Profesora Cipariņa klubs
2022./2023. mācību gads

Nolikums

1. Profesora Cipariņa klubs (PCK) ir neklātienes matemātikas konkurss skolēniem līdz 9. klasei ieskaitot.
2. Iepriekšēja pieteikšanās konkursam nav nepieciešama.
3. Piedalīties drīkst sākot no jebkuras kārtas, kā arī var piedalīties tikai atsevišķās kārtās. Drīkst sūtīt arī tikai dažu uzdevumu risinājumus.
4. Uzdevumi, atrisinājumi un skolēnu rezultāti tiek publicēti LU A. Liepas NMS mājas lapā.
5. Mācību gada laikā tiek rīkotas 5 kārtas.
6. Katrā kārtā risināšanai tiek piedāvāti 7 uzdevumi. 1.-5. uzdevums paredzēts skolēniem līdz 7. klasei, bet 8.-9. klašu skolēniem paredzēts 1.-7. uzdevums.
7. Katrā kārtā tiek piedāvāts teorijas materiāls par kādu no matemātikas olimpiāžu tēmām un to var izmantot 2. uzdevuma un 6. uzdevuma risinājumos.
8. Laureāti tiek noteikti klašu grupā līdz 7. klasei (ieskaitot) un 8.-9. klašu grupā.
9. Katra uzdevuma risinājums tiek vērtēts ar 0-10 punktiem.
10. Ja no vienas skolas vai klases tiek saņemti vairāki gandrīz vienādi darbi, darbu labotājiem ir tiesības tos apvienot vienā komandas darbā vai arī vienādos risinājumus nevērtēt, tas ir, ielikt 0 punktus.
11. Konkursā var piedalīties gan individuāli risinātāji, gan komandas. Katrs skolēns drīkst piedalīties vai nu tikai individuāli, vai komandā.
12. Komandā nedrīkst būt vairāk kā 5 dalībnieki. Vienā komandā drīkst būt vai nu skolēni līdz 7. klasei (ieskaitot), vai arī 8.-9. klašu skolēni. Komanda sev izvēlas nosaukumu, kuru mācību gada laikā nemaina.
13. Katram uzdevumam drīkst iesūtīt ne vairāk kā vienu risinājuma variantu.
14. Lai par risinājumu saņemtu maksimālo punktu skaitu, jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī pilns uzdevuma risinājums.
15. Darbā pirmajā lappusē jānorāda
    1. individuāliem risinātājiem: savs vārds, uzvārds, skola, klase, matemātikas skolotājs (skolotājam norādiet gan vārdu, gan uzvārdu), telefons (ieteicams), kā arī konkursa nosaukums un konkursa kārta. (Šiem datiem NAV jāatvēl visa pirmā lappuse.)
    2. komandām: komandas nosaukums, katra dalībnieka vārds, uzvārds, skola, klase, matemātikas skolotājs (skolotājam norādiet gan vārdu, gan uzvārdu) un viens komandas kontakttelefons. (Šiem datiem NAV jāatvēl visa pirmā lappuse.)
16. Darbus jāiesniedz elektroniski sadaļā Darbu iesniegšana līdz norādītā termiņa beigām (pēc termiņa darbu iesniegšanas forma vairs nebūs pieejama).
17. Laureāti tiek noteikti gan katrā kārtā atsevišķi, gan kopvērtējumā pēc visās kārtās iegūto punktu kopsummas.
18. Kopvērtējuma laureāti maija beigās tiek aicināti uz Apbalvošanas pasākumu Rīgā.

Teorijas materiāls 2. uzdevumam

Skaitļu dalāmība

Skaitļu teorija ir matemātikas apakšnozare, kas pēta veselo skaitļu dalāmību.

Ja a un b ir veseli skaitļi, tad ne vienmēr, dalot a ar b, dalījumā iegūst veselu skaitli. Ja dalījums ir vesels skaitlis, tad saka, ka a dalās ar b, pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Definīcija. Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur a, b, k – veseli skaitļi, tad saka, ka a dalās ar b. Pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.

Iegaumē! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par veseliem skaitļiem.

Dalāmības pazīmes

Noskaidrot, vai viens vesels skaitlis dalās ar otru, tikai ar definīcijas palīdzību, tas ir, izdalot skaitļus, bieži vien ir neparocīgi un laikietilpīgi. Šo uzdevumu atvieglo skaitļu dalāmības pazīmes. Tālāk dotas biežāk lietotās dalāmības pazīmes.

Dalāmības pazīme	**Piemēri**
Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra, tas ir, tā pēdējais cipars ir 0, 2, 4, 6 vai 8.	201**6** dalās ar 2, jo tā pēdējais cipars ir pāra
Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3.	2016 dalās ar 3, jo $2 + 0 + 1 + 6 = 9$ dalās ar 3
Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4.	20**16** dalās ar 4, jo 16 dalās ar 4
Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.	201**5** dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 5
Skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3.	2016 dalās ar 6, jo tas dalās ar 2 un 3
Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.	12**800** dalās ar 8, jo 800 dalās ar 8 2**016** dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis ir 16, kas dalās ar 8
Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9.	2016 dalās ar 9, jo $2 + 0 + 1 + 6 = 9$ dalās ar 9
Skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0.	15**0** dalās ar 10, jo tā pēdējais cipars ir 0
Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.	$\underline{1}0\underline{8}6\underline{4}7$ dalās ar 11, jo $(1 + 8 + 4) - (0 + 6 + 7) = 0$, kas dalās ar 11 $\underline{9}4\underline{8}3\underline{1}$ dalās ar 11, jo $(9 + 8 + 1) - (4 + 3) = 11$, kas dalās ar 11

Citas dalāmības pazīmes

- Skaitlis dalās ar 10^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 10^n.
- Skaitlis dalās ar 2^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 2^n.
- Skaitlis dalās ar 5^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 5^n.

Kombinējot iepriekš dotās pazīmes, var iegūt arī pazīmes dalāmībai ar citiem skaitļiem. Piemēram, skaitlis dalās ar 12, ja tas dalās ar 3 un 4; skaitlis dalās ar 90, ja tas dalās ar 9 un 10 jeb skaitļa ciparu summa dalās ar 9 un tā pēdējais cipars ir nulle. Šādi pazīmes veido, doto dalītāju sadalot reizinātājos, kas ir savstarpēji pirmskaitļi un pārbaudot dalāmību ar katru no tiem.

Definīcija. Par savstarpējiem pirmskaitļiem sauc skaitļus, kam lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1.

Piemērs. Ja skaitlis dalās ar 2 un 6, mēs nevaram apgalvot, ka tas dalās arī ar $2 \cdot 6 = 12$, piemēram, 18 dalās gan ar 2, gan ar 6, bet 18 nedalās ar 12. Tāpēc ir ļoti svarīgi, lai reizinātāji būtu savstarpēji pirmskaitļi.

Teorēma. Ja b un c ir savstarpēji pirmskaitļi un a dalās ar b un a dalās ar c, tad a dalās ar $b \cdot c$.

Uzdevumu piemēri

1. Vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus. Zināms, ka trīsciparu skaitlis $\overline{ASS}$ dalās ar 5, bet nedalās ar 4. Vai skaitlis $\overline{OLA}$ var dalīties ar 5?

Piezīme. Ar $\overline{abc}$ apzīmē trīsciparu skaitli, kura pirmais cipars ir a, otrais – b, trešais – c.

Atrisinājums. Tā kā skaitlis $\overline{ASS}$ dalās ar 5, tad $S = 0$ vai $S = 5$.

1. Ja $S = 0$, tad iegūstam skaitli $\overline{A00}$, kas dalās ar 4, bet tā ir pretruna ar doto, ka $\overline{ASS}$ nedalās ar 4. Tātad S nevar būt 0.
2. Apskatīsim gadījumu, kad $S = 5$. Lai skaitlis $\overline{OLA}$ dalītos ar 5, tad vai nu $A = 0$, vai $A = 5$. Tā kā dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari, tad A nevar būt 5 un tāpēc $A = 0$. Bet tad skaitlis $\overline{ASS}$ nebūtu trīsciparu skaitlis, jo tā pirmais cipars būtu 0. Tātad S nevar būt arī 5.

Esam ieguvuši, ka skaitlis $\overline{OLA}$ nevar dalīties ar 5.

2. Naturālā vienpadsmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus – ar dažādiem; ieguva pierakstu $PĀRSTEIGUMS$. Zināms, ka šis skaitlis dalās ar 18. Noteikt, kurš cipars aizstāts ar burtu S.

Atrisinājums. Vārdā $PĀRSTEIGUMS$ pavisam ir 11 burti, no tiem pirmie 10 dažādi, tātad pirmie 10 burti apzīmē visus desmit ciparus. Tad

$$P + \bar{A} + R + S + T + E + I + G + U + M + S =$$
$$= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + S = 45 + S$$

Tā kā dotais vienpadsmitciparu skaitlis dalās ar 18, tad tas dalās ar 2 un 9. Tas nozīmē, ka tas ir pāra skaitlis un tā ciparu summa dalās ar 9. Tātad S ir pāra cipars un $45 + S$ dalās ar 9. Tā kā $45 + S$ jādalās ar 9 un skaitlis 45 dalās ar 9, tad arī S jādalās ar 9. Tātad ar burtu S ir aizstāts cipars 0.

Piezīme. Lai noteiktu, kurš cipars aizstāts ar burtu S, izteiksmē $45 + S$ var arī ievietot visas iespējamās S vērtības – 0, 2, 4, 6, 8 – un pārbaudīt katru no šiem gadījumiem.

3. Kādi cipari var būt burtu a un b vietā, lai piecciparu skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36?

Atrisinājums. Lai skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36, tam jādalās gan ar 9, gan ar 4. Lai skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 4, tā pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 4. Tātad pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim jābūt vai nu 32, vai 36, līdz ar to $b = 2$ vai $b = 6$. Lai dotais skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9.

- Ja $b = 2$, tad skaitļa ciparu summa ir $a + 5 + 4 + 3 + 2 = 14 + a$. Der $a = 4$, jo $14 + 4 = 18$, kas dalās ar 9. Tā kā a ir cipars, tad citus skaitļus, kas dalās ar 9, iegūt nevar.
- Ja $b = 6$, tad skaitļa ciparu summa ir $a + 5 + 4 + 3 + 6 = 18 + a$. Vērtība $a = 0$ neder, jo a ir skaitļa pirmais cipars. Der $a = 9$, jo $18 + 9 = 27$, kas dalās ar 9. Tā kā a ir cipars, tad citus skaitļus, kas dalās ar 9, iegūt nevar.

Tātad esam ieguvuši, ka $a = 4, b = 2$ vai $a = 9, b = 6$ ir vienīgās iespējamās vērtības.

4. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33?

Atrisinājums. Mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33, ir 6, piemēram, skaitlim 3300000000.

Pierādīsim, ka ciparu summa nevar būt mazāka kā 6. Lai naturāls skaitlis dalītos ar 33, tam jādalās ar 3 un ar 11. Tā kā skaitlim jādalās ar 3, tad arī tā ciparu summai jādalās ar 3. Tas nozīmē, ka ir jāpierāda, ka ciparu summa nevar būt 3. Apzīmēsim skaitļa ciparu summu nepāra pozīcijās ar a un pāra pozīcijās – ar b, tad, lai skaitlis dalītos ar 11, $a - b$ jādalās ar 11. Pieņemsim, ka $a \geq b$, otru gadījumu aplūko analogi. Iespējami 2 gadījumi:

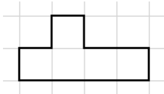
- $a - b = 0$, tad $a = b$ un skaitļa ciparu summa ir $a + b$, kas ir pāra skaitlis, tātad tā nevar būt 3;
- $a - b \geq 11$, tad $a \geq 11$ un skaitļa ciparu summa ir lielāka kā 11, tātad tā nevar būt 3.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī, pārbaudot visus iespējamos gadījumus, kādus ciparus var saturēt desmitciparu skaitlis, kura ciparu summa ir 3: skaitlī ir viens (pirmais) cipars 3 un deviņas nulles; skaitlī ir viens cipars 1, viens cipars 2 un astoņas nulles; skaitlī ir trīs cipari 1 un septiņas nulles.

1. kārtas uzdevumi

1. uzdevums

Parādīt vienu piemēru, kā no desmit figūrām (skat. 1. att.) var salikt taisnstūri. Figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



1. att.

2. uzdevums

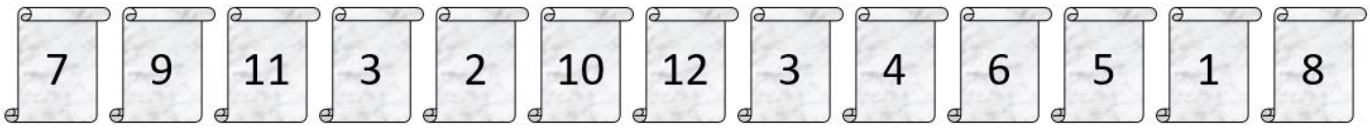
Dots septiņciparu skaitlis $\overline{2023pck}$. Vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus.

a) Kādi cipari var būt burtu p, c un k vietā, lai dotais skaitlis dalītos ar 125,

b) Kādi cipari var būt burtu p, c un k vietā, lai dotais skaitlis dalītos ar 45, ja zināms, ka $p < c < k$?

3. uzdevums

Jaunie matemātikas entuziasti izveidoja slepenu apvienību. Lai kļūtu par apvienības biedru, nepieciešams uzlauzt kodu un uzzināt matemātiķu apvienības nosaukumu. Kodā katrs no 12 skaitļiem apzīmē citu alfabēta burtu.

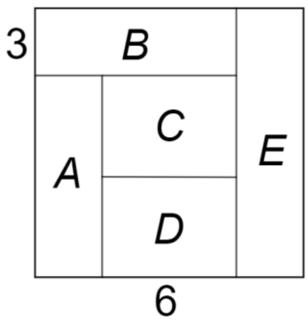


Noteikt matemātiķu apvienības nosaukumu, nosakot burtu vērtības, ja ir dotas vairākas norādes:

1) $A + B + G = A \cdot B \cdot G = 6,$
2) $A \cdot I \cdot L = 162,$
3) $A + I + K + L = 22,$
4) $O \cdot R = 120,$
5) $B \cdot P = 7,$
6) $K + P + T = 22,$
7) $L \cdot O = 60,$
8) $S \cdot S - U \cdot U = 39.$

4. uzdevums

Kvadrāts (skat. 2. att.) ir sadalīts piecos taisnstūros *A*, *B*, *C*, *D* un *E*. Zināms, ka taisnstūru *A*, *B*, *C* un *D* laukumi ir vienādi un ka taisnstūra *B* viena mala ir 3 garuma vienības, bet taisnstūra *D* viena mala ir 6 garuma vienības. Kāds var būt kvadrāta laukums?

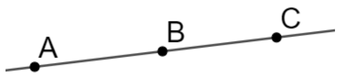


2. att.

5. uzdevums

Skolas pagalmā uz asfalta ar krītu ir uzzīmēti 10 punkti, kuri ne visi atrodas uz vienas taisnes. Ansis katrus divus punktus savienoja ar taisni. Pēc tam viņš centās atrast tādu punktu, caur kuru iet vismaz četras dažādas taisnes. Pierādīt, ka tādu punktu vienmēr var atrast, lai kur tie būtu uzzīmēti.

Piezīme. Ja punkti *A, B* un *C* atrodas uz vienas taisnes (skat. 3. att.), tad taisnes *AB, AC* un *BC* ir viena un tā pati taisne.



3. att.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Dots kāds naturāls skaitlis n, kuram ir iespējams pārkārtot ciparus tā, lai iegūtu skaitli, kas ir trīs reizes lielāks nekā n. Pamatot, ka n dalās ar 9.

7. uzdevums

Vairākos grozos kopā atrodas 2022 rieksti. Šos riekstus atļauts ēst un tukšos grozus izmest, bet nav atļauts no viena groza riekstus pārcelt uz citu grozu. Pamatot, ka var panākt, lai visos netukšajos grozos būtu vienāds skaits riekstu un pavisam paliktu vismaz 100 rieksti.