuši vienādu ziņojumu skaitu!
4. Uz tāfeles uzrakstīta izteiksme $\overline{abc} \cdot \overline{def} \cdot \overline{ghi} \cdot \overline{jkl}$, kas ir četru trīsciparu skaitļu reizinājums. Katrā gājienā Gustavs izvēlas kādu nenulles ciparu un Maruta to ieraksta kāda burta vietā (Gustavs redz, kurā). Pierādīt, ka Maruta vienmēr var panākt, ka pēc 12 gājieniem iegūtās izteiksmes vērtība dalās ar 9.
5. Kims grib naturālos skaitļus no 1 līdz 2024 uzrakstīt pa apli tā, ka katrs skaitlis ir uzrakstīts tieši vienu reizi un katriem trīs pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem a , b , c izpildās īpašība, ka skaitlis $a + c$ dalās ar $b + 1$. Vai Kims to var izdarīt?



Valsts izglītības satura centrs

Vaļņu iela 2, Rīga, LV - 1050, tālr. 67216500, fakss 67223801, e-pasts visc@visc.gov.lv, www.visc.gov.lv

Latvijas 74. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

10. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

27.03.2024.

- Vai var izvēlēties **a)** 50; **b)** 51 tādus dažādus naturālus skaitļus, kas nepārsniedz 100, lai jebkuriem diviem izvēlētajiem skaitļiem to starpība (no lielākā skaitļa atņemot mazāko) nebūtu vienāda ar to lielāko kopīgo dalītāju?
- Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kuram $AB = BC = CD$. Četrstūra diagonāles krustojas punktā E , bet leņķu BAD un ADC bisektrises krustojas punktā F . Pierādīt, ka $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EDF$.
- Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2y^2 \\ y + \frac{1}{y} = 2z^2 \\ z + \frac{1}{z} = 2x^2 \end{cases}$$
- Skolas 10. klašu olimpiādē piedalījās 10.a un 10.b klases skolēni. Pirmo reizi saskaitot rezultātus, tika noskaidrots, ka 10.a klases skolēnu vidējais rezultāts ir 37 punkti, bet 10.b klases skolēnu vidējais rezultāts ir 11 punkti. Pārskatot darbus, atklājās, ka viens skolēna darbs bija pielikts pie nepareizās klases. Pārrēķinot vidējo rezultātu, izrādījās, ka abās klasēs tas ir palielinājies tieši par 1 punktu (un tagad ir attiecīgi 38 un 12 punkti). Cik skolēnu kopā piedalījās šajā olimpiādē?
- Tabulā ar izmēriem 9×9 rūtiņas dažas rūtiņas ir iekrāsotas, bet pārējās ir neiekrāsotas. Rūtiņu iekrāsošanai izmanto šādus gājienus: ja kādā rindā, kolonnā vai uz kādas no divām galvenajām diagonālēm ir iekrāsotas vismaz trīs rūtiņas, tad vienā gājienā var iekrāsot visas atlikušās šīs rindas, kolonnas vai diagonāles rūtiņas. Kāds ir mazākais iespējamais sākumā iekrāsoto rūtiņu skaits, pie kura var gadīties, ka ar aprakstītajiem gājieniem var iekrāsot visas tabulas rūtiņas?



Valsts izglītības satura centrs

Vaļņu iela 2, Rīga, LV - 1050, tālr. 67216500, fakss 67223801, e-pasts visc@visc.gov.lv, www.visc.gov.lv

Latvijas 74. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

11. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

27.03.2024.

1. Atrast visus reālu skaitļu pārus $(a; b)$ ar kuriem ir spēkā nevienādība:

$$4a + 4b^2 + \sqrt{4a - 4b^2 - 1} \leq 1.$$

2. Taisnstūrī $ABCD$ uz malas BC atlikts punkts E . Nogrieznis AE krusto taisnstūra diagonāli BD punktā O . Taisne, kas novilkta caur punktu O paralēli BC , krusto malas AB un CD attiecīgi punktos F un G . Zināms, ka trijstūra BOF laukums ir 4, bet trijstūra AOD laukums ir 63. Aprēķināt četrstūra $OECG$ laukumu!
3. Datorklasē ir n ($n \geq 3$) datori, daži no tiem ir savienoti savā starpā. Ik pa brīdim kāds no datoriem, kurš pirms tam vēl neko nav sūtījis, nosūta ziņojumu visiem datoriem, ar ko tas ir savienots. Pierādīt, ka jebkurā laika brīdī var atrast divus datorus, kuri ir saņēmuši vienādu ziņojumu skaitu!
4. Kādām naturālām n vērtībām var atrast $2n + 1$ naturālus skaitļus (ne obligāti dažādus) ar īpašību, ka, izvēloties jebkurus $n + 1$ no tiem, to summa dalīsies ar atlikušo n skaitļu summu?
5. Dots naturāls skaitlis n , ar M apzīmēsim pirmo $2n$ naturālo skaitļu kopu $M = \{1; 2; 3; \dots; 2n\}$. Divi spēlētāji A un B spēlē spēli. Katrā gājienā vispirms spēlētājs A no kopas M izvēlas skaitli a , pēc tam spēlētājs B no kopas M izvēlas skaitli b , turklāt skaitļi a un b nav vienādi un nesakrīt ne ar vienu no iepriekš izvēlētajiem skaitļiem. Gājiena beigās tiek izveidota kvadrātfunkcija $y = x^2 - ax + b$ un uzrakstīta uz lapas. Pēc n gājieniem ir izvēlēti visi skaitļi no kopas M un iegūtas n kvadrātfunkcijas. Tālāk tiek aplūkoti visi iespējamie šo kvadrātfunkciju pāri. Katram pārim tiek aprēķinātas to grafiku visu krustpunktu y koordinātas, visas šādi iegūtās y koordinātas tiek saskaitītas. Pierādīt, ka spēlētājs B var panākt, lai iegūtā summa būtu tieši $n^3 - n$.



Valsts izglītības satura centrs

Vaļņu iela 2, Rīga, LV - 1050, tālr. 67216500, fakss 67223801, e-pasts visc@visc.gov.lv, www.visc.gov.lv

Latvijas 74. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

12. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

27.03.2024.

1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y + z \\ y + \frac{1}{y} = x + z \\ z + \frac{1}{z} = x + y \end{cases}$$

- Uz dažādmalu trijstūra ABC malām AB un AC attiecīgi izvēlēti tādi punkti D un E , ka $BD = CE$. Trijstūriem ABE un ACD apvilktās riņķa līnijas krustojas vēl arī punktā T . Pierādīt, ka AT ir leņķa BAC bisektrise!
- Uz galda traukā ir 200 konfektes. Brālītis un Karlsons pēc kārtas izdara gājienus, Brālītis sāk. Vienā gājienu var paņemt no trauka un apēst vai nu vienu, vai divas konfektes. Uzvar tas spēlētājs, kurš apēd pēdējo konfekti. Kurš uzvarēs pareizi spēlējot, ja papildus zināms, ka katrs no viņiem var apēst ne vairāk kā **a)** 140; **b)** 110 konfektes? (Gadījumā, ja spēlētājs vairs nevar izdarīt gājienu, viņš zaudē).
- Profesors Cipariņš iedomājās naturālu skaitli n un uz tāfeles vienu aiz otra bez atstarpes uzrakstīja skaitļus 2^n un 14^n (tieši šādā secībā), uzrakstīto skaitli apzīmēsim ar C (Piemēram, ja $n = 2$, tad $C = 4196$). Vai iespējams, ka skaitlis $C - 1$ ir pirmskaitlis?
- Atrast lielāko reālo skaitli A ar īpašību, ka $3x^2 + y^2 + 1 \geq A(x^2 + xy + x)$ visiem reāliem skaitļiem x un y .