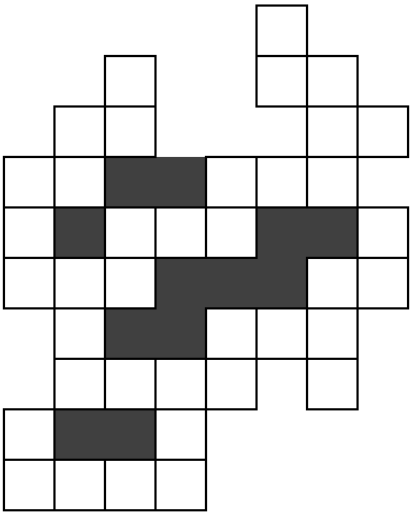
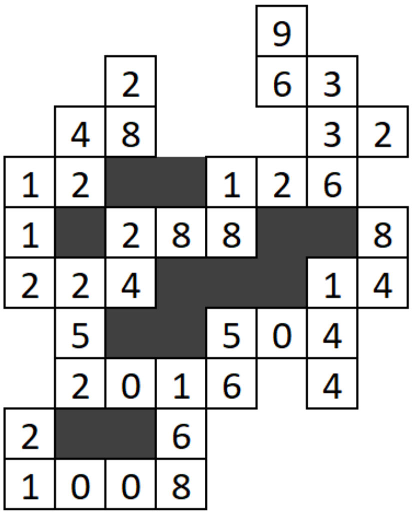
Profesora Cipariņa klubs
2023./2024. mācību gads
5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums
Ieraksti krustskaitļu mīklā skaitļa 2016 divciparu, trīsciparu un četrciparu dalītājus (katru ne vairāk kā vienu reizi), izņemot dalītājus 16 un 36.
Piezīme. Skaitļus lasa no augšas uz leju un no kreisās uz labo pusi.



Atrisinājums. Dažu divciparu, trīsciparu un četrciparu skaitļa 2016 dalītāju, izņemot 16 un 36, izvietojums parādīts krustskaitļu mīklā. Mīklā nav ierakstīti arī tādi skaitļa 2016 dalītāji kā 72 un 672.



2. uzdevums
Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 202320232023. Ar skaitli atļauts veikt šādas darbības:
- pieskaitīt vai atņemt 12;
- nodzēst tā trīs vienādus ciparus (skaitļa pirmais cipars nedrīkst būt 0);
- mainīt vietām skaitļa ciparus (skaitļa pirmais cipars nedrīkst būt 0);
- ja skaitlī trīs cipari ir "1", tad katru no tiem var aizstāt ar ciparu "5".

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no uzrakstītā skaitļa var iegūst skaitli **a)** 2023; **b)** 2025?
Atrisinājums. a) Pamatosim, ka skaitli 2023 nevar iegūt. Skaitlim 202320232023 izpildās īpašība "dalās ar 3", jo tā ciparu summa $3 \cdot (2+0+2+3) = 21$ dalās ar 3, bet skaitlim 2023 šī īpašība neizpildās, jo tā ciparu summa $2+0+2+3=7$ nedalās ar 3. Pierādīsim: ja sākotnējais skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar uzdevumā dotajām darbībām, arī dalās ar 3. Izmantosim dalāmības pazīmi ar 3: ja skaitļa ciparu summa dalās ar 3, tad skaitlis dalās ar 3.
Ievērojam, ka
- ja skaitlis n dalās ar 3, tad arī skaitlis $(n-12)$ un $(n+12)$ dalās ar 3 (ja katrs saskaitāmais dalās ar 3, tad arī summa vai starpība dalās ar 3);
- ja skaitļa ciparu summa n dalās ar 3, tad arī ciparu summa $(n - 3 \cdot k)$ dalās ar 3, kur k ir vienādie cipari, kurus nodzēš (ja katrs saskaitāmais dalās ar 3, tad arī starpība dalās ar 3), tātad dalāmība ar 3 saglabājas;

- mainot vietām skaitļa ciparus, nemainās ciparu summa, tātad dalāmība ar 3 saglabājas;
- ja skaitlī katru no trīs cipariem “1” aizstāj ar ciparu “5”, tad ciparu summa palielinās par $3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 12$, tātad, ja skaitļa ciparu summa n dalās ar 3, tad arī ciparu summa $(n + 12)$ dalās ar 3 (ja katrs saskaitāmais dalās ar 3, tad arī summa dalās ar 3), tātad dalāmība ar 3 saglabājas.

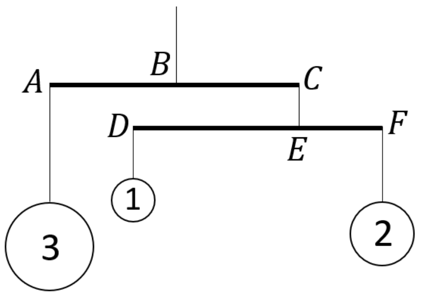
Tātad, ja dotais skaitlis dalās ar 3, tad pēc atļauto darbību izpildes arī iegūtais skaitlis dalīsies ar 3. Skaitlis 2023 ar 3 nedalās, tātad ar atļautajām darbībām to nevar iegūt.

b) Jā, skaitli 2025 var iegūt, piemēram, šādi:

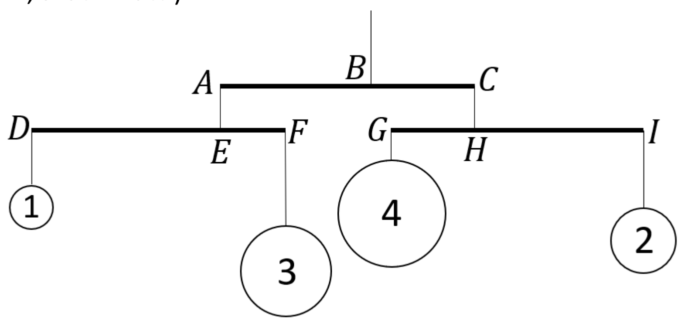
$$202320232023 \xrightarrow{\text{nodzēš 3 "0"}} 223223223 \xrightarrow{\text{nodzēš 3 "2"}} 232323 \xrightarrow{\text{nodzēš 3 "2"}} 333 \xrightarrow{\text{141 reizi +12}} 333 + 141 \cdot 12 = 2025.$$

3. uzdevums

Modelis sastāv no dažādu masu bumbām, kuras ar auklām iekārtas horizontālos stieņos. Katra horizontālā stieņa galā var iekārt vai nu vienu bumbu, vai vienu horizontālu stieni. Katra horizontālā stieņa garums ir 120 cm un katras iekārtās bumbas masa kilogramos ir uzrakstīta uz bumbas (piemēram, skat. 1. att.).



1. att.



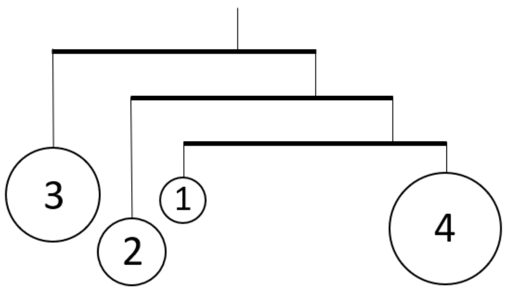
2. att.

Visi modeļi tiek veidoti tā, lai stieņa augšpusē aukla ir piestiprināta tuvāk smagākajai bumbai proporcionāli pārējai iekārtajai masai (neņemot vērā stieņu un auklu masu). Piemēram, 1. att. augšējā stieņa katrā galā ir iekārti 3 kg, tāpēc augšējā aukla ir piestiprināta tieši stieņa viduspunktā 60 cm no abiem tā galiem ($AB = BC = 60$ cm). Aukla, kas notur apakšējo stieni, ir piestiprināta tuvāk smagākajai bumbai tieši divas reizes lielākā attālumā no stieņa kreisā gala D nekā no labā F, jo bumba ar 2 kg masu ir tieši divas reizes smagāka nekā bumba ar 1 kg masu. Tātad $DE = 80$ cm un $EF = 40$ cm.

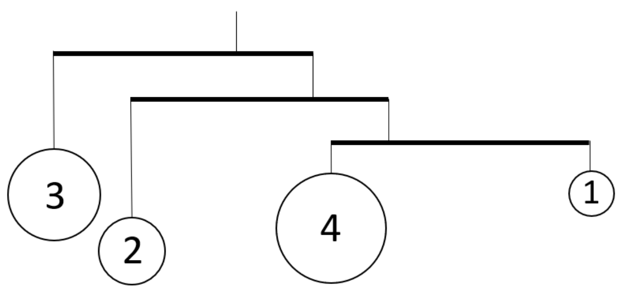
a) Lai izveidotu nākamo modeli, izmanto trīs horizontālus stieņus un vienu 1 kg, vienu 2 kg, vienu 3 kg un vienu 4 kg bumbu (skat. 2. att.). Kādi ir stieņu gabalu AB, BC, DE, EF, GH un HI garumi?

b) No a) gadījumā izmantotajām bumbām un stieņiem var izveidot vairākus modeļus. Piemēram, mainot bumbu, stieņu un auklu stiprinājuma vietu novietojumu, var iegūt 3. att. redzamo modeli. Cik dažādus modeļus var izveidot no trim horizontāliem stieņiem un vienas 1 kg, vienas 2 kg, vienas 3 kg un vienas 4 kg bumbas?

Piezīme. Par vienādiem modeļiem tiek uzskatīti simetriski modeļi, kā arī tādi modeļi, kuriem vienā horizontālajā stienī iekārtās bumbas samaina vietām (piemēram, 3. att. un 4. att. dotie modeļi ir vienādi).



3. att.



4. att.

c) Sauksim modeli par *estētisku*, ja katra horizontālā stieņa abi gali ir vismaz 30 cm attālumā no stienim augšpusē piestiprinātās auklas. Pamato, kāpēc 3. att. dotais modelis nav *estētisks*!

d) Cik dažādus *estētiskus* modeļus var izveidot no trim horizontāliem stieņiem un vienas 1 kg, vienas 2 kg, vienas 3 kg un vienas 4 kg bumbas?

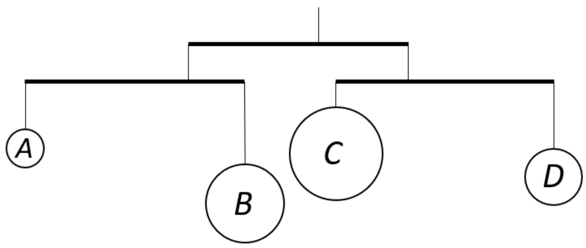
Piezīme. Par vienādiem modeļiem tiek uzskatīti simetriski modeļi, kā arī tādi modeļi, kuriem vienā horizontālajā stienī iekārtās bumbas samaina vietām (piemēram, skat. 3. att. un 4. att.).

Atrisinājums. a) Tā kā augšējā stieņa katrā galā iekārto bumbu masu attiecība ir $4 : 6 = 2 : 3$, tad stieņa garums, sākot no kreisā gala, ir jāsadala attiecībā $3 : 2$. Tātad $AB = \frac{3}{5}$ no $120 = 72$ cm un $BC = 120 - 72 = 48$ cm. Apakšējā auklā pa kreisi iekārto bumbu masu attiecība ir $1 : 3$, tātad $DE = \frac{3}{4}$ no $120 = 90$ cm un $EF = \frac{1}{3}$ no $120 = 30$ cm. Apakšējā auklā pa labi iekārto bumbu masu attiecība ir $2 : 1$, tātad $GH = \frac{1}{3}$no$120 = 40$ cm un $HI = 120 - 40 = 80$ cm.

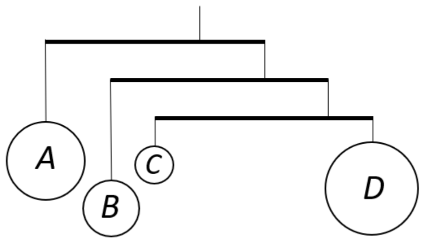
b) 1. atrisinājums. Pamatosim, ka iespējams izveidot 15 dažādus modeļus no trim stieņiem un četrām bumbām. Aplūkosim abus iespējamos gadījumus, kā stieņi var būt iekārti.

1. Divi stieņi ir iekārti paralēli trešajā stienī (skat. 5 . att., kurā ar *A, B, C* un *D* apzīmēti dotās četras bumbas). Tātad atšķirīgus modeļus veidos tikai tas, kuras divas bumbas iekar vienā stienī. Kopā ar bumbu *A* var iekārt bumbu *B, C* vai *D,* tātad iegūstam 3 iespējas. Otrā stienī atliek iekārt atlikušās divas bumbas, kuru mainīšana vietām neveido citu modeli.
2. Visi trīs stieņi ir iekārti viens zem otra (skat. 6. att., kurā ar *A, B, C* un *D* apzīmēti dotās četras bumbas). Ievērojam, ka bumbas *A* vietā var iekārt jebkuru no četrām bumbām un ka bumbas *B* vietā var iekārt jebkuru no atlikušajām trim bumbām. Tā kā bumbu *C* un *D* vietā atliek iekārt atlikušās divas bumbas un to mainīšana vietām neveido citu modeli, kopā iegūstam $4 \cdot 3 = 12$ dažādus modeļus.

Tā kā abi minētie stieņu novietojumi ir vienīgie iespējamie, tad kopā iegūstam $3 + 12 = 15$ dažādus modeļus.



5 . att.



6. att.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka iespējams izveidot 15 dažādus modeļus, uzskaitot visas iespējas. Bumbu un stieņu novietojumu aprakstīsim ar skaitļu pāri iekavās. Ja bumbas ar masu 1 kg un 2 kg ir iekārtas vienā stienī, tad to pierakstīsim kā (1, 2). Piemēram, 2. att. redzamo modeli pierakstīsim kā ((1, 3), (2, 4)), un 3. att. redzamo modeli – kā (3, (2, (1, 4))).

Aplūkosim abus iespējamos gadījumus, kā stieņi var būt iekārti.

1. Ja divi stieņi ir iekārti paralēli trešajā stienī (skat. 5 . att.), tad var izveidot 3 dažādus modeļus: ((1, 2), (3, 4)); ((1, 3), (2, 4)) un ((1, 4), (2, 3)).
2. Ja visi trīs stieņi ir iekārti viens zem otra (skat. 6. att.), tad iespējams izveidot 12 dažādus modeļus:

(1, (2, (3, 4))); (1, (3, (2, 4))); (1, (4, (2, 3)));
(2, (1, (3, 4))); (2, (3, (1, 4))); (2, (4, (1, 3)));
(3, (1, (2, 4))); (3, (2, (1, 4))); (3, (4, (1, 2)));
(4, (1, (2, 3))); (4, (2, (1, 3))); (4, (3, (1, 2))).

Tā kā abi minētie stieņu novietojumi ir vienīgie iespējamie, tad kopā iegūstam $3 + 12 = 15$ dažādus modeļus.

c) Ievērojam, ka apakšējā stienī ir iekārtas bumbas ar masu 1 kg un 4 kg, tātad to masu attiecība ir $1 : 4$, un aukla ir piestiprināta $\frac{1}{5}$ no $120 = 24$ cm attālumā no stieņa labā gala, tāpēc 3. att. redzamais modelis nav *estētisks.*

d) Pamatosim, ka atbilstoši nosacījumiem var izveidot 5 dažādus *estētiskus* modeļus. Lai modelis būtu *estētisks*, auklai jābūt piestiprinātai vismaz 30 cm attālumā no abiem stieņa galiem (30 cm un 90 cm attālumā no abiem stieņa galiem vai tuvāk viduspunktam), tātad stienim abos galos piestiprinātajai masai jāatšķiras ne vairāk kā 3 reizes. Aplūkosim abus iespējamos gadījumus, kā stieņi var būt iekārti.

1. Ja divi stieņi ir iekārti paralēli trešajā stienī (skat. 5 . att.), tad var izveidot 3 dažādus modeļus, kurus ieguvām b) gadījumā. Visu stieņu galos iekārto masu attiecību skatīt tabulā.

Modelis	**Stieņa galos iekārto masu attiecība**		
$((\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}))$	$\boldsymbol{A:B}$	$\boldsymbol{C:D}$	$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}):(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})$
((1, 2), (3, 4))	$1 : 2$	$3 : 4$	$3 : 7$
((1, 3), (2, 4))	$1 : 3$	$2 : 4 = 1 : 2$	$4 : 6 = 2 : 3$
((1, 4), (2, 3))	$1 : 4$ (nav *estētisks*)	$2 : 3$	$5 : 7$

Kā redzams tabulā, divi modeļi ir *estētiski*.

2. Ja visi trīs stieņi ir iekārti viens zem otra (skat. 6. att.), tad iespējams izveidot 12 dažādus modeļus, kurus ieguvām b) gadījumā. Lai modelis būtu *estētisks*, riņķa *A* vietā nevar būt bumba ar 1 kg vai 2 kg masu, jo tad masu attiecība pret augšējā stieņa otrā galā iekārto masu būtu attiecīgi $1 : (2+3+4) = 1 : 9$ vai $2 : (1+3+4) = 2 : 8 = 1 : 4$. Visu stieņu galos iekārto masu attiecību skatīt tabulā, ja bumbas *A* vietā ir bumba ar masu 3 kg vai 4 kg.

Modelis	**Stieņa galos iekārto masu attiecība**		
$\left(\boldsymbol{A},\left(\boldsymbol{B},(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})\right)\right)$	$\boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})$	$\boldsymbol{B} : (\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})$	$\boldsymbol{C} : \boldsymbol{D}$
(3, (1, (2, 4)))	$3 : 7$	$1 : 6$ (nav *estētisks*)	$2 : 4 = 1 : 2$
(3, (2, (1, 4)))	$3 : 7$	$2 : 5$	$1 : 4$ (nav *estētisks*)
(3, (4, (1, 2)))	$3 : 7$	$4 : 3$	$1 : 2$
(4, (1, (2, 3)))	$4 : 6 = 2 : 3$	$1 : 5$ (nav *estētisks*)	$2 : 3$
(4, (2, (1, 3)))	$2 : 3$	$2 : 4 = 1 : 2$	$1 : 3$
(4, (3, (1, 2)))	$2 : 3$	$3 : 3 = 1 : 1$	$1 : 2$

Kā redzams tabulā, trīs modeļi ir *estētiski*.

Kopā iegūstam $2 + 3 = 5$ dažādus *estētiskus* modeļus.

4. uzdevums

Marts ir sakrājis naudas summu, izmantojot tikai 1 eiro monētas. Viens šokolādes batoniņš “KitKat” maksā 66 centus un viens šokolādes batoniņš “Twix” maksā 85 centus. Kādu mazāko skaitu šokolādes batoniņu “KitKat” un “Twix” Marts var nopirkt, lai būtu nopirkts vismaz viens katra veida batoniņš un būtu iztērēts vesels skaits eiro?

Atrisinājums. Pamatosim, ka Martam jānopērk 2 šokolādes batoniņi “Twix” un 5 batoniņi “KitKat”, lai iztērētu mazāko veselo skaitu eiro. Apzīmēsim nopirkto šokolādes batoniņu “Twix” skaitu ar t un “KitKat” skaitu ar k, bet iztērēto veselo eiro skaitu ar e. Tā kā 1 eiro ir 100 centi, tad varam izveidot vienādību, kuras abas puses izsaka iztērēto naudas daudzumu:

$$85 \cdot t + 66 \cdot k = 100 \cdot e.$$

Ievērojam, ka saskaitāmais $66 \cdot k$ un vienādības labā puse $100 \cdot e$ dalās ar 2, tātad arī saskaitāmajam $85 \cdot t$ jādalās ar 2. Tā kā 85 nedalās ar divi , tad reizinātājam t jādalās ar 2, tātad t ir vismaz 2.

Līdzīgi var iegūt, ka k ir vismaz 5, jo saskaitāmais $85 \cdot t$ un vienādības labā puse $100 \cdot e$ dalās ar 5, tātad arī saskaitāmajam $66 \cdot k$ jādalās ar 5. Tā kā 66 nedalās ar 5, tad reizinātājam k jādalās ar 5.

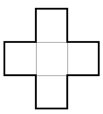
Tātad mazākās iespējamās t un k vērtības ir atbilstoši 2 un 5. Pārbaudīsim, vai ar šādām t un k vērtībām arī e ir vesels skaitlis. Ja $t = 2$ un $k = 5$, tad $85 \cdot 2 + 66 \cdot 5 = 170 + 330 = 500$. Tātad $e = 5$, lai $100 \cdot e = 100 \cdot 5 = 500$.

Iegūstam, ka, nopērkot 2 šokolādes batoniņus “Twix” un 5 batoniņus “KitKat”, Marts iztērē 5 eiro, kas ir vesels skaits eiro.

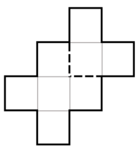
5. uzdevums

Jāzeps rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1, pa rūtiņu līnijām zīmē tādus daudzstūrus, kuriem perimetra skaitliskā vērtība P sakrīt ar malu skaitu. Kādas P vērtības, kas ir vismaz 12 un dalās ar 4, Jāzeps var iegūt?

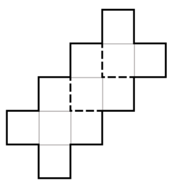
Atrisinājums. Jāzeps var iegūt visas tādas P vērtības, kas ir vismaz 12 un dalās ar 4, jeb $P = 8 + 4k$, kur $k \in \mathbb{N}$. Parādīsim, kā visus tādus daudzstūrus iegūt. Daudzstūris, kuram $P = 12$, redzams 7. att. Nākamais daudzstūris, kura perimetra skaitliskā vērtība dalās ar 4, ir 16-stūris (skat. 8. att.). To var iegūt no 12-stūra, pieliekot klāt trīs rūtiņas, malu un perimetra skaitlisko vērtību samazinot par 2 un palielinot par 6, kopumā malu skaits palielinās par 4. Šādu konstrukciju turpinot, katrā reizē malu skaitu samazinot par 2 un palielinot par 6 (skat. 20-stūri 9. att.), perimetra skaitliskā vērtība un malu skaits palielināsies par 4, tātad dalīsies ar 4.



7. att.



8. att.



9. att.

6. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīti trīs skaitļi 2; 6 un 12. Vienā gājienā var izvēlēties divus uz tāfeles uzrakstītos skaitļus a un b un to vietā uzrakstīt skaitļus $\frac{5}{13}a+\frac{12}{13}b$ un $\frac{12}{13}a-\frac{5}{13}b$. Vai, atkārtoti izpildot šādus gājienus, var panākt, ka uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi 4; 8 un 10?

Atrisinājums. Pamatosim, ka nevar iegūt prasīto. Ievērosim: ja skaitļus a un b aizvieto ar $\frac{5}{13}a+\frac{12}{13}b$ un $\frac{12}{13}a-\frac{5}{13}b$, tad to kvadrātu summa paliek nemainīga:

$$\left(\frac{5}{13}a+\frac{12}{13}b\right)^2+\left(\frac{12}{13}a-\frac{5}{13}b\right)^2=a^2+b^2,$$

Tātad sākotnējo skaitļu kvadrātu summa ir invarianta, tas ir, pēc katra gājiena uz tāfeles uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa ir $2^2+6^2+12^2=184$. Bet skaitļu 4; 8 un 10 kvadrātu summa ir $4^2+8^2+10^2=188$. Tātad nevar iegūt, ka uz tāfeles būs uzrakstīti skaitļi 4; 8 un 10.

7. uzdevums

Pa apli patvaļīgā secībā sarakstīti 1012 vieninieki un 1011 nulles. Vienā gājienā starp vienādajiem cipariem ieraksta nulli, bet starp dažādajiem – vieninieku. Pēc tam, kad starp visiem sākotnējiem cipariem ir ierakstīti jaunie cipari, visi sākotnējie cipari tiek nodzēsti. Pēc tam atkal atkārto šādu gājienu (ieraksta 0 vai 1) ar cipariem, kas palika pēc nodzēšanas. Vai, atkārtoti izpildot šādus gājienus, var iegūt, ka pa apli visi cipari ir 0?

Atrisinājums. Pamatosim, ka prasīto nevar iegūt. Veiksim pāris spriedumus no beigām. Vienīgais veids, kā iegūt, ka visi cipari ir nulles, ir tad, ja iepriekšējā solī visi cipari bija vieninieki. Pie tam vienīgais veids, kā iegūt, ka visi cipari ir 1, ir, ja iepriekšējā solī cipari pa apli pamīšus bija dažādi, tas ir, veidojās virkne 1; 0; 1; 0; 1; 0; … 1; 0. Ievērosim, ka šāda situācija nav iespējama, jo tai būtu nepieciešams vienāds skaits vieninieku un nuļļu jeb kopā jābūt pāra skaits ciparu sarakstītiem ap apli, bet mums sākotnēji ir doti 2023 cipari.