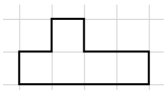
Profesora Cipariņa klubs
2022./2023. mācību gads
1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

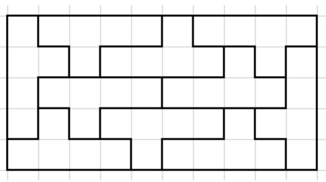
1. uzdevums

Parādīt vienu piemēru, kā no desmit figūrām (skat. 1. att.) var salikt taisnstūri. Figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



1. att.

Atrisinājums. Piemēram, skat. 2. att.



2. att.

2. uzdevums

Dots septiņciparu skaitlis $\overline{2023pck}$. Vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus.

a) Kādi cipari var būt burtu p, c un k vietā, lai dotais skaitlis dalītos ar 125?

b) Kādi cipari var būt burtu p, c un k vietā, lai dotais skaitlis dalītos ar 45, ja zināms, ka $p < c < k$?

Atrisinājums. a) Skaitlis $\overline{pck}$ var būt 125; 250; 375; 625; 750 un 875.

Pamatosim, ka šīs ir vienīgās iespējas. Lai skaitlis dalītos ar $125 = 5^3$, tā pēdējo trīs ciparu veidotajam skaitlim $\overline{pck}$ jādalās ar 125. Tātad $\overline{pck}$ var būt 000; 125; 250; 375; 500; 625; 750 vai 875. Tā kā p, c un k ir dažādi burti, tad neder gadījumi, kuros ir vienādi cipari. Tātad skaitļa $\overline{pck}$ vietā var būt 125; 250; 375; 625; 750 vai 875.

b) Burtu p, c un k vietā var būt attiecīgi cipari 2, 4 un 5.

Lai skaitlis dalītos ar 45, tam jādalās ar 5 un ar 9. Lai skaitlis dalītos ar 5, k vērtība ir vai nu 0, vai 5. Tā kā k ir lielākais cipars un visi cipari ir dažādi, tad k nevar būt 0. Tātad $k = 5$. No tā izriet, ka p un k vērtības var būt kāda no cipariem 0, 1, 2, 3 vai 4.

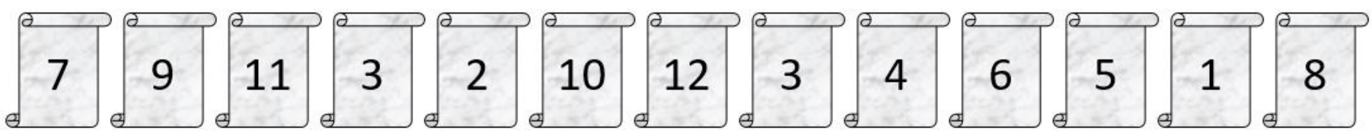
Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Skaitļa $\overline{2023pck}$ ciparu summa ir

$$2 + 0 + 2 + 3 + p + c + k = 7 + p + c + 5 = 12 + p + c.$$

Tā kā p un k ir mazāki nekā 5, tad vienīgā derīgā summas $12 + p + c$ vērtība ir 18 jeb $p + c = 6$. Ievērojot, ka $p < c$, to vērtības var būt 1 un 5; 2 un 4; 3 un 3. Pirmais un pēdējais gadījums nav derīgs, jo p, c un k ir dažādi cipari. Tātad atliek tikai viens gadījums: $\overline{pck} = 245$.

3. uzdevums

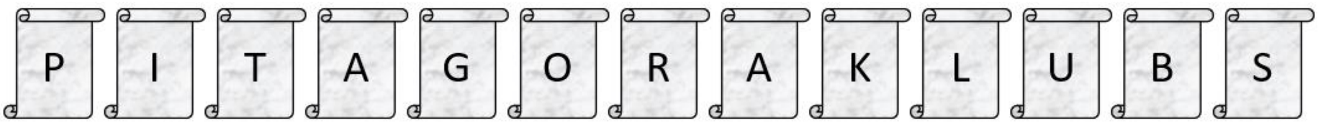
Jaunie matemātikas entuziasti izveidoja slepenu apvienību. Lai kļūtu par apvienības biedru, nepieciešams uzlauzt kodu un uzzināt matemātiķu apvienības nosaukumu. Kodā katrs no 12 skaitļiem apzīmē citu alfabēta burtu.



Noteikt matemātiķu apvienības nosaukumu, nosakot burtu vērtības, ja ir dotas vairākas norādes:

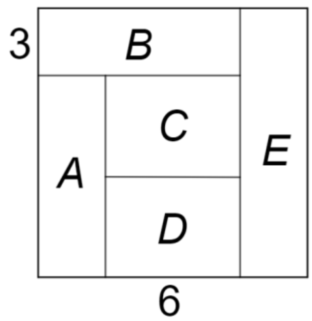
1) $A + B + G = A \cdot B \cdot G = 6$,
2) $A \cdot I \cdot L = 162$,
3) $A + I + K + L = 22$,
4) $O \cdot R = 120$,
5) $B \cdot P = 7$,
6) $K + P + T = 22$,
7) $L \cdot O = 60$,
8) $S \cdot S - U \cdot U = 39$.

Atrisinājums. Tā kā A, B un G apzīmē dažādus skaitļus un $A + B + G = 6$ (pirmā norāde), tad A, B un G var būt tikai skaitļi 1, 2 un 3.
Lai izmantotu otro norādi, sadalīsim skaitli 162 pirmreizinātājos: $162 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Ja $A = 1$, tad skaitļu I un L reizinājumam jābūt 162, bet kodā nav tik lielu skaitļu. Ja $A = 2$, tad I un L var būt 3 un 27, bet kodā nav dota vērtība 27. Tātad $\boldsymbol{A = 3}$ un I un L vērtības var būt attiecīgi 6 un 9 vai otrādi. No tā iegūstam, ka $A + I + L = 3 + 6 + 9 = 18$.
No trešās norādes iegūstam, ka $\boldsymbol{K} = 22 - 18 = \mathbf{4}$.
No pirmās norādes zināms, ka B un G vērtības ir attiecīgi 1 un 2 vai otrādi. No piektās norādes $B \cdot P = 7$, varam secināt, ka $\boldsymbol{B = 1}$ un $\boldsymbol{P = 7}$, tātad $\boldsymbol{G = 2}$.
No sestās norādes iegūstam, ka $\boldsymbol{T} = 22 - K - P = 22 - 4 - 7 = \mathbf{11}$.
No otrās norādes zināms, ka I un L vērtības var būt attiecīgi 6 un 9 vai otrādi. No septītās norādes secinām, ka $\boldsymbol{L = 6}$, lai iegūtu reizinājumu 60. Tātad $\boldsymbol{O = 10}$ un $\boldsymbol{I = 9}$.
No ceturtās norādes iegūstam, ka $\boldsymbol{R} = 120 : O = 120 : 10 = \mathbf{12}$.
Tātad S un U vērtības var būt tikai 5 un 8. Lai izpildītos astotā norāde, $\boldsymbol{S = 8}$ un $\boldsymbol{U = 5}$.
Varam noteikt matemātiķu savienības nosaukumu:



4. uzdevums

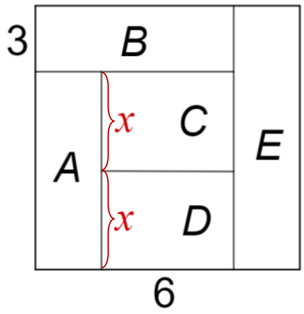
Kvadrāts (skat. 3. att.) ir sadalīts piecos taisnstūros *A*, *B*, *C*, *D* un *E*. Zināms, ka taisnstūru *A*, *B*, *C* un *D* laukumi ir vienādi un ka taisnstūra *B* viena mala ir 3 garuma vienības, bet taisnstūra *D* viena mala ir 6 garuma vienības. Kāds var būt kvadrāta laukums?



3. att.

Atrisinājums. Kvadrāta laukums ir 144 laukuma vienības. Pamatosim, ka tā ir vienīgā iespējamā vērtība.
Tā kā taisnstūru *C* un *D* laukumi ir vienādi un to divas malas sakrīt (vienādas ar 6), tad arī otrām divām malām jābūt vienādām. Apzīmēsim to garumu ar x (skat. 4. att.). Iegūstam, ka taisnstūra *A* malas garums ir 2 reizes lielāks nekā taisnstūra *D* malas garums, tātad $2 \cdot x$. Tā kā taisnstūru *A* un *D* laukumi ir vienādi, tad taisnstūra *A* otrai malai jābūt 2 reizes īsākai jeb 3. No tā varam iegūt taisnstūra *B* otras malas garumu, tas ir $3 + 6 = 9$, tātad taisnstūru *A*, *B*, *C* un *D* laukumi ir $3 \cdot 9 = 27$. Tā kā taisnstūra *A* viena mala ir 3, tad otra mala ir

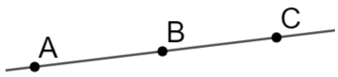
$27:3=9$ un kvadrāta viena mala ir $3+9=12$, tātad kvadrāta laukums ir $12\cdot 12=144$ laukuma vienības.



4. att.

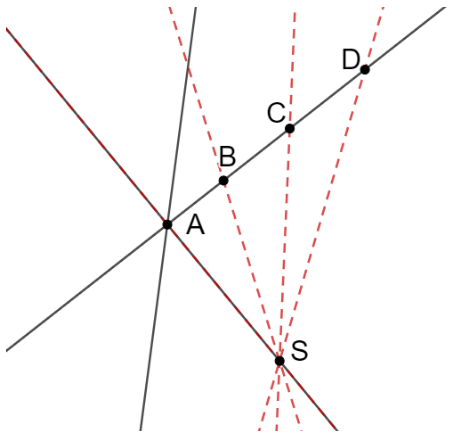
5. uzdevums

Skolas pagalmā uz asfalta ar krītu ir uzzīmēti 10 punkti, kuri ne visi atrodas uz vienas taisnes. Ansis katrus divus punktus savienoja ar taisni. Pēc tam viņš centās atrast tādu punktu, caur kuru iet vismaz četras dažādas taisnes. Pierādīt, ka tādu punktu vienmēr var atrast, lai kur tie būtu uzzīmēti.
Piezīme. Ja punkti *A, B* un *C* atrodas uz vienas taisnes (skat. 5. att.), tad taisnes *AB, AC* un *BC* ir viena un tā pati taisne.



5. att.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka nav tāda punkta, caur kuru iet vismaz četras dažādas taisnes. Tādā gadījumā cauri visiem punktiem iet no 1 līdz 3 taisnēm. Izvēlēsimies punktu *A*, caur kuru iet lielākais 3 taisnes. Uz šīm trīs taisnēm ir izvietoti pārējie 9 punkti, lai neveidotos vairāk taišņu (pretējā gadījumā caur punktu *A* ies četras taisnes). Tādā gadījumā vismaz uz vienas taisnes ir atzīmēti vēl vismaz 3 punkti bez *A*, kopā 4 punkti: *A, B, C* un *D* (skat. 6. att.). Ja izvēlas tādu punktu *S*, kas neatrodas uz minētās taisnes, jo pēc uzdevuma nosacījumiem visi punkti neatrodas uz vienas taisnes, tad caur šo punktu iet vismaz četras dažādas taisnes: *SA*, *SB*, *SC* un *SD*. Esam ieguvuši pretrunu ar sākumā veikto pieņēmu un pierādījuši, ka noteikti var atrast punktu, caur kuru iet vismaz četras dažādas taisnes.



6. att.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Dots kāds naturāls skaitlis n, kuram ir iespējams pārkārtot ciparus tā, lai iegūtu skaitli, kas ir trīs reizes lielāks nekā n. Pamatot, ka n dalās ar 9.

Atrisinājums. Mainot skaitļa ciparus vietām, tā dalāmība ar 3 vai 9 nemainās, jo ciparu summa paliek nemainīga. Ja, pārkārtojot skaitļa ciparus, iegūstam skaitli, kas ir trīs reizes lielāks, tad tas noteikti dalās ar 3. Tātad varam secināt, ka arī n dalās ar 3, jo tam ir tāda paša ciparu summa kā jauniegūtajam skaitlim. Tas nozīmē, ka sākotnējais skaitlis n ir izsakāms formā $3k$, kur k ir kāds naturāls skaitlis. No tā izriet, ka skaitlis, kas ir trīs reizes lielāks nekā n jeb $3k$, dalīsies ar 9, jo tas izsakāms kā $9k$. Atceroties to, ka ciparu summa gan $9k$, gan n ir vienāda, varam secināt, ka skaitlis n dalās ar 9.

7. uzdevums

Vairākos grozos kopā atrodas 2022 rieksti. Šos riekstus atļauts ēst un tukšos grozus izmest, bet nav atļauts no viena groza riekstus pārcelt uz citu grozu. Pamatot, ka var panākt, lai visos netukšajos grozos būtu vienāds skaits riekstu un pavisam paliktu vismaz 100 rieksti.

Atrisinājums. Veiksim pierādījumu no pretējā, tas ir, pieņemsim, ka nevar panākt to, lai visos netukšajos grozos būtu vienāds skaits riekstu un pavisam kopā būtu vismaz 100 riekstu. Sākotnēji mums ir dots nezināms grozu skaits n. Šos grozus mēs varam sanumurēt neaugošā secībā pēc to riekstu daudzuma. Tātad strādāsim ar groziem $g_1 \geq g_2 \geq g_2 \geq \cdots \geq g_n$.

Pēc šāda apzīmējuma mēs jau uzreiz varam spriest, ka grozs g_1 nedrīkst saturēt 100 vai vairāk riekstu, jo pretējā gadījumā būs iespējams iztukšot pārējos grozus un paliks grozs g_1, kurā būs vismaz 100 rieksti. Tātad pilnākais grozs g_1 satur 99 vai mazāk riekstu jeb $g_1 \leq 99$. Nākamais pilnākais grozs g_2 nevar sākotnēji saturēt vairāk kā 49 riekstus, jo, ja tas saturēs 50 vai vairāk riekstus, tad varēsim panākt, ka gan grozā g_1, gan grozā g_2 būs tieši 50 rieksti. Tātad jāizpildās nevienādībai $g_2 \leq 49$. Šādi mēs varam turpināt spriest, ka trešais pilnākais grozs nesaturēs vairāk par 33 riekstiem jeb $g_3 \leq 33$, jo pretējā gadījumā mums būtu 3 grozi ar vismaz 34 riekstiem, kas kopumā dos vairāk nekā 100.

Idejiski mēs nostādām prasību, ka k-tais grozs g_k drīkst saturēt tik daudz riekstu m, lai izpildās nevienādība $k \cdot m < 100$, jo pretējā gadījumā mēs varētu atrast k grozus ar vismaz m riekstiem un tos vienādi iztukšot līdz katrā grozā būtu m riekstu un kopumā būtu vismaz 100 riekstu. Tātad iegūstam šādas nevienādības:

$$\begin{array}{ccccccc} g_1 \leq 99, & g_2 \leq 49, & g_3 \leq 33, & g_4 \leq 24, & g_5 \leq 19, & g_6 \leq 16, & g_7 \leq 14, \\ g_8 \leq 12, & g_9 \leq 11, & g_{10} \leq 9, & \dots, & g_{49} \leq 2, & \dots, & g_{99} \leq 1. \end{array}$$

Vairāk par 99 netukšiem groziem nevar būt, jo citādāk varētu atstāt 100 grozus ar 1 riekstu.

Saskaitot šīs nevienādības, kreisajā pusē iegūsim $g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_{99} = 2022$, kas ir visu kopējo riekstu skaits, bet labajā pusē iegūsim skaitli 443. Iegūstam aplamu nevienādību, jo $2022 > 443$. Tātad varam secināt, ka sākotnējais pieņēmums ir aplams jeb vienmēr varēs panākt to, ka paliek pāri grozi, kuros ir vienāds skaits riekstu, un riekstu kopējais skaits ir vismaz 100.