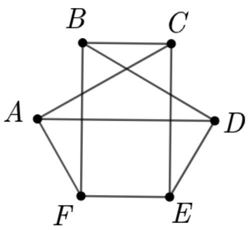
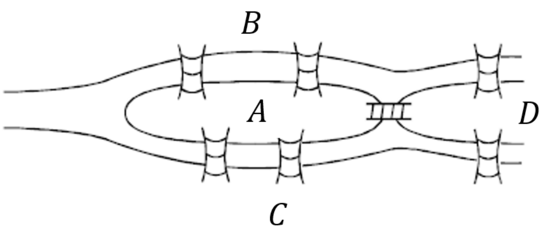
Teorijas materiāls 2. un 6. uzdevumam
Grafi

Grafs ir galīgs kopums **virsotņu** un **šķautņu**. Virsotnes parasti iztēlojamies kā punktus, bet šķautnes kā nogriežņus, kas savieno šos punktus. Piemēram, ja ir dots, ka ir seši cilvēki un katrs no tiem draudzējas ar 3 citiem cilvēkiem, tad cilvēkus varam apzīmēt ar punktiem A, B, C, D, E un F un savstarpējo draudzēšanos ar nogriežņiem, izveidojot grafu (piemēram, skat. 1. att.). Grafā redzams, ka no katra punkta iziet trīs nogriežņi, jo katrs draudzējas ar 3 citiem cilvēkiem.

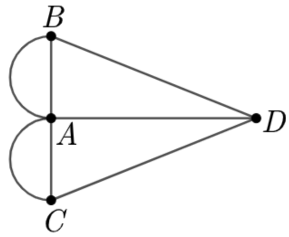


1. att.

Matemātiķis Leonards Eilers (1707-1783) 18. gadsimtā gribēja atrisināt uzdevumu par Kēnigsbergas tiltiem. *Vai, staigājot pa Kēnigsbergas tiltiem (skat. 2. att.), iespējams katru tiltu šķērsot tikai vienu reizi un atgriezties pastaigas sākumpunktā?*



2. att.



3. att.

Tiltu novietojumam Eilers izveidoja grafu (skat. 3. att.), kurā ar nogriežņiem attēloti tilti, bet ar punktiem apzīmētas pilsētas daļas, kuras savieno tilti. Aplūkosim, kāpēc uzdevuma nosacījumus nevar izpildīt. Lai nonāktu līdz punktam un no tā aizietu, no katra punkta jābūt novilktiem pāra skaitam nogriežņu, tomēr no punktiem B, C un D ir novilkti trīs nogriežņi, tātad visus tiltus šķērsot nav iespējams.
Ja kāds vēlētos šķērsot visus tiltus tā, lai pastaigas sākums un beigas ir cita pilsētas vieta, tad tieši no diviem punktiem jāiziet nepāra skaitam nogriežņu – vienā no tiem pastaigu sāk un otrā – beidz, tomēr arī tas nav iespējams.
Par godu matemātiķim Eileram tika ieviesti šādi jēdzieni. Maršrutu, kas iziet cauri katrai šķautnei tieši vienu reizi, sauc par **Eilera ceļu**. Ja gadījumā Eilera ceļa sākuma un beigu virsotne sakrīt, tad to sauc par **Eilera ciklu**.
Eilers pierādīja šādu faktu: *grafs satur Eilera ceļu tad un tikai tad, ja no visām virsotnēm iziet pāra skaits šķautņu vai arī no tieši divām virsotnēm iziet nepāra skaits šķautņu.*
Citiem vārdiem:

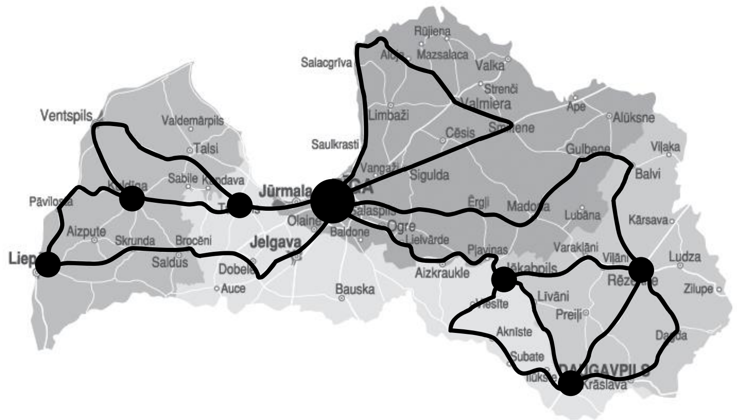
- lai izveidotu maršrutu, kas iziet cauri katrai grafa šķautnei (nogrieznim) vienu reizi un atgrieztos sākumpunktā, šķautņu (nogriežņu) skaitam no katras virsotnes (punkta) jābūt pāra skaitlim;
- lai izveidotu maršrutu, kas iziet cauri katrai grafa šķautnei (nogrieznim) vienu reizi un tā sākums un beigas atšķiras, tieši no divām virsotnēm (punktiem) jāiziet nepāra skaitam šķautņu (nogriežņu) un pārējo šķautņu (nogriežņu) skaitam no katras virsotnes (punkta) jābūt pāra skaitlim.

Uzdevumu piemēri

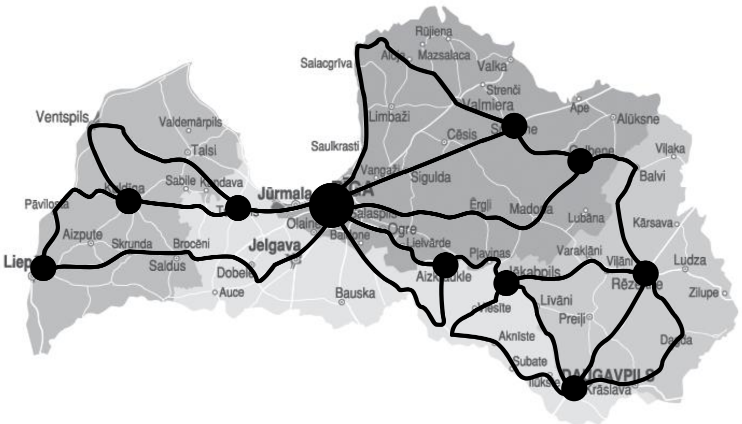
1. Kristaps strādā ceļu būves uzņēmumā un viņam jāapseko vairāki ceļi. Vai Kristaps var apsekot

- **a)** 4. att. ar melno līniju izceltos ceļus;
- **b)** 5. att. ar melno līniju izceltos ceļus

tā, lai viņš pārvietotos tikai pa izceltajiem ceļiem, turklāt pa katru tieši vienu reizi?

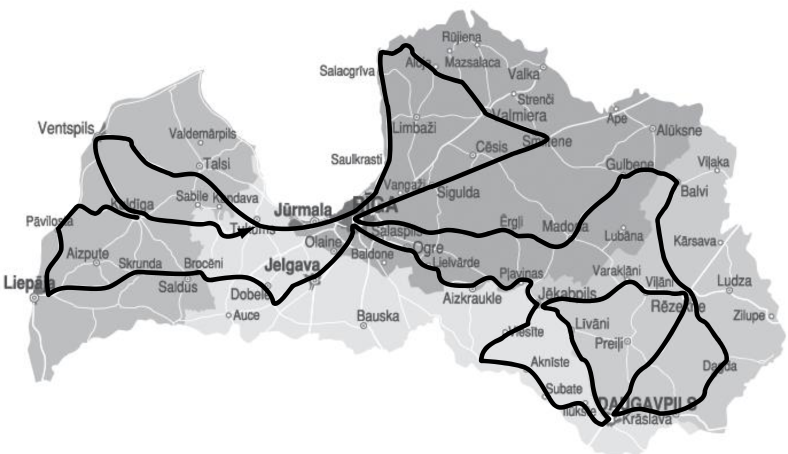


4. att.



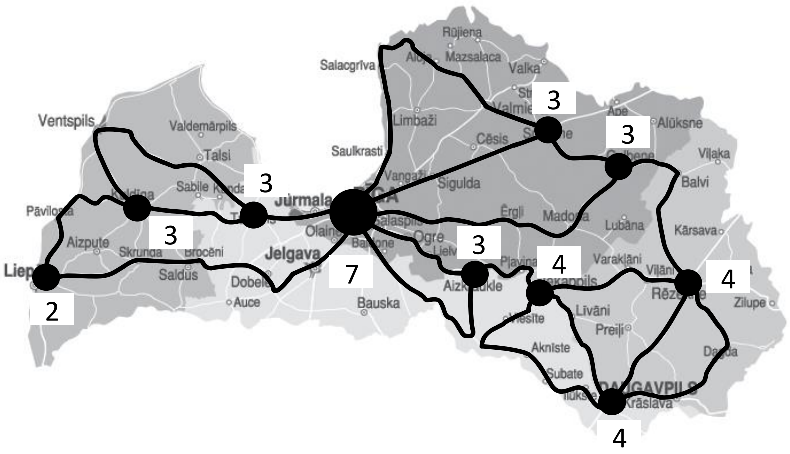
5. att.

Atrisinājums. a) Jā, skat., piemēram, 6. att., kurā maršruts sākts Kuldīgā, bet beigts – Tukumā.



6. att.

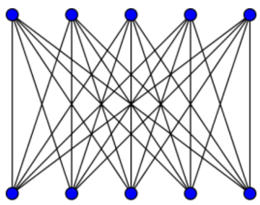
b) Nē, nevar. Lai to varētu panākt, pilsētas, no kurām iziet nepāra skaits ceļu, nedrīkst būt vairāk kā divas. Ja ir tieši divas pilsētas, no kurām iziet nepāra skaits ceļu, tad vienā no tām mēs varētu maršrutu sākt, bet otrā – beigt, no pārējām pilsētām jāiziet pāra skaitam ceļu, jo, iebraucot pilsētā, mums no tās ir arī jāizbrauc. Dotajā kartē ir vairāk nekā divas pilsētas, no kurām iziet nepāra skaits ceļu (skat. 7. att.), tātad prasītais nav iespējams.



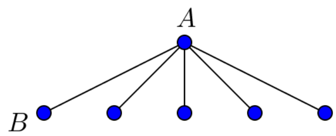
7. att.

2. Tirgū satikās dažas vecmāmiņas. Zināms, ka katra no vecmāmiņām pazīst tieši piecas citas no šīm vecmāmiņām (visas pazīšanās ir abpusējas). Starp jebkurām trīs no šīm vecmāmiņām ir vismaz divas, kas savā starpā nav pazīstamas. Kāds ir mazākais skaits vecmāmiņu, kas varēja satikties tirgū?

Atrisinājums. Mazākais iespējamais vecmāmiņu skaits ir desmit, skat. 8. att., kurā ar punktiem apzīmētas vecmāmiņas, un divi punkti ir savienoti ar nogriezni tad un tikai tad, ja tiem atbilstošās vecmāmiņas viena otru pazīst. Dotajā piemērā vecmāmiņas sadalītas divās grupās pa piecām vecmāmiņām tā, ka katra pirmās grupas vecmāmiņa pazīst visas otrās grupas vecmāmiņas, bet nepazīst nevienu savas grupas vecmāmiņu. Tā kā starp jebkurām trīs vecmāmiņām vismaz divas atrodas vienā grupā, tad tās savā starpā nav pazīstamas un uzdevuma nosacījumi izpildās.



8. att.



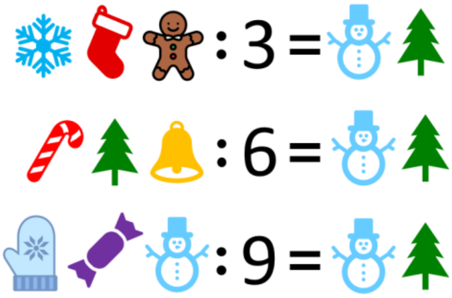
9. att.

Pierādīsim, ka mazāks skaits vecmāmiņu tirgū satikties nevarēja. Apskatām vecmāmiņu A (skat. 9. att.). Uzdevumā dots, ka šī vecmāmiņa pazīst tieši 5 citas vecmāmiņas. Apskatām vecmāmiņu B (skat. 9. att.). Tā kā starp jebkurām trīs vecmāmiņām ir vismaz divas, kas savā starpā nav pazīstamas, tad vecmāmiņa B nevar būt pazīstama ne ar vienu citu vecmāmiņu, ko pazīst A, bet tādā gadījumā nepieciešanas vēl vismaz 4 citas vecmāmiņas, tas ir, kopā ir vismaz 10 vecmāmiņas.

Profesora Cipariņa klubs
2022./2023. mācību gads
3. kārtas uzdevumi

1. uzdevums

Atrodi vienu piemēru, ar kādu simbolu aizstāts katrs cipars, lai 10. att. dotās vienādības būtu patiesas, ja vienādi simboli apzīmē vienādus ciparus, bet dažādi simboli – dažādus ciparus!



10. att.

2. uzdevums

Kādā dīvainā valstī pilsētu nosaukumi ir naturāli skaitļi. Divas pilsētas drīkst savienot ar ceļu, ja to nosaukuma skaitļu starpība ir nepāra skaitlis. Zināms, ka katra pilsēta ir savienota ar vismaz vienu citu pilsētu.

a) Kādā novadā ir sešas pilsētas, kuru nosaukumi ir 2; 3; 4; 5; 6 un 7. Parādi, kā ar ceļiem savienot šīs pilsētas tā, lai no vismaz vienas pilsētas izietu vismaz 3 ceļi?

b) Kāds ir lielākais skaits ceļu, kas var savienot a) gadījumā dotās sešas pilsētas?

c) Vai noteikti ir iespējams ar ceļiem savienot 5 pilsētas, kuru nosaukumi ir pieci pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, tā, lai no vismaz vienas pilsētas izietu vismaz 3 ceļi?

3. uzdevums

Alvīnei ir slēdzene ar trīs ciparu kodu, kuram visi cipari ir dažādi. Ja koda otrā un trešā cipara dalījumu reizina pašu ar sevi, tad tiek iegūts koda pirmais cipars. Kāds var būt slēdzenes kods?

4. uzdevums

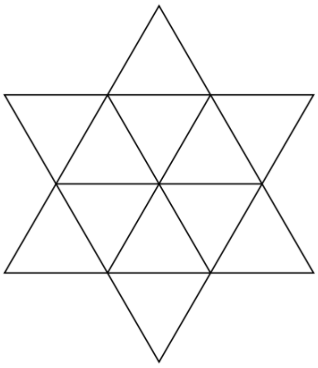
Ap milzīgu apaļu galdu sēž daudz rūķu. Ziemassvētku vecītis izvēlas vienu no rūķiem un, sākot ar to, sāk skaitīt rūķus pēc kārtas pulksteņa rādītāju kustības virzienā: pirmais, otrais, trešais un tā tālāk. Tad pēkšņi telpā ieskrien Sniegbaltīte un arī sāk skaitīt rūķus pēc kārtas: pirmais, otrais, trešais un tā tālāk, bet sākot ar citu rūķi un pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam.

a) Vai noteikti ir tāds rūķis, kuru gan Ziemassvētku vecītis, gan Sniegbaltīte uzskaitīja ar vienu un to pašu skaitli, ja ap galdu sēž 16 rūķi?

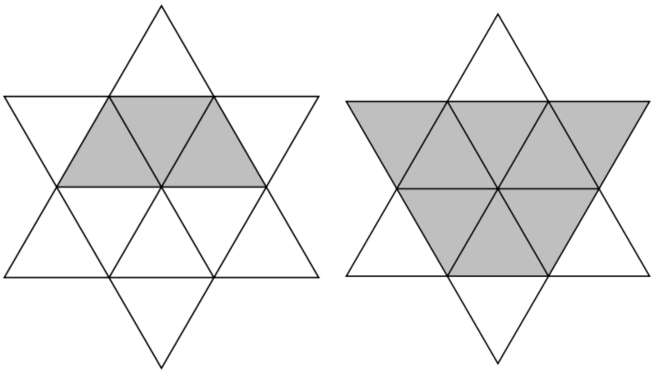
b) Vai noteikti ir tāds rūķis, kuru gan Ziemassvētku vecītis, gan Sniegbaltīte uzskaitīja ar vienu un to pašu skaitli, ja ap galdu sēž 2023 rūķi?

5. uzdevums

No 12 vienādiem trijstūriem, kuru malu garumi ir vienādi, ir izveidota 11. att. redzamā zvaigzne. Iekrāsojot vienu vai vairākus trijstūrus, var iegūt dažādas figūras, piemēram, 12. att. redzami divi dažāda izmēra četrstūri.



11. att.



12. att.

a) Cik dažāda izmēra trijstūrus, kuru malu garumi ir vienādi, var iegūt, ja iekrāso vienu vai vairākus trijstūrus? Parādi visus iespējamos gadījumus!

b) Cik dažāda izmēra četrstūrus, kuru malu garumi ir vienādi, var iegūt, ja iekrāso vienu vai vairākus trijstūrus? Parādi visus iespējamos gadījumus!

c) Parādi, kā iegūt četrus dažādus piecstūrus!

Piezīme. Ja nepieciešams, tad vari izmantot trijstūra režģa lapu (skat. 6. lpp.) zīmējumu veidošanai.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Rūķīšu ciemā ir 2022 mājas. Lai rūķi varētu apciemot viens otru, starp mājām nepieciešams izbūvēt ceļus, tādēļ tika noalgotas divas kompānijas – Zaļā kompānija un Zilā kompānija. Zināms, ka starp jebkurām divām mājām ir kāds ceļš, kuru uzbūvējusi vai nu Zaļā kompānija, vai Zilā kompānija, bet ne abas. Pamatot, ka noteikti viena no abām kompānijām ceļus ir izbūvējusi tā, lai, nojaucot visus otras kompānijas izbūvētos ceļus, joprojām pastāv maršruts, kā nokļūt no jebkuras mājas uz jebkuru citu māju.

7. uzdevums

Profesors Cipariņš vēlas izdekorēt kluba telpu ar papīra eglītēm. Lai tās izveidotu, viņš plāno izmantot izgrieztus vienādsānu trīsstūrus, kuru katra perimetrs ir vienāds ar 2022 un kuru visu malu garumi ir pāra skaitļi. Cik dažādus trīsstūrus var izgriezt?