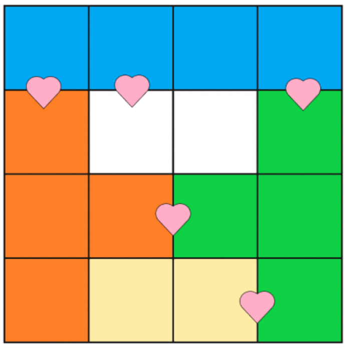
Profesora Cipariņa klubs
2023./2024. mācību gads
4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

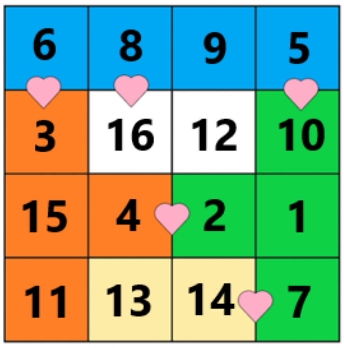
Režģa katrā rūtiņā (skat. 1. att.) ieraksti vienu skaitli no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai izpildītos visi nosacījumi:

- dzelteni iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 27;
- zaļi iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 20;
- oranži iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 33;
- zili iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 28;
- rūtiņās, starp kurām ir sirsniņa, viens no ierakstītajiem skaitļiem ir tieši divas reizes lielāks par otru!



1. att.

Atrisinājums. Skaitļu izvietojumu skat., piemēram, 2. att.

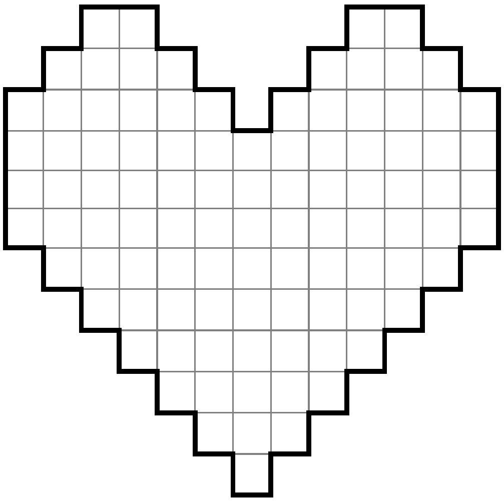


2. att.

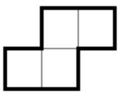
2. uzdevums

Tuvojas mīlestības svētki – Valentīndiena. Kāds ir lielākais skaits 4. att. doto figūru, ko var izgriezt no 3. att. dotās figūras, ja jābūt izgrieztai arī tieši vienai 5. att. figūrai?

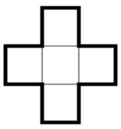
Piezīme. Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu līnijām, 4. att. figūru drīkst pagriezt un apmest otrādi.



3. att.



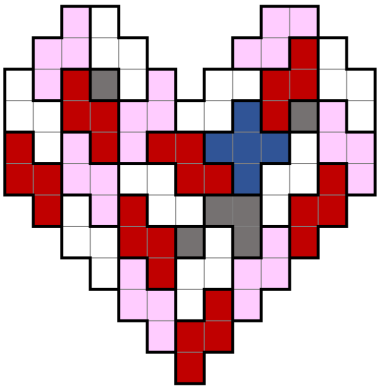
4. att.

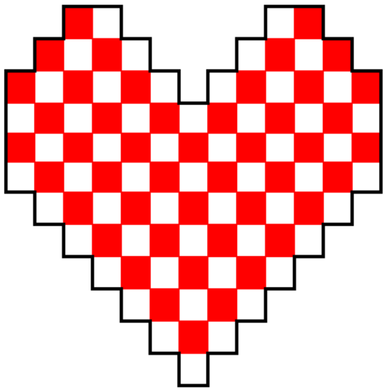


5. att.

Atrisinājums. Lielākais skaits, ko no 3. att. dotās figūras var izgriezt 4. att. figūras, ir 22. Piemērs, kā to var izdarīt, redzams 6. att. Pamatosim, ka vairāk figūru izgriezt nevar.

Iekrāsosim 3. att. figūru šaha galdiņa veidā (skat. 7. att.). Sarkanā krāsā ir nokrāsotas 46 rūtiņas, bet baltā krāsā ir nokrāsotas 53 rūtiņas. Ievērosim, ka, lai kā arī izgrieztu 5. att. figūru, tā vienmēr noklāj vismaz vienu sarkanu rūtiņu (skat. 8. att.), tātad atliek ne vairāk kā 45 sarkanas rūtiņas. Tā kā katra 4. att. figūra vienmēr noklāj tieši divas sarkanas rūtiņas (skat. 8. att.), tad no 3. att. figūras vēl var izgriezt ne vairāk kā 22 šīs figūras, jo $45 : 2 = 22$, atl. 1.


6. att.


7. att.


8. att.

3. uzdevums

Rūķim Valentīnam Mīlīgajam 14. februārī paliek 869 gadi. Viņš uz dzimšanas dienas viesībām uzlūdza tikai tos rūķus, kas viņam atsūtīja tādu piecciparu skaitli $\overline{V869M}$, kas dalās ar rūķa mīļāko skaitli 15. Kādus skaitļus rūķi varēja aizsūtīt Valentīnam Mīlīgajam?

Atrisinājums. Rūķi Valentīnam Mīlīgajam varēja aizsūtīt šādus skaitļus: 18690; 48690; 78690; 28695; 58695 vai 88695. Pamatosim, ka tikai šie seši skaitļi atbilst nosacījumiem. Tā kā skaitļi 3 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad, lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās ar 3 un ar 5. Lai skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam ir jābūt 0 vai 5. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Aplūkojam visas iespējas.

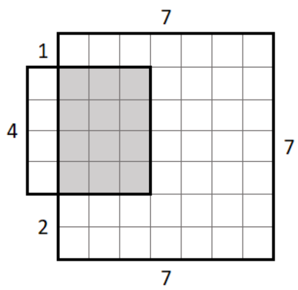
- Ja $M = 0$, tad skaitļa $\overline{V8690}$ ciparu summa ir $V + 8 + 6 + 9 + 0 = V + 23$. Lai $V + 23$ dalītos ar 3, tad V var būt 1; 4 vai 7. Tātad iegūstam trīs skaitļus: 18690; 48690; 78690.
- Ja $M = 5$, tad skaitļa $\overline{V8695}$ ciparu summa ir $V + 8 + 6 + 9 + 5 = V + 28$. Lai $V + 28$ dalītos ar 3, tad V var būt 2; 5 vai 8. Tātad iegūstam trīs skaitļus: 28695; 58695 vai 88695.

4. uzdevums

Jūlija no rūtiņu lapas izgrieza vairākus kvadrātus ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, kur n ir naturāls skaitlis, kas ir lielāks nekā 1. Pēc tam Jūlija nejauši izvēlējās 2 izgrieztos kvadrātus, tos daļēji uzlika vienu otram virsū jeb pārklāja un aprēķināja abu kvadrātu kopīgi veidotās figūras perimetru un pārklātās daļas laukumu. Piemēram, 9. att. kvadrāts ar izmēriem 4×4 rūtiņas pārklāj kvadrātu ar izmēriem 7×7 rūtiņas un iegūtās figūras perimetrs ir

$$P = 7 + 7 + 7 + 2 + 1 + 4 + 1 + 1 = 30,$$

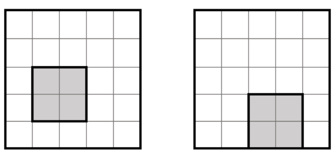
bet pārklātās daļas (iekrāsota pelēka) laukums ir $S = 4 \cdot 3 = 12$.

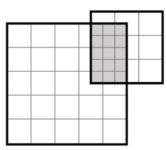


9. att.

Jūlija, kvadrātus pārklājot, ievēroja divus noteikumus:

1) viens kvadrāts nedrīkst pilnībā pārklāt otru kvadrātu (neder 10. att. pārklājumi);
2) kvadrātu malām jāiet pa rūtiņu līnijām (neder 11. att. pārklājums).


10. att.


11. att.

a) Parādi, kā jāpārklāj kvadrāti ar izmēriem 6×6 un 7×7 rūtiņas, lai iegūtās figūras perimetrs būtu 48!

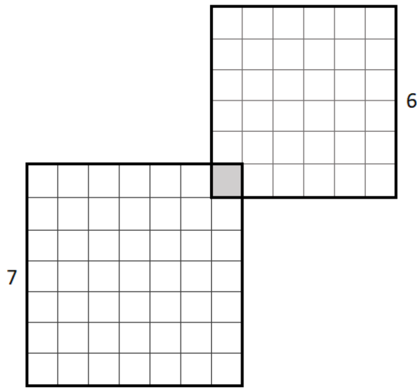
b) Parādi, kā jāpārklāj kvadrāti ar izmēriem 6×6 un 7×7 rūtiņas, lai iegūtās figūras perimetrs būtu 30!

c) Abu kvadrātu pārklātās daļas laukums ir 1, bet visas iegūtās figūras perimetrs ir 32. Kādi var būt abu kvadrātu izmēri?

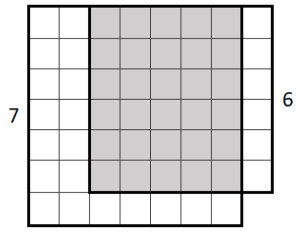
d) Abu kvadrātu pārklātās daļas laukums ir 12, bet visas iegūtās figūras perimetrs ir 30. Kādi var būt abu kvadrātu izmēri?

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 12. att., kurā iegūtās figūras perimetrs ir $P = 7 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 48$.

b) Skat., piemēram, 13. att., kurā iegūtās figūras perimetrs ir $P = 7 \cdot 2 + 8 + 6 + 1 \cdot 2 = 30$.



12. att.

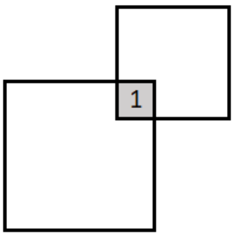


13. att.

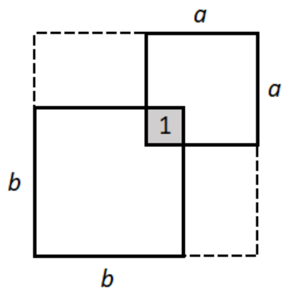
c) 1. atrisinājums. Pamatosim, ka kvadrāti var būt tikai ar izmēriem:

- 2×2 un 7×7 rūtiņas;
- 3×3 un 6×6 rūtiņas;
- 4×4 un 5×5 rūtiņas.

Tā kā pārklātās daļas laukums ir 1, tad pārklātā daļa ir kvadrāts ar izmēriem 1×1 rūtiņa un tā perimetrs ir 4 (skat. 14. att.). Tā kā visas figūras perimetrs ir 32, tad abu kvadrātu perimetru summa ir $32 + 4 = 36$. Kvadrāta perimetrs ir četras reizes lielāks nekā kvadrāta mala. Tā kā abu kvadrātu perimetru summa ir 36, tad to vienas malas garumu summa ir $36 : 4 = 9$. Vienīgie iespējamie kvadrātu malu garumi ir 2 un 7; 3 un 6 vai 4 un 5 (jo pēc dotā kvadrāta malas garums ir lielāks nekā 1).



14. att.



15. att.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka kvadrāti var būt tikai ar izmēriem:

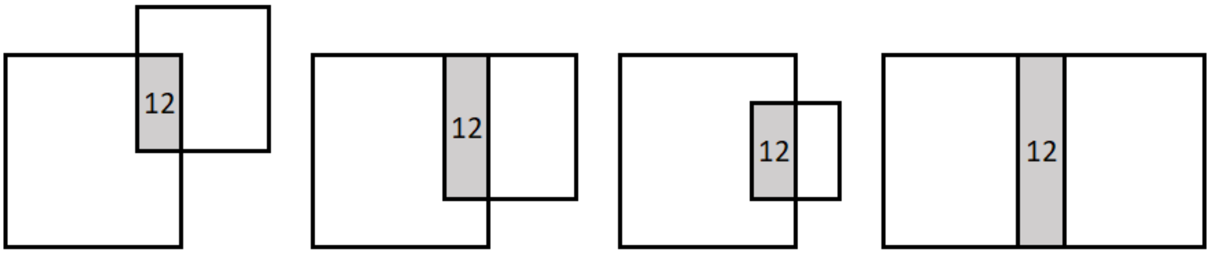
- 2×2 un 7×7 rūtiņas;
- 3×3 un 6×6 rūtiņas;
- 4×4 un 5×5 rūtiņas.

Tā kā pārklātās daļas laukums ir 1, tad pārklātā daļa ir kvadrāts ar izmēriem 1×1 rūtiņa un tā perimetrs ir 4 (skat. 14. att.). Apzīmēsim kvadrātu malu garumus ar a un b. Ievērosim, ka abu kvadrātu perimetru summa sakrīt ar tāda kvadrāta perimetru, kas ierobežo abus kvadrātus (skat. 15. att.). Tātad $4(a + b - 1) = 32$; $a + b - 1 = 8$ jeb $a + b = 9$. Tātad $a = 2$ un $b = 7$; $a = 3$ un $b = 6$ vai $a = 4$ un $b = 5$ (jo pēc dotā kvadrāta malas garums ir lielāks nekā 1).

d) 1. atrisinājums. Pamatosim, ka kvadrāti var būt tikai ar izmēriem:

- 4×4 un 7×7 rūtiņas;
- 5×5 un 6×6 rūtiņas.

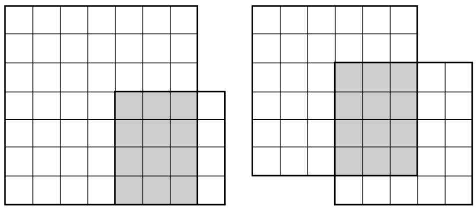
Ievērosim, ka divi kvadrāti var pārklāties tieši četros dažādos veidos (skat. 16. att.). Tā kā pārklātās daļas laukums ir 12, tad pārklātā daļa var būt taisnstūris ar izmēriem 12×1; 6×2 vai 4×3 rūtiņas.



16. att.

Aplūkosim visas trīs iespējas. Izmantosim sakarību, ka iegūtās figūras perimetrs ir vienāds ar abu kvadrātu perimetru summu, no kuras atņem pārklātās daļas perimetru.

- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 12×1 rūtiņa, tad katra kvadrāta malas garums ir vismaz 12. Tādā gadījumā iegūtās figūras perimetrs ir vismaz $8 \cdot 12 - 2 \cdot (12 + 1) = 96 - 26 = 70$. Tā kā ir dots, ka iegūtās figūras perimetrs ir 30, iegūstam pretrunu, tātad šis gadījums nav iespējams.
- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 6×2 rūtiņas, tad katra kvadrāta malas garums ir vismaz 6. Tādā gadījumā iegūtās figūras perimetrs ir vismaz $8 \cdot 6 - 2 \cdot (6 + 2) = 48 - 16 = 32$. Tā kā ir dots, ka iegūtās figūras perimetrs ir 30, iegūstam pretrunu, tātad šis gadījums nav iespējams.
- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 4×3 rūtiņas, tad abu kvadrātu perimetru summa ir $30 + 2 \cdot (3 + 4) = 44$, tātad abu kvadrātu malu summa ir $44 : 4 = 11$. Tā kā katra kvadrāta malas garums ir vismaz 4 (pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 4×3 rūtiņas), tad vienīgie iespējamie kvadrātu malu garumi ir 4 un 7 vai 5 un 6 (skat. 17. att.).



17. att.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka kvadrāti var būt tikai ar izmēriem:

- 4×4 un 7×7 rūtiņas;
- 5×5 un 6×6 rūtiņas.

Ievērosim, ka divi kvadrāti var pārklāties tieši četros dažādos veidos (skat. 16. att.). Tā kā pārklātās daļas laukums ir 12 cm^2, tad pārklātā daļa var būt taisnstūris ar izmēriem 12×1; 6×2 vai 4×3 rūtiņas.

Aplūkosim visas trīs iespējas. Apzīmēsim kvadrātu malu garumus ar a un b $(a \leq b)$.

- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 12×1 rūtiņa, tad $a + b \geq 2 \cdot 12 = 24$. Tā kā iegūtās figūras perimetrs ir $P = 4a + 4b - 2 \cdot (12 + 1) = 30$, tad, atrisinot vienādojumu, iegūstam, ka $a + b = 14$. Iegūstam pretrunu, tātad šis gadījums nav derīgs.
- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 6×2 rūtiņa, tad iegūtās figūras perimetrs ir $P = 4a + 4b - 2 \cdot (6 + 2) = 30$. Risinot vienādojumu, iegūstam, ka $4a + 4b = 46$, kas nav iespējams, jo 46 nedalās ar 4 un a; b ir naturāli skaitļi.
- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 4×3 rūtiņa, tad iegūtās figūras perimetrs ir $P = 4a + 4b - 2 \cdot (4 + 3) = 30$. Risinot vienādojumu, iegūstam, ka $a + b = 11$. Tā kā $a \geq 4$, tad $a = 4$ un $b = 7$ vai $a = 5$ un $b = 6$ (skat. 17. att.).

5. uzdevums

Zem Profesora Cipariņa mājas pazemē ir izveidots alu labirints. Lai sargātu konkursa uzdevumus un atrisinājumus, viņš kādā no labirinta galapunktiem ir paslēpis uzdevumu skapi. Profesors pats nebija mājās, bet četriem viņa kolēģiem (Marutai un trīs asistentiem) bija uzdevumi steidzami jāatrod. Maruta zina, ka divi asistenti vienmēr runā patiesību, bet trešais dažreiz melo. Tomēr viņa nezina, kuri asistenti runā patiesību un kurš – melo.

Maruta ar trīs asistentiem nonāk līdz vietai, kas sazarojas trīs alās (tālāk šīs alas vairs nesazarojas). Maruta zina, ka uzdevumu skapis ir vienā no šīm trim alām un līdz tam var nokļūt 1 stundas laikā. Tomēr ne Maruta, ne asistenti nezina, kura ir šī ala. Maruta izdomāja, ka visiem četriem kolēģiem ir jāšķiras un jāmeklē uzdevumu skapis. Maruta var nosūtīt asistentus izlūkos kādā no alām un pēc tam atgriezties, kā arī pati doties alās un atgriezties. Kā Maruta kopā ar asistentiem var nokļūt līdz uzdevumu skapim, patērējot ceļā ne vairāk kā 3 stundas?

1. atrisinājums. Maruta sūta visus trīs asistentus pirmajā alā un pati dodas otrajā alā. Visi dodas pa alu uz priekšu tieši vienu stundu un tad atgriežas sākumpunktā, kopā ceļā pavadot 2 stundas. Ja Maruta konstatē, ka uzdevumu skapis ir viņas izvēlētajā alā, tad visi četri kolēģi dodas pa šo alu un uzdevumu skapi atrod trīs stundās. Ja Marutas izvēlētajā alā uzdevumu skapja nav, tad viņa jautā asistentiem, vai viņi ir atraduši uzdevumu skapi. Tā kā viens no asistentiem dažreiz melo, tad patiesība ir tā, ko saka vismaz divi asistenti. Ja vismaz divi asistenti saka, ka viņi sasniedza uzdevumu skapi, tad visi kolēģi dodas pa pirmo alu. Ja vismaz divi asistenti saka, ka uzdevumu skapi neatrada, tad visi kolēģi dodas pa trešo alu. Tādā veidā visi nokļuva līdz uzdevumu skapim trīs stundu laikā.

2. atrisinājums. Maruta sūta vienu asistentu *A* izlūkos pa pirmo alu un pārējos divus asistentus *B* un *C* izlūkos pa otro alu, bet pati dodas izlūkos pa trešo alu. Visi dodas pa alu uz priekšu tieši vienu stundu un tad atgriežas sākumpunktā, kopā ceļā pavadot 2 stundas.

Ja Maruta konstatē, ka uzdevumu skapis ir atrodams pa viņas izvēlēto alu, tad visi četri kolēģi dodas pa šo alu un uzdevumu skapi atrod trīs stundās. Ja Marutas izvēlētā ala nav īstā, tad viņa jautā asistentiem, vai viņi ir sasnieguši uzdevumu skapi. Iespējami divi gadījumi.

- Asistentu *B* un *C* atbildes ir dažādas, tātad viens no tiem melo. Tādā gadījumā asistents *A* noteikti runā patiesību. Ja asistents *A* saka, ka sasniedza uzdevumu skapi, visi kolēģi dodas pa pirmo alu. Ja asistents *A* saka, ka nav sasniedzis uzdevumu skapi, visi kolēģi dodas pa otro alu. Tādā veidā visi nokļuva līdz uzdevumu skapim trīs stundu laikā.
- Asistentu *B* un *C* atbildes ir vienādas, tātad abi saka taisnību, jo tikai viens asistents var melot. Tādā gadījumā visi kolēģi dodas pa pirmo vai otro alu, ja asistenti *B* un *C* saka, ka uzdevumu skapi attiecīgi nav vai ir sasnieguši. Tādā veidā visi nokļuva līdz uzdevumu skapim trīs stundu laikā.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Reinis un Ilze kopīgi spēlē spēli. Katrs iedomājas vienu pozitīvu reālu skaitli, kurus apzīmēsim ar x un y. Uz tāfeles tad tiek uzrakstīti trīs skaitļi $x; y$ un $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Starp šiem trīs skaitļiem izvēlas mazāko un apzīmē to ar m. Spēles mērķis ir panākt to, ka m ir pēc iespējas lielāks. Kāda ir lielākā iespējamā m vērtība un kādām x un y vērtībām tā atbilst?

Atrisinājums. Ja m ir mazākais skaitlis starp $x; y$ un $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, tad noteikti ir spēkā nevienādības

$$x \geq m, \quad y \geq m, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq m.$$

Pie tam ir zināms, ka vismaz viena no šīm nevienādībām ir vienādība. Vēl varam spriest, ka no pirmajām divām nevienādībām izriet šādas nevienādības:

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{m}.$$

Apvienojot šīs nevienādības, iegūstam

$$m \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{m}.$$

Tātad $m^2 \leq 2$ jeb $m \leq \sqrt{2}$. Tas nozīmē, ka lielāku vērtību kā $\sqrt{2}$ nevaram iegūt. Lai nevienādību $\sqrt{2} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq m$ pārveidotu par vienādību, varam izvēlēties $x=y=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

7. uzdevums

Doti 15 dažādi naturāli skaitļi, kas lielāki nekā 1 un nepārsniedz 2024. Zināms, ka jebkuri divi skaitļi no šiem 15 ir savstarpēji pirmskaitļi. Pamatot, ka starp šiem 15 skaitļiem noteikti ir kāds pirmskaitlis!

Atrisinājums. Pieņemsim, ka mums ir doti 15 naturāli skaitļi $n_1, n_2, \ldots, n_{15}$ intervālā no 2 līdz 2024, kuri pa pāriem ir savstarpēji pirmskaitļi. Ar p_i apzīmēsim mazāko skaitļa n_i pirmreizinātāju. Tā kā visi skaitļi n_i ir savstarpēji pirmskaitļi, tad katrs p_i ir unikāls, jo pretējā gadījumā diviem skaitļiem būtu kopīgs pirmreizinātājs. Tātad mums ir doti 15 pirmskaitļi p_i un starp tiem atradīsies lielākais, ko apzīmēsim ar p. Varam apgalvot, ka $p \geq 47$, jo 47 ir 15. pirmskaitlis. Apzīmēsim to skaitli, kuram p ir mazākais pirmreizinātājs, ar n. Pamatosim, ka šis skaitlis n ir meklētais pirmskaitlis. Ja pieņemtu pretējo, ka n ir salikts skaitlis (skaitlis n ir lielāks nekā 1 pēc dotā), tad tam noteikti būtu dalītājs, kas ir vismaz p^2. Tā tam jābūt, jo p ir mazākais skaitļa n pirmreizinātājs. Tātad skaitlim n izpildītos $n \geq p^2 \geq 47^2=2209>2024$, kas noved pie pretrunas, jo dots, ka n nepārsniedz 2024. Secinām, ka pieņēmums, ka n ir salikts skaitlis, ir aplams.