Teorijas materiāls 2. uzdevumam
Piemērs un pretpiemērs

Matemātikā ir noteikti kritēriji tam, kādi spriedumi ir un kādi spriedumi nav pieļaujami dažādu apgalvojumu pamatošanā. Lielākajai daļai uzdevumu risinājumu ir jāsatur vispārīgs pamatojums (nevis daži piemēri), kas garantē, ka mūsu atrastā atbilde tiešām ir pareiza (skat. Pielikumā). Taču daļa uzdevumu ir tādi, kuros pietiek parādīt tikai vienu piemēru, lai uzdevums būtu pilnībā atrisināts. Tālāk šajā materiālā doti dažādi piemēri, vingrinājumi un uzdevumi, lai trenētos atpazīt šo uzdevumu grupu, kuros pietiek parādīt tikai vienu piemēru.

Tā, piemēram, aplūkojam 1. att., kurā dotas divas sarunas.

Attēli no https://www.freepik.com/

1. att.

Lai gan abas sarunas ir par dzīvniekiem, varam ievērot ļoti būtisku atšķirību. Pirmais jautājums attiecas uz kādu VIENU dzīvnieku. Savukārt otrais jautājums ir par kādu dzīvnieku kopumu – proti, šis jautājums ir par pilnīgi VISIEM kaķiem.

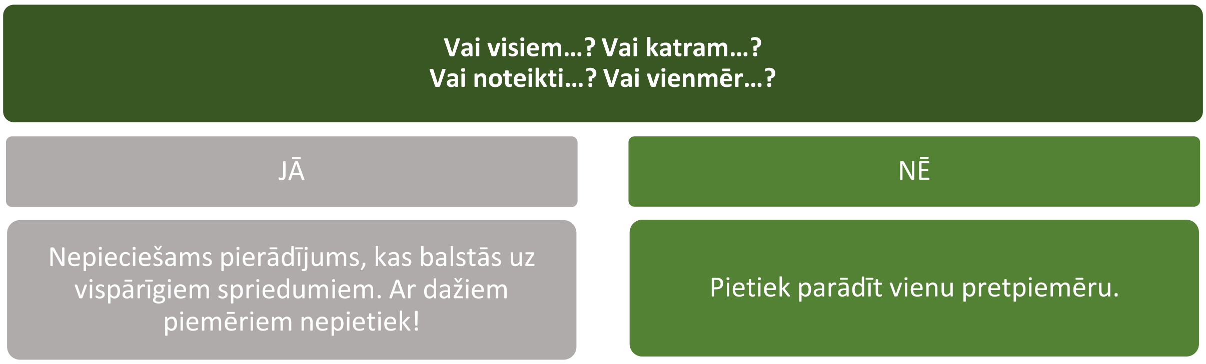
Par to, ar kādiem vārdiem varētu sākties jautājums, kurā kaut kas prasīts par vienu objektu, un kas jāiekļauj šāda uzdevuma atrisinājumā, skat. 2. att.

Vai ir...? Vai eksistē...?
Vai iespējams...? Vai var gadīties...?

JĀ	NĒ
Pietiek parādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības izpildās	Nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem. Ar dažiem piemēriem nepietiek!

2. att.

Par to, ar kādiem vārdiem varētu sākties jautājums, kurā kaut kas prasīts par kādu objektu kopu, un kas jāiekļauj šāda uzdevuma atrisinājumā, skat. 3. att.



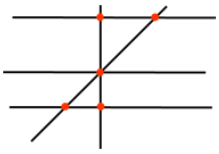
3. att.

Uzdevumu piemēri

1. Vai ir iespējams uzzīmēt piecas taisnes, kurām ir tieši 5 krustpunkti?

   Ievēro! Šajā uzdevumā kaut kas tiek prasīts par vienu gadījumu – par vienu piecu taišņu izkārtojumu. Tātad, ja atbilde ir "jā", tad pietiek parādīt vienu derīgu piemēru. (Ja atbilde būtu "nē", tad gan būtu vajadzīgs vispārīgs pierādījums tam, ka taisnes nekādā veidā nevarēs atbilstoši izkārtot.)

   Atrisinājums. Jā, piemēram, skat. 4. att.



4. att.

2. Vai noteikti deviņciparu skaitlis, kura pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari, dalās ar 3?

   Ievēro! Šajā uzdevumā vārds "noteikti" nozīmē, ka jautājums uzdots par pilnīgi visiem (nevis par kaut kādu vienu vai dažiem) tādiem deviņciparu skaitļiem, kuru pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari. Tas nozīmē, ja uzdevumā minētā īpašība (dalās ar 3) nepiemīt kādam no šiem skaitļiem, tad mēs nevaram apgalvot, ka pilnīgi visiem tādiem skaitļiem tā ir spēkā, proti, ja atbilde ir "nē", tad pietiek parādīt vienu tādu piemēru (pretpiemēru), kuram minētā īpašība (dalās ar 3) neizpildās.

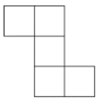
   Atrisinājums. Nē, piemēram, 123456790 nedalās ar 3, jo tā ciparu summa $1+2+3+4+5+6+7+9+0=37$ nedalās ar 3.

3. Vai eksistē tādi divi dažādi trīsciparu naturāli skaitļi A un B, ka trim skaitļiem A, B un $A+B$ ciparu summas ir vienādas?

   Ievēro! Šajā uzdevumā kaut kas tiek prasīts par vienu gadījumu – par to, vai var atrast divus tādus skaitļus, kam izpildās minētās īpašības. Tātad, ja atbilde ir "jā", tad pietiek parādīt vienu piemēru. (Ja atbilde būtu "nē", tad gan būtu nepieciešams vispārīgs pierādījums (nevis daži piemēri), ka šādus divus skaitļus nekādā gadījumā nebūs iespējams atrast.)

   Atrisinājums. Jā, piemēram, var izvēlēties $A=900$ un $B=333$, tad $A+B=900+333=$ $=1233$, un ciparu summa visiem trim skaitļiem 900, 333 un 1233 ir 9.

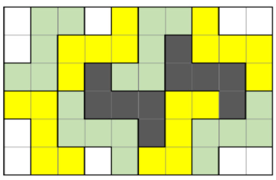
4. Vai no taisnstūra ar izmēriem 6×10 rūtiņas var izgriezt 10 figūras, kādas redzamas 5. att.? Figūras var būt pagrieztas vai apgāztas otrādi.



5. att.

   Ievēro! Šajā uzdevumā kaut kas tiek prasīts par vienu gadījumu – par to, vai pastāv kaut viens piemērs, kā no dotā taisnstūra izgriezt 10 figūras. Tātad, ja atbilde ir, "jā", tad jāparāda šis viens piemērs.

   Atrisinājums. Jā, piemēram, skat. 6. att.



6. att.

5. Jānim kabatā ir 14 centi. Zināms, ka kabatā ir 5 monētas. Vai vienmēr ir iespējams šīs kabatas saturu sadalīt divās kaudzītēs tā, lai katrā kaudzītē būtu pa 7 centiem?

Ievēro! Šajā uzdevumā vārds "vienmēr" nozīmē, ka jautājums uzdots par pilnīgi visiem tādiem gadījumiem, kad kabatā ir 5 monētas, kuru vērtība ir 14 centi. Tātad, ja atbilde ir "nē", tad pietiek parādīt vienu pretpiemēru.

Atrisinājums. Nē, vienmēr nav iespējams sadalīt divās kaudzītēs tā, lai katrā kaudzītē būtu pa 7 centiem, jo var gadīties, ka kabatā ir viena 10 centu monēta un četras viena centa monētas.

6. Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 10. Pirmais no kreisās puses uzrakstītais skaitlis ir mazāks nekā pēdējais uzrakstītais skaitlis. Vai noteikti šajā rindā var atrast tādu skaitli, kam kaimiņš pa kreisi ir mazāks nekā tā kaimiņš pa labi?

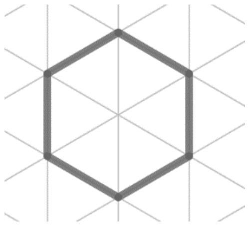
Ievēro! Šajā uzdevumā vārds "noteikti" nozīmē, ka jautājums uzdots par pilnīgi visiem (nevis vienu vai dažiem) tādiem gadījumiem – pirmo desmit naturālo skaitļu izkārtojumiem – kad pirmais uzrakstītais skaitlis ir mazāks nekā pēdējais uzrakstītais skaitlis. Tātad, ja atbilde ir "nē", tad pietiek parādīt vienu pretpiemēru – piemēru, kurā pirmais skaitlis ir mazāks nekā pēdējais, bet visiem pārējiem skaitļiem izpildās, ka kaimiņš pa kreisi ir lielāks nekā kaimiņš pa labi.

Atrisinājums. Nē, ne noteikti. Piemēram, skaitļi var būt uzrakstīti šādi: 5; 10; 4; 9; 3; 8; 2; 7; 1; 6. Redzam, ka katram skaitlim kaimiņš pa kreisi ir lielāks nekā tā kaimiņš pa labi.

Profesora Cipariņa klubs
2023./2024. mācību gads
3. kārtas uzdevumi

1. uzdevums

Lapa ar taisnēm ir sadalīta daudz vienādos trijstūros, kuriem visas malas ir 1 vienību garas un katra trijstūra laukums ir 1 laukuma vienība (skat. 6. lpp.). No šīs lapas Kristaps gatavo Ziemassvētku dekorācijas, pa dotajām līnijām izgriežot dažādas figūras. Kristaps veido tikai tādas dekorācijas, kurām gan perimetra, gan laukuma vērtība ir tāda pati kā malu skaits (piemēram, skat. 7. att., kur visi trīs minētie lielumi (perimetrs, laukums, malu skaits) ir vienādi ar 6). Uzzīmē figūru, kurai ir 12 malas un gan perimetra, gan laukuma vērtība ir 12!



7. att.

Piezīme. Ja nepieciešams, vari izmantot trijstūru režģa lapu (skat. 6. lpp.) zīmējumu veidošanai.

2. uzdevums

Gar kādu rūķu ciemu stiepjas garš žogs. Rūķu bērni uz vairākiem žoga stabiņiem uzrakstīja pa vienam ciparam tā, ka visu ciparu summa ir 2023. Pēc tam visu ciparu veidotajam skaitlim rūķi pieskaitīja skaitli 2023 un ieguva jaunu skaitli. Vai ir iespējams, ka jaunā skaitļa ciparu summa ir 14?

3. uzdevums

Desmit draudzenes veido rokassprādzes, uzverot uz gumijas vienāda izmēra pērlītes, kuras var būt dažādās krāsās. Divas rokassprādzes tiek uzskatītas par vienādām, ja vienu var iegūt no otras, to pagriežot vai apmetot otrādi. Vai noteikti vismaz divām draudzenēm būs vienādas rokassprādzes, ja rokassprādzes veido:

- **a)** no 4 pērlītēm, no kurām viena noteikti ir sarkana, bet pārējās var būt gan melnā, gan baltā krāsā;
- **b)** no 4 pērlītēm, kuras var būt gan melnā, gan baltā krāsā;
- **c)** no 5 pērlītēm, no kurām viena noteikti ir sarkana, bet pārējās var būt gan melnā, gan baltā krāsā;
- **d)** no 5 pērlītēm, kuras var būt gan melnā, gan baltā krāsā?

4. uzdevums

Andrejam ir spēļu kauliņi, kuriem ir taisnstūra forma, un katram kauliņam viena mala ir par 1 cm garāka nekā otra. Zināms, ka kauliņu malu garumi ir 1 cm, 2 cm, 3 cm 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm (katra vērtība ir malas garums tieši diviem kauliņiem). No visiem šiem kauliņiem Andrejs saliek lielu taisnstūri, kura garums ir par 1 cm lielāks nekā platums. Kādi var būt lielā taisnstūra izmēri?

5. uzdevums

Trīs pirāti atrada vientuļas salas krastā izskalotu kuģi ar zelta monētām. Sākumā viņi visas zelta monētas sadalīja attiecībā $8 : 6 : 5$. Pēc tam pārdomāja un visas monētas sadalīja attiecībā $7 : 5 : 4$, tagad viens pirāts saņem par 25 monētām vairāk nekā pirms tam. Cik zelta monētu saņēma katrs pirāts sākumā?

6. uzdevums

Beidzot ir pienākusi ziema un var atklāt pikošanās sezonu. Valts ar saviem draugiem nostājās kādā laukuma vietā tā, lai attālumi starp jebkuriem diviem draugiem būtu atšķirīgi. Pēc Valta signāla katrs meta ar sniega piku sev tuvākajam draugam. Pēc pāris mēģinājumiem viņiem pievienojās Baiba. Domājot par stratēģiju, kā nostāties laukumā tā, lai pa viņu mestu ar sniega pikām pēc iespējas mazāk cilvēku, viņa nonāca pie secinājuma, ka neatkarīgi no tā, kur viņa nostājas, vairāk kā 5 cilvēki viņai nevar vienlaikus iemest ar sniega piku. Pamatojiet, ka Baibas novērojums (tas ir, lielākais skaits cilvēku, kas var mest pa kādu citu kopīgu cilvēku, ir 5) vienmēr ir patiess!

7. uzdevums

Dots maiss ar 460 vienādiem kvadrātiņiem ar izmēriem 1×1 un četras bundžas ar Ziemassvētku krāsām – sarkanu, zaļu, baltu un dzeltenu. Vai ir iespējams katru kvadrātiņa malu nokrāsot kādā no krāsām (katram kvadrātiņam malu krāsošanai jāizmanto visas 4 krāsas) tā, lai no visiem kvadrātiņiem varētu izveidot taisnstūri ar izmēriem 20×23, kura katra mala ir savā krāsā un kurā katru divu blakus esošu kvadrātiņu kopīgās malas ir vienādā krāsā?