Profesora Cipariņa klubs
2022./2023. mācību gads
2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

Dotas 16 kartītes, uz katras kartītes uzrakstīts viens skaitlis no 1 līdz 16 (skaitļi neatkārtojas). Dažas kartītes jau ir pareizi novietotas (skat. 1. att.). Saliec atlikušās kartītes uz pelēkajiem kvadrātiem tā, lai iegūtās vienādības būtu patiesas!

	·	8	+		+		= 37
+		·		−		+	
12	:	6	+	11	+		= 23
:		−		+		+	
2	·		+	5	+	7	= 44
−		−		+		−	
	+		+		+		= 29
=		=		=		=	
4		23		22		27	

1. att.

Atrisinājums. Kartīšu izvietojumu skat., piemēram, 2. att.

1	·	8	+	15	+	14	= 37
+		·		−		+	
12	:	6	+	11	+	10	= 23
:		−		+		+	
2	·	16	+	5	+	7	= 44
−		−		+		−	
3	+	9	+	13	+	4	= 29
=		=		=		=	
4		23		22		27	

2. att.

2. uzdevums

Lāčplēsis un Laimdota ciemojas pie Profesora Cipariņa, kuram ir neparasts galds regulāra sešstūra formā. Profesors Cipariņš katram ir iedevis lielu saišķi ar vienādām monētām un piedāvā spēli ar šādiem noteikumiem. Katrs pamīšus uz galda virsmas liek pa monētai tā, lai tās nepārklātos. Tas, kurš nevar nolikt monētu uz galda, zaudē. Kurš no abiem spēlētājiem – Lāčplēsis vai Laimdota – vienmēr var uzvarēt, ja Lāčplēsis sāk pirmais?

Piezīme. Regulārs sešstūris ir sešstūris, kuram visas malas un visi leņķi ir vienādi.

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt Lāčplēsis. Pirmajā gājienā Lāčplēsim jānovieto monēta tā, lai tā atrastos galda centrā. Lai arī kur Laimdota novietotu savu monētu, Lāčplēsim jānovieto monēta simetriski Laimdotas tikko noliktajai monētai attiecībā pret sešstūra centru. Tā Lāčplēsis turpina rīkoties arī visos savos nākamajos gājienos (tas ir, pēc katra Laimdotas gājiena veic gājienu, kas ir simetrisks pret sešstūra centru).

Ja Laimdota var izdarīt gājienu, tad Lāčplēsis var izdarīt tam simetrisku gājienu. Līdz ar to gājieni pietrūks Laimdotai un Lāčplēsis uzvarēs.

3. uzdevums

Trīs paklāju kopējais laukums ir 90 m^2. Tos ieklāja istabā, kuras grīdas platība ir 60 m^2, noklājot visu istabas grīdu. Zināms, ka tieši divās kārtās paklāji noklāja 12 m^2 no istabas grīdas. Cik lielu grīdas platību noklāja tieši trīs paklāji? (Paklāji netika locīti, līdz ar to ar vairāk par trim paklāju kārtām grīda nekur nav noklāta).

1. atrisinājums. Ieklāsim istabā vienu pilnu paklāju slāni (60 m^2). Mums atliek $90 - 60 = 30$ m^2 paklāju, kas nosedz 12 m^2 vienā kārtā un kaut kādu daudzumu divās kārtās, kas mums jāaprēķina. Tātad šīm divām kārtām ir iztērēts $30 - 12 = 18$ m^2 paklāju, un šīs daļas laukums ir $18 : 2 = 9$ m^2. Tātad trīs paklāji reizē noklāj 9 m^2 grīdas.

2. atrisinājums. Tā kā 12 m^2 grīdas tiek noklāts ar diviem paklājiem reizē, tad kopā tiek izmantoti $12 \cdot 2 = 24$ m^2 paklāja. Tātad pāri paliek $90 - 24 = 66$ m^2 paklāja, kas pārklāj grīdu vienā vai trīs kārtās. Ar 66 m^2 paklāja ir noklāts vēl $60 - 12 = 48$ m^2 liels grīdas laukums. Ja visi 48 m^2 grīdas tiktu noklāti ar vienu paklāju, tad pāri paliktu $66 - 48 = 18$ m^2 paklāja. Tā kā 18 m^2 paklāja tomēr ir noklāti uz grīdas kā otrā un trešā kārta, tad ar trīs paklājiem reizē ir noklāti $18 : 2 = 9$ m^2 grīdas.

4. uzdevums

Guna uz tāfeles uzrakstīja kādu skaitli. Pēc tam atnāca Emīls, sareizināja visus Gunas uzrakstītā skaitļa ciparus, nodzēsa Gunas skaitli un tā vietā uzrakstīja iegūto reizinājumu. Tādā veidā Emīls darbojās, kamēr uz tāfeles bija uzrakstīts viencipara skaitlis.

a) Kāds skaitlis beigās ir uzrakstīts uz tāfeles, ja Guna uzrakstīja skaitli 146782?

b) Vai Guna uz tāfeles var uzrakstīt tādu četrciparu skaitli, kuram visi cipari ir dažādi, lai aprakstītā procesa beigās Emīls iegūtu skaitli 6?

c) Kāds ir lielākais skaitlis, kuram visi cipari dažādi un ko Guna var uzrakstīt uz tāfeles, lai Emīls neiegūtu skaitli 0?

Atrisinājums. a) Beigās uz tāfeles ir uzrakstīts skaitlis 0, jo

$$1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 = 2688,$$
$$2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 = 768,$$
$$7 \cdot 6 \cdot 8 = 336,$$
$$3 \cdot 3 \cdot 6 = 54,$$
$$5 \cdot 4 = 20,$$
$$2 \cdot 0 = 0.$$

b) Jā, piemēram, Guna uz tāfeles var uzrakstīt skaitli 1347, jo

$$1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84,$$
$$8 \cdot 4 = 32,$$
$$3 \cdot 2 = 6.$$

c) Ja sākumā Gunas uzrakstītais skaitlis satur ciparu 0, tad beigās uz tāfeles uzrakstītais skaitlis ir 0. Tātad sākumā uzrakstītais skaitlis nesaturēs ciparu 0.

Ja sākumā Gunas uzrakstītais skaitlis satur ciparu 5 un kaut vienu pāra ciparu, tad beigās uzrakstītais skaitlis ir 0. Tātad, ja beigās Emīla uzrakstītais skaitlis nav 0 un sākumā Gunas uzrakstītais skaitlis satur ciparu 5, tad tajā nav vairāk par 5 cipariem (1, 3, 5, 7, 9). Apskatīsim, vai varam iegūt skaitli ar lielāku ciparu skaitu, kuram visi cipari ir dažādi un kas nesatur ne ciparu 0, ne ciparu 5.

Apskatām skaitļus ar 8 cipariem (tādus, kas nesatur ciparu 0 un 5). Šo skaitļu ciparu reizinājums ir $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 72576$, tālāk iegūstam reizinājumu $7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 = 2940$. Tātad beigās uz tāfeles uzrakstītais skaitlis būtu 0, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

Apskatām septiņciparu skaitļus atbilstoši nosacījumiem. Lai iegūtu pēc iespējas lielāku skaitli, izmantosim visus ciparus, izņemot 2, jo no cipara 1 izņemšanas reizinājums nemainīsies. Tādā gadījumā skaitļa ciparu reizinājums ir $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 36288$, bet tā ciparu reizinājums ir $3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 = 2304$, tātad beigās uz tāfeles uzrakstītais skaitlis būtu 0, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

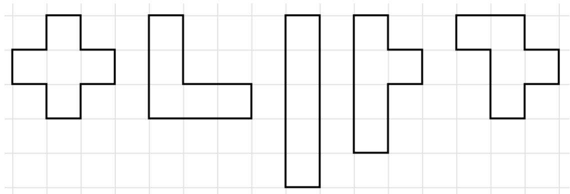
Apskatām septiņciparu skaitļus atbilstoši nosacījumiem, kuru pierakstā netiek izmantots cipars 3, lai iegūtu pēc iespējas lielāku skaitli. Ja Guna uz tāfeles uzraksta tādu skaitli, tad beigās Emīls uz tāfeles būs uzrakstījis skaitli 6, jo

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 24192,$$
$$2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 = 144,$$
$$1 \cdot 4 \cdot 4 = 16,$$
$$1 \cdot 6 = 6.$$

Tātad Emīls neiegūst skaitli 0 un lielākais iespējamais skaitlis, ko Guna sākumā var uzrakstīt uz tāfeles, ir 9876421.

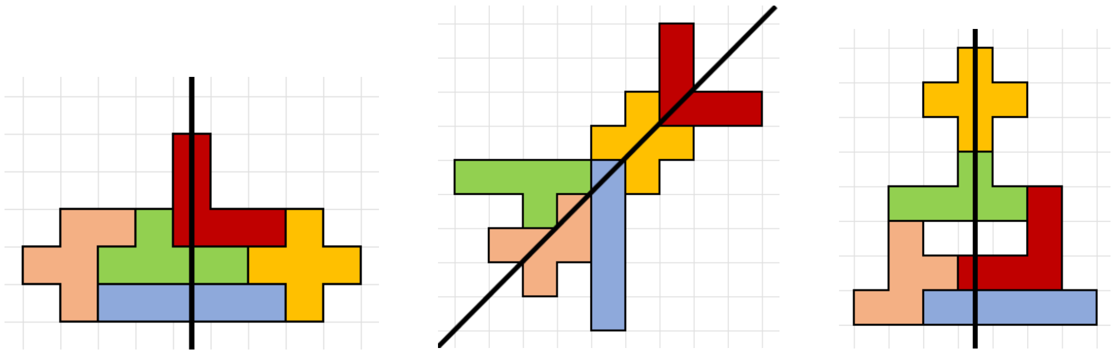
5. uzdevums

Dots komplekts ar pieciem pentamino (skat. 3. att.). No šiem pentamino var salikt simetriskas figūras (figūrai var būt caurumi). Uzzīmē divas simetriskas figūras, kuras var salikt no visiem dotajiem pentamino!



3. att.

Atrisinājums. Piemēram, skat. 4. att., kurā redzamās figūras ir simetriskas pret melno taisni. Vairāk figūru var iegūt, pārvietojot kādu pentamino kādā no figūrām.



4. att.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2022. Undīne un Hugo pamīšus dzēš no tāfeles pa skaitlim. Spēle beidzas, kad uz tāfeles uzrakstīti tikai divi skaitļi. Spēlētājs, kas sāka pirmais, uzvar tajā gadījumā, ja abus skaitļu summa dalās ar 3. Pretējā gadījumā uzvar otrs spēlētājs. Kurš no abiem spēlētājiem – Hugo vai Undīne – vienmēr var uzvarēt, ja Hugo sāk pirmais?

Atrisinājums. Pamatosim, ka Undīne vienmēr var uzvarēt. Tā kā uz tāfeles ir uzrakstīti 2022 skaitļi, tad tos varam sadalīt pāros $(n, 2023 - n)$, kur n pieņem naturālās vērtības no 1 līdz 1011. Varam ievērot, ka abu skaitļu summa vienmēr būs $n + (2023 - n) = 2023$. Lai kādu skaitli x Hugo nodzēstu, Undīne varēs nodzēst skaitli $2023 - x$. Šādi rīkojas, līdz paliek pāri divi skaitļi, kuru summa būs 2023, kas nedalās ar 3.

7. uzdevums

Koknesis uz spēļu vakaru izlēmis atnest cienastu – mandarīnus. Tirgū viņš nopirka maisu ar 80 mandarīniem. Daži no mandarīniem bija lieli, un daži bija mazi. Kopumā zināms, ka jebkuru divu mandarīnu masa neatšķiras vairāk kā 3 reizes. Koknesis ir nodomājis sadalīt šos 80 mandarīnus 20 viesiem, katram iedodot 4 mandarīnus tā, lai sadalījums būtu pēc iespējas godīgāks un visiem tiktu līdzīgs cienasts (pēc masas). Ilgi domājis, kā to izdarīt, viņš paprasīja padomu Profesoram Cipariņam. Profesors apgalvoja, ka šos mandarīnus var sadalīt grupās pa 4 tā, lai jebkuru divu mandarīnu grupu masa neatšķiras vairāk kā 1,5 reizes. Pamatot, ka to var izdarīt.

Atrisinājums. Vispirms sakārtosim mandarīnus augošā secībā pēc to masas. Tad visvieglāko mandarīnu saliksim vienā pārī ar vissmagāko mandarīnu, pēc tam nākamo vieglāko mandarīnu ar nākamo smagāko mandarīnu. Šādi turpinot varam izveidot 40 pārus.

Pamatosim, ka neviens pāris nav vairāk kā divas reizes smagāks par jebkuru citu pāri. Ja apskatām jebkurus četrus sakārtotus mandarīnus, $a \leq b \leq c \leq d$, tad, saliekot pārī vieglāko ar smagāko, tas ir, a ar d, iegūstam

$$a + d \leq a + 3a = 4a = 2a + 2a \leq 2b + 2c = 2(b + c).$$

Līdzīgi, ja saliek pārī nākamo vieglāko un smagāko mandarīnu, tas ir, b un c, iegūstam

$$b + c \leq 3a + d = 2a + a + d \leq 2a + 2d = 2(a + d).$$

Tagad šos 40 pārus varam sakārtot augošā secībā un atkal pielietot stratēģiju, ka smagāko pāri saliek vienā grupā ar vieglāko pāri, iegūstot grupu ar 4 mandarīniem. Tādējādi iegūsim prasīto īpašību, ka neviena grupa ar 4 mandarīniem nav smagāka vairāk kā $\frac{3}{2}$ reizes par jebkuru citu grupu. Pierādīsim to, izmantojot tikko pamatoto īpašību, ka neviens pāris nav vairāk kā divas reizes smagāks par jebkuru citu pāri. Ja, piemēram, $e \leq f \leq g \leq h$ ir mandarīnu pāri un mēs saliekam vienā grupā e ar h un f ar g pēc aprakstītās stratēģijas, tad noteikti $h \leq 2e$ un $f \leq 2e$. No šī tad varam spriest, ka

$$e + h \leq e + 2e \leq 3e \leq \frac{3}{2}(e + e) \leq \frac{3}{2}(f + g).$$

Līdzīgi arī iegūstam, ka

$$f + g \leq 2e + g \leq 2e + h \leq \frac{3}{2}e + \left(\frac{1}{2}e + \frac{2}{2}h\right) \leq \frac{3}{2}(e + h).$$

Tātad secinām, ka ar aprakstīto mandarīnu sadalīšanas stratēģiju ir pamatots Profesora Cipariņa minējums, ka mandarīnus var sadalīt grupās pa 4 tā, lai neviena grupa nebūtu vairāk kā $\frac{3}{2}$ reizes smagāka par jebkuru citu grupu.