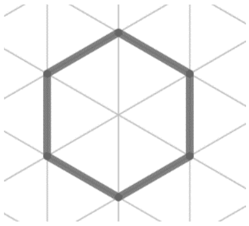
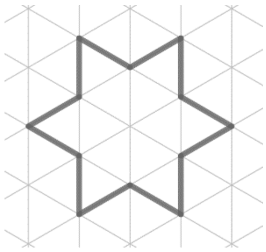
Profesora Cipariņa klubs
2023./2024. mācību gads
3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums
Lapa ar taisnēm ir sadalīta daudz vienādos trijstūros, kuriem visas malas ir 1 vienību garas un katra trijstūra laukums ir 1 laukuma vienība (skat. 5. lpp.). No šīs lapas Kristaps gatavo Ziemassvētku dekorācijas, pa dotajām līnijām izgriežot dažādas figūras. Kristaps veido tikai tādas dekorācijas, kurām gan perimetra, gan laukuma skaitliskā vērtība ir tāda pati kā malu skaits (piemēram, skat. 1. att., kur visi trīs minētie lielumi (perimetrs, laukums, malu skaits) ir vienādi ar 6). Uzzīmē figūru, kurai ir 12 malas un gan perimetra, gan laukuma skaitliskā vērtība ir 12!



1. att.

Atrisinājums. Figūra, kuras perimetra skaitliskā vērtība, laukuma skaitliskā vērtība un malu skaits ir 12, parādīta 2. att.



2. att.

2. uzdevums
Gar kādu rūķu ciemu stiepjas garš žogs. Rūķu bērni uz vairākiem žoga stabiņiem uzrakstīja pa vienam ciparam tā, ka visu ciparu summa ir 2023. Pēc tam visu ciparu veidotajam skaitlim rūķi pieskaitīja skaitli 2023 un ieguva jaunu skaitli. Vai ir iespējams, ka jaunā skaitļa ciparu summa ir 14?
Atrisinājums. Jā, tas ir iespējams. Piemēram, sākumā uzrakstītie cipari varēja veidot 225-ciparu skaitli, kas sākas ar 7 un tam ir 224 devītnieki, tas ir, uzrakstīja skaitli $7\underbrace{999\ldots999}_{224\ \text{"9"}}$. Šī skaitļa ciparu summa ir $7 + 224 \cdot 9 = 2023$. Ja šim skaitlim pieskaita 2023, iegūst 225-ciparu skaitli 80…02022 (skat. 3. att.), un tā ciparu summa ir $8 + 2 + 2 + 2 = 14$.

$$\begin{array}{r} 799\cdots999999 \\ +\qquad\quad 2023 \\ \hline 800\cdots002022 \end{array}$$

3. att.

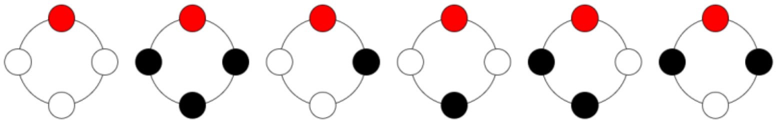
3. uzdevums
Desmit draudzenes veido rokassprādzes, uzverot uz gumijas vienāda izmēra pērlītes, kuras var būt dažādās krāsās. Divas rokassprādzes tiek uzskatītas par vienādām, ja vienu var iegūt no otras, to pagriežot vai apmetot otrādi. Vai noteikti vismaz divām draudzenēm būs vienādas rokassprādzes, ja rokassprādzes veido:

- **a)** no 4 pērlītēm, no kurām viena noteikti ir sarkana, bet pārējās var būt gan melnā, gan baltā krāsā;
- **b)** no 4 pērlītēm, kuras var būt gan melnā, gan baltā krāsā;
- **c)** no 5 pērlītēm, no kurām viena noteikti ir sarkana, bet pārējās var būt gan melnā, gan baltā krāsā;
- **d)** no 5 pērlītēm, kuras var būt gan melnā, gan baltā krāsā?

Atrisinājums. a) Jā, noteikti. Pamatosim, ka iespējams izveidot tikai 6 dažādas rokassprādzes. Tā kā no 4 pērlītēm viena noteikti ir sarkana, tad tikai 3 pērlītes rokassprādzē var būt novietotas dažādi. Apskatām visus iespējamos gadījumus:

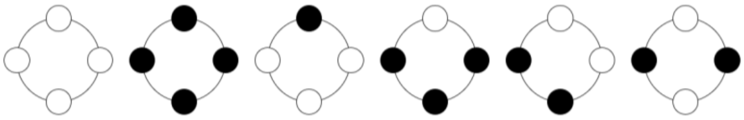
- visas 3 pērlītes var būt vai nu baltas, vai melnas, tātad var iegūt divas dažādas rokassprādzes;
- ja 2 pērlītes ir baltas un viena ir melna, tad melnā pērlīte var būt novietota vai nu blakus sarkanajai, vai starp baltajām pērlītēm, tātad iegūstam 2 dažādas rokassprādzes;
- līdzīgi iegūstam vēl 2 dažādas rokassprādzes, ja ir 2 melnas un 1 balta pērlīte.

Tātad kopā iespējams izveidot $2 + 2 + 2 = 6$ dažādas rokassprādzes (skat. 4. att.). Tā kā ir 10 draudzenes un tikai 6 iespējas izveidot dažādas rokassprādzes, tad pēc Dirihlē principa secinām, ka vismaz divas draudzenes izveidos vienādas rokassprādzes.



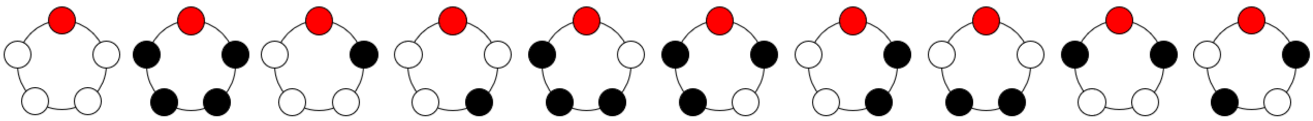
4. att.

b) Jā, noteikti. Pamatosim, ka iespējams izveidot tikai 6 dažādas rokassprādzes. Visas 4 pērlītes var būt vai nu baltas, vai melnas, veidojot 2 dažādas rokassprādzes. Ja 3 pērlītes ir baltas un viena ir melna, tad iespējams izveidot tikai vienu atšķirīgu rokassprādzi, lai kur arī noliktu melno pērlīti. Līdzīgi var iegūt vienu atšķirīgu rokassprādzi, ja 3 pērlītes ir melnas un viena ir balta. Ja 2 pērlītes ir baltas un 2 ir melnas, tad abas melnās pērlītes var novietot blakus vai katru pa vidu divām baltajām pērlītēm, tātad iegūstam 2 dažādas rokassprādzes. Tātad kopā iespējams izveidot $2 + 2 + 2 = 6$ dažādas rokassprādzes (skat. 5. att.). Tā kā ir 10 draudzenes un tikai 6 iespējas izveidot dažādas rokassprādzes, tad pēc Dirihlē principa secinām, ka vismaz divas draudzenes izveidos vienādas rokassprādzes.



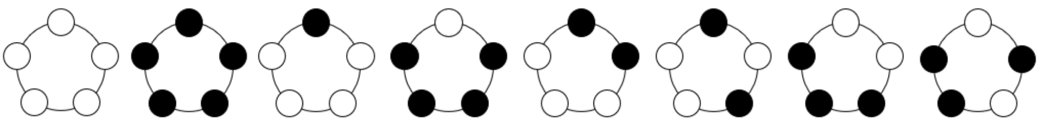
5. att.

c) Nē, ne noteikti. Parādīsim, ka iespējams izveidot 10 dažādas rokassprādzes. Tā kā no 5 pērlītēm viena noteikti ir sarkana, tad tikai 4 pērlītes rokassprādzē var būt novietotas dažādi. Visas 4 pērlītes var būt vai nu baltas, vai melnas, veidojot 2 dažādas rokassprādzes. Ja 3 pērlītes ir baltas un viena ir melna, tad melnā pērlīte var būt novietota vai nu blakus sarkanajai, vai starp divām baltajām pērlītēm, tātad iegūstam 2 dažādas rokassprādzes. Līdzīgi iegūstam vēl 2 dažādas rokassprādzes ar 3 melnām un 1 baltu pērlīti. Ja 2 pērlītes ir baltas un 2 ir melnas, tad abas melnās pērlītes var novietot blakus vienu otrai vai nu blakus sarkanajai pērlītei vai pa vidu baltajām pērlītēm. Ja melnās pērlītes nenovieto blakus vienu otrai, tad katru no tām var novietot no abām pusēm blakus sarkanajai pērlītei, vai arī vienu melno pērlīti blakus sarkanajai un otru var novietot pa vidu baltajām pērlītēm. Tātad kopā iespējams izveidot $2 + 2 + 2 + 4 = 10$ dažādas rokassprādzes (skat. 6. att.). Tā kā ir 10 draudzenes, tad katra no tām var izveidot atšķirīgu rokassprādzi.



6. att.

d) Jā, noteikti. Pamatosim, ka iespējams izveidot tikai 8 dažādas rokassprādzes. Visas 5 pērlītes var būt vai nu baltas, vai melnas, veidojot 2 dažādas rokassprādzes. Ja 4 pērlītes ir baltas un viena ir melna, tad iespējams izveidot tikai vienu atšķirīgu rokassprādzi, lai kur arī noliktu melno pērlīti. Līdzīgi var iegūt vienu atšķirīgu rokassprādzi, ja 4 pērlītes ir melnas un viena ir balta. Ja 3 pērlītes ir baltas un 2 ir melnas, tad abas melnās pērlītes var novietot blakus vai katru pa vidu divām baltajām pērlītēm, tātad iegūstam 2 dažādas rokassprādzes. Līdzīgi vari iegūt vēl 2 dažādas rokassprādzes, ja 3 pērlītes ir melnas un 2 ir baltas. Tātad kopā iespējams izveidot $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ dažādas rokassprādzes (skat. 7. att.). Tā kā ir 10 draudzenes un tikai 8 iespējas izveidot dažādas rokassprādzes, tad pēc Dirihlē principa secinām, ka vismaz divas draudzenes izveidos vienādas rokassprādzes.



7. att.

4. uzdevums

Andrejam ir spēļu kauliņi, kuriem ir taisnstūra forma, un katram kauliņam viena mala ir par 1 cm garāka nekā otra. Zināms, ka kauliņu malu garumi ir 1 cm, 2 cm, 3 cm 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm (katra vērtība ir malas garums tieši diviem kauliņiem). No visiem šiem kauliņiem Andrejs saliek lielu taisnstūri, kura garums ir par 1 cm lielāks nekā platums. Kādi var būt lielā taisnstūra izmēri?

Atrisinājums. Pamatosim, ka izveidot taisnstūri atbilstoši uzdevuma nosacījumiem nav iespējams.

Tā kā ir jāizmanto divi kauliņi ar malas garumu 1 cm (katra dotā vērtība ir malas garums tieši diviem kauliņiem) un katra kauliņa viena mala ir par 1 cm garāka nekā otra, tad divi kauliņi ir ar izmēriem 1 cm $\times$ 2 cm.

Līdzīgi iegūstam, ka jāizmanto divi kauliņi ar izmēriem 3 cm $\times$ 4 cm; 5 cm $\times$ 6 cm un 7 cm $\times$ 8 cm, tad to kopējais laukums ir $2 \cdot (2 + 12 + 30 + 56) = 200$ cm^2. Sadalot 200 pirmreizinātājos $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, ievērojam, ka 200 nevar izteikt kā divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu reizinājumu, tātad nevar iegūt taisnstūri, kura laukums ir 200 cm^2 un kura garums ir par 1 cm lielāks nekā platums.

5. uzdevums

Trīs pirāti atrada vientuļas salas krastā izskalotu kuģi ar zelta monētām. Sākumā viņi visas zelta monētas sadalīja attiecībā $8 : 6 : 5$. Pēc tam pārdomāja un visas monētas sadalīja attiecībā $7 : 5 : 4$, tagad viens pirāts saņem par 25 monētām vairāk nekā pirms tam. Cik zelta monētu saņēma katrs pirāts sākumā?

Atrisinājums. Vispirms aplūkosim, kura pirāta ieguvums palielinās, mainot zelta monētu dalīšanas veidu. Dalot monētas attiecībā $8 : 6 : 5$, tās var sadalīt $8 + 6 + 5 = 19$ vienādās daļās, un katrs pirāts sākumā saņēma $\frac{8}{19}$; $\frac{6}{19}$ un $\frac{5}{19}$ visu monētu. Dalot monētas attiecībā $7 : 5 : 4$, pirāti saņem attiecīgi $\frac{7}{16}$; $\frac{5}{16}$ un $\frac{4}{16}$ jeb $\frac{1}{4}$ visu monētu. Salīdzināsim katra pirāta sākumā saņemto monētu skaitu ar to, cik monētas katrs saņem, mainot zelta monētu dalīšanas veidu.

- Tā kā $\frac{8}{19} = \frac{128}{16 \cdot 19} < \frac{133}{16 \cdot 19} = \frac{7}{16}$, tad, mainot monētu dalīšanas veidu, pirmais pirāts saņem vairāk monētu.
- Tā kā $\frac{6}{19} = \frac{96}{16 \cdot 19} > \frac{95}{16 \cdot 19} = \frac{5}{16}$, tad, mainot monētu dalīšanas veidu, otrais pirāts saņem mazāk monētu.
- Tā kā $\frac{5}{19} = \frac{20}{4 \cdot 19} > \frac{19}{4 \cdot 19} = \frac{1}{4}$, tad, mainot monētu dalīšanas kārtību, trešais pirāts saņem mazāk monētu.

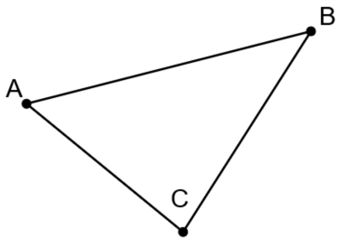
Iegūstam, ka tikai pirmais pirāts saņem vairāk monētu un 25 monētām atbilst $\frac{7}{16} - \frac{8}{19} = \frac{133}{16 \cdot 19} - \frac{128}{16 \cdot 19} = \frac{5}{304}$ visu monētu. Tātad kopā uz kuģa bija $25 : 5 \cdot 304 = 1520$ zelta monētu. Zinot visu monētu skaitu, varam aprēķināt, cik monētu sākumā saņēma katrs pirāts:

- pirmais pirāts saņēma $\frac{8}{19}$ no $1520 = 1520 : 19 \cdot 8 = 640$ zelta monētu;
- otrais pirāts saņēma $\frac{6}{19}$ no $1520 = 1520 : 19 \cdot 6 = 480$ zelta monētu;
- trešais pirāts saņēma $\frac{5}{19}$ no $1520 = 1520 : 19 \cdot 5 = 400$ zelta monētu.

6. uzdevums

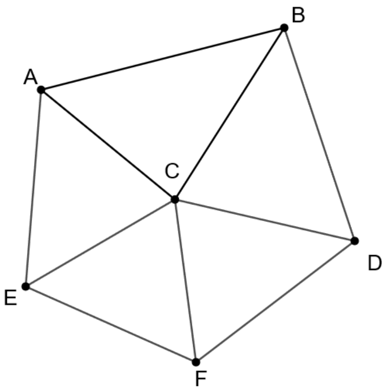
Beidzot ir pienākusi ziema un var atklāt pikošanās sezonu. Valts ar saviem draugiem nostājās kādā laukuma vietā tā, lai attālumi starp jebkuriem diviem draugiem būtu atšķirīgi. Pēc Valta signāla katrs meta ar sniega piku sev tuvākajam draugam. Pēc pāris mēģinājumiem viņiem pievienojās Baiba. Domājot par stratēģiju, kā nostāties laukumā tā, lai pa viņu mestu ar sniega pikām pēc iespējas mazāk cilvēku, viņa nonāca pie secinājuma, ka neatkarīgi no tā, kur viņa nostājas, vairāk kā 5 cilvēki viņai nevar vienlaikus iemest ar sniega piku. Pamatojiet, ka Baibas novērojums (tas ir, lielākais skaits cilvēku, kas var mest pa kādu citu kopīgu cilvēku, ir 5, vienmēr ir patiess!

Atrisinājums. Apskatīsim situāciju, kurā divi draugi A un B abi vienlaikus met pa draugu C. Tā kā viņi abi met pa vienu cilvēku, tad tas nozīmē, ka attālums starp A un B jeb nogrieznis AB ir garāks nekā nogriežņi AC un BC (skat. 8. att.).



8. att.

Tā kā lielākais leņķis atrodas pret garāko malu trīsstūrī, tad varam secināt, ka leņķis $\sphericalangle C$ ir lielākais trijstūra leņķis. Trīsstūra lielākais leņķis nevar būt mazāks kā 60° (jo tad visu leņķu summa būtu mazāka nekā $180°$), bet tā kā visas malas šajā trīsstūrī ir dažāda garuma, tad leņķis $\sphericalangle C$ noteikti ir lielāks nekā 60°. Tātad, ja mēs pievienotu papildu cilvēkus D, F un E, lai tie arī mestu pa C, tad būtu jāņem vērā tie paši spriedumi par lielākajiem leņķiem (skat. 9. att.).



9. att.

Ja pa C mestu vismaz 6 cilvēki, tad būtu nepieciešams vairāk nekā 360°, jo neviens no platajiem leņķiem nevar būt mazāks vai vienāds ar 60°. Tātad lielākais skaits cilvēku, kas var mest pa kādu citu kopīgu cilvēku, ir 5.

7. uzdevums

Dots maiss ar 460 vienādiem kvadrātiņiem ar izmēriem 1×1 un četras bundžas ar Ziemassvētku krāsām – sarkanu, zaļu, baltu un dzeltenu. Vai ir iespējams katru kvadrātiņa malu nokrāsot kādā no krāsām (katram kvadrātiņam malu krāsošanai jāizmanto visas 4 krāsas) tā, lai no visiem kvadrātiņiem varētu izveidot taisnstūri ar izmēriem 20×23, kura katra mala ir savā krāsā un kurā katru divu blakus esošu kvadrātiņu kopīgās malas ir vienādā krāsā?

Atrisinājums. Pamatosim, ka to nevar izdarīt. Pieņemsim pretējo, ka mums ir dots taisnstūris ar izmēriem 20×23, kuram katra mala ir citā krāsā. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka viena no malām ar garumu 23 ir sarkanā krāsā. Aplūkosim, cik kopā ir sarkano malu taisnstūrī, kas sastāv no kvadrātiņiem. No pieņēmuma iegūstam, ka uz taisnstūra perimetra ir 23 sarkanu mazo kvadrātiņu malu. Tomēr taisnstūra iekšienē tam jābūt pāra skaitlim, jo blakus esošo kvadrātiņu kopīgajām malām ir jābūt vienādā krāsā. Tātad kopumā ir nepāra skaits sarkano malu. Iegūstam pretrunu ar to, ka katrs no kvadrātiņiem satur sarkanu malu, jo tie kopumā ir 460, kas ir pāra skaits. Secinām, ka pieņēmums, ka eksistē prasītais taisnstūris, ir aplams.