Profesora Cipariņa klubs
2023./2024. mācību gads

1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

Kādā vējainā rudens dienā Kristīne uzrakstīja divas vienādības. Pēkšņi uzpūta stiprs vējš un visas iekavas tika aizpūstas prom, bet darbību zīmes aizsedza sapūstās kļavu lapas. Saliec darbības zīmes ("+", "–", "·" un ":") un iekavas tā, lai dotās vienādības būtu patiesas!

a) 81 🍁 113 🍁 92 🍁 7 🍁 12 🍁 13 🍁 11 🍁 61 = 34

b) 9 🍁 3 🍁 7 🍁 10 🍁 6 🍁 6 🍁 13 🍁 11 = 24

Atrisinājums. Darbību zīmes un iekavas var salikt, piemēram, šādi:

- **a)** $81 + 113 - 92 + 7 - 12 - 13 + 11 - 61 = 34$
- **b)** $(9 : 3 + 7 - 10 + 6 + 6) \cdot (13 - 11) = 24$

2. uzdevums

Profesors Cipariņš iedeva savam vectēvam seifā uzglabāt PCK atrisinājumus. Kad atrisinājumi bija nepieciešami, atklājās, ka vectēvs ir aizmirsis seifa kodu, tomēr dažus faktus viņš atceras:

1) seifa kods ir septiņciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir divas reizes mazāks nekā pēdējais cipars;
2) koda veidotais skaitlis dalās ar 9;
3) nodzēšot pirmo un pēdējo koda ciparu, iegūst piecciparu skaitli, kuru sadalot reizinātājos, iegūst piecus dažādus pēc kārtas esošus pirmskaitļus.

Palīdzi Profesoram Cipariņam noskaidrot vectēva seifa kodu!

Atrisinājums. Vectēva seifa kods ir 2150154. Pamatosim, ka citu iespēju nav. Sāksim risinājumu ar 3) nosacījumu. Aplūkosim dažus pirmo piecu mazāko pirmskaitļu reizinājumus: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ (neder, jo 4 cipari), $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 15015$ un $5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 85085$. Tā kā nākamo piecu pēc kārtas esošu pirmskaitļu reizinājums $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 323323$ ir sešciparu skaitlis, tad vairāk iespēju nav. Tādā gadījumā meklēto septiņciparu kodu varam pierakstīt kā $\overline{a15015b}$ vai $\overline{a85085b}$. Ievērojot 2) nosacījumu, skaitlim jādalās ar 9. Aplūkosim abas iespējas.

1. Lai skaitlis $\overline{a15015b}$ dalītos ar 9, tā ciparu summai $a + 1 + 5 + 0 + 1 + 5 + b = 12 + a + b$ jādalās ar 9. No 1) nosacījuma $b = 2 \cdot a$, tātad skaitļa ciparu summai $12 + a + 2 \cdot a = 12 + 3 \cdot a$ jādalās ar 9, turklāt a jābūt mazākam nekā 5, lai b būtu cipars. Ja cipars a ir 0; 1; 3 vai 4, tad $12 + 3 \cdot a$ nedalās ar 9. Ja $a = 2$, tad $12 + 3 \cdot a = 18$, kas dalās ar 9, un $b = 2 \cdot 2 = 4$. Tātad seifa kods var būt 2150154.
2. Lai skaitlis $\overline{a85085b}$ dalītos ar 9, tā ciparu summai $a + 8 + 5 + 0 + 8 + 5 + b = 26 + a + b$ jādalās ar 9. Līdzīgi kā iepriekš $b = 2 \cdot a$, turklāt a ir mazāks nekā 5, tātad ciparu summai $26 + 3 \cdot a$ jādalās ar 9. Ievietojot a vietā visus iespējamos gadījumus (0; 1; 2; 3 un 4), ciparu summa nedalās ar 9, tātad kods nevar būt pierakstīts kā $\overline{a85085b}$.

3. uzdevums

Dagnijai uz galda ir 5×5 rūtiņu lapa, kur katrā rūtiņā ir ierakstīt kāds no burtiem P, C, K (skat. 1. att.). Dagnija katru rītu rūtiņu lapā vienu reizi izlasa frāzi "PCK", sākot lasīt no centra rūtiņas un pārvietojoties uz rūtiņu, kurai ir kopīga mala vai stūris ar iepriekšējo rūtiņu. Cik rītus Dagnija var izlasīt "PCK" dažādos veidos?

K	K	K	K	K
K	C	C	C	K
K	C	P	C	K
K	C	C	C	K
K	K	K	K	K

1. att.

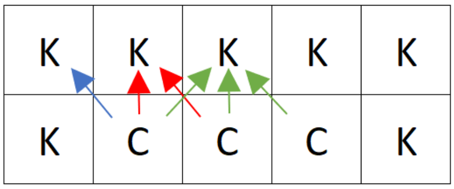
Atrisinājums. Katrā rūtiņā ierakstīsim, cik dažādos veidos tajā var nonākt (skat. 2. att.). Uz katru rūtiņu ar burtu C var nonākt tikai vienā veidā – no centra rūtiņas ar burtu P. Uz rūtiņām ar burtu K var nonākt 1; 2; 3; 2 un 1 veidā, sākot skaitīt no kādas stūra rūtiņas (skat. 3. att.). Tā kā frāze “PCK” beidzas kādā no rūtiņām ar burtu K, tad to var izlasīt

$$1+2+3+2+1+2+3+1+2+3+2+1+2+3+1+2+3+2=32$$

veidos jeb Dagnija 32 rītus varēs izlasīt “PCK” neatkārtojoties.

1	2	3	2	1
2	1	1	1	2
3	1	1	1	3
2	1	1	1	2
1	2	3	2	1

2. att.



3. att.

4. uzdevums

Pirmzemes naudas valūta ir alfoni. Katras monētas vērtība ir pirmskaitlis, kas mazāks nekā 50. Piemēram, monēta ar vismazāko vērtību ir 2 alfoni. Pirmzemē visus maksājumus var samaksāt ar veselu skaitu monētu.

- **a)** Kāda ir mazākā naudas summa, kuras precīzai samaksāšanai nepieciešamas vismaz 3 monētas?
- **b)** Maisā ir sešas dažādas vērtības monētas. Katrs no trim draugiem izņem divas monētas no maisa. Kāda ir mazākā iespējamā naudas summa maisā, ja visi trīs draugi ir izņēmuši vienādu naudas daudzumu?
- **c)** Pierādi, ka ir tikai viens komplekts ar piecām monētām, kuras var sakārtot augošā secībā tā, lai katru divu blakus esošu monētu starpība ir 6 alfoni, pat tad, ja Pirmzemē monētu vērtības būtu arī tādi pirmskaitļi, kas ir lielāki nekā 50!

Atrisinājums. a) Mazākā naudas summa ir 27 alfoni. Parādīsim, ka jebkuru mazāku naudas summu var samaksāt ar 2 vai mazāk monētām. Pirmzemē monētas vērtība var būt 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43 un 47 alfoni. Jebkuru naudas summu no 2 līdz 26 alfoniem var samaksāt ar 2 vai mazāk monētām, kā parādīts tabulā.

$2=2$	$7=7$	$12=5+7$	$17=17$	$22=3+19$
$3=3$	$8=3+5$	$13=13$	$18=5+13$	$23=23$
$4=2+2$	$9=2+7$	$14=3+11$	$19=19$	$24=5+19$
$5=5$	$10=3+7$	$15=2+13$	$20=3+17$	$25=2+23$
$6=3+3$	$11=11$	$16=3+13$	$21=2+19$	$26=3+23$

Pamatosim, ka 27 alfonu apmaksāšanai noteikti ir nepieciešamas vismaz 3 monētas. Pieņemsim, ka 27 alfonus var apmaksāt ar 2 monētām. Tā kā divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, tad vienas monētas vērtībai jābūt pāra skaitlim. Vienīgā iespēja ir 2 alfoni, tātad otras monētas vērtībai jābūt 25 alfoni, bet 25 nav pirmskaitlis. Esam ieguvuši pretrunu ar pieņēmumu, ka 27 alfonus var apmaksāt ar 2 monētām, tātad to apmaksai nepieciešamas vismaz 3 monētas.

b) Mazākā iespējamā naudas summa maisā ir 72 alfoni. Pamatosim, ka mazāka vērtība nav iespējama. Tā kā pāra un nepāra skaitļu summa ir nepāra, tad maisā nevar atrasties 2 alfonu monēta, jo jebkuru citu divu monētu summa ir pāra skaitlis. Tādā gadījumā visu maisā esošo monētu vērtības ir nepāra skaitļi un kopējā naudas summa ir pāra skaitlis, tātad tas dalās ar 2. Tā kā trīs draugu izņemto divu monētu summas ir vienādas, tad kopējai naudas summai ir jādalās arī ar 3. Ja kopējā naudas summa dalās ar 2 un ar 3, tad tā dalās ar 6. Sešu mazāko monētu summa ir vismaz $3+5+7+11+13+17=56$, bet 56 ar 6 nedalās. Aplūkosim nākamās mazākās vērtības, kas dalās ar 6, un kā katra drauga izvilkto naudas daudzumu var izteikt ar 2 monētām.

Kopējais naudas daudzums	*2 monētu summa*	*Iespējamās 2 monētas*
60	20	3 un 17; 7 un 13
66	22	3 un 19; 5 un 17
72	24	5 un 19; 7 un 17; 11 un 13

Tā kā 60 un 66 alfonus var izteikt tikai 2 dažādos veidos, tad 72 alfoni ir mazākā iespējamā summa.

c) Pamatosim, ka vienīgie 5 pirmskaitļi, kurus var sakārtot augošā secībā tā, ka blakus esošo skaitļu starpība ir 6, ir 5; 11; 17; 23 un 29. Tā kā 2 ir vienīgais pāra pirmskaitlis, tad 2 nevar būt viens no meklētajiem pirmskaitļiem, citādi visu pārējo monētu vērtībām būtu jābūt pāra. Tātad visi meklētie pirmskaitļi ir nepāra un to pēdējie cipari var būt: 1; 3; 5; 7 un 9. Pamatosim, ka visu 5 meklēto pirmskaitļu pēdējiem cipariem jābūt dažādiem. Aplūkosim visas iespējas, kāds var būt pirmā skaitļa pēdējais cipars un attiecīgi pārējo skaitļu pēdējie cipari, ja tiem pieskaita 6:

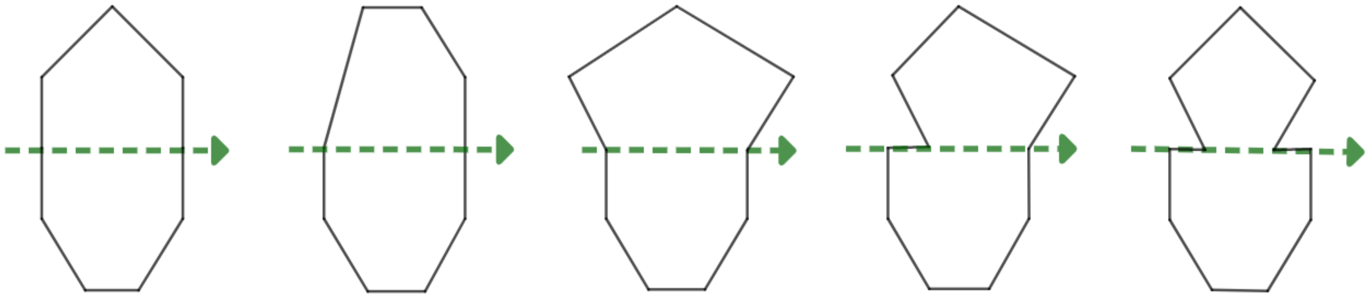
- 1; 7; 3; 9; 5;
- 3; 9; 5; 1; 7;
- 5; 1; 7; 3; 9;
- 7; 3; 9; 5; 1;
- 9; 5; 1; 7; 3.

Kā redzams, meklēto skaitļu pēdējiem cipariem jābūt dažādiem, tas ir, 1; 3; 5; 7 un 9. Vienīgais pirmskaitlis, kura pēdējais cipars ir 5, ir skaitlis 5. Tātad vienīgā iespēja ir, ka vienam no meklētajiem pirmskaitļiem jābūt 5 un eksistē tikai viens pirmskaitļu (monētu) komplekts: 5; 11; 17; 23 un 29.

5. uzdevums

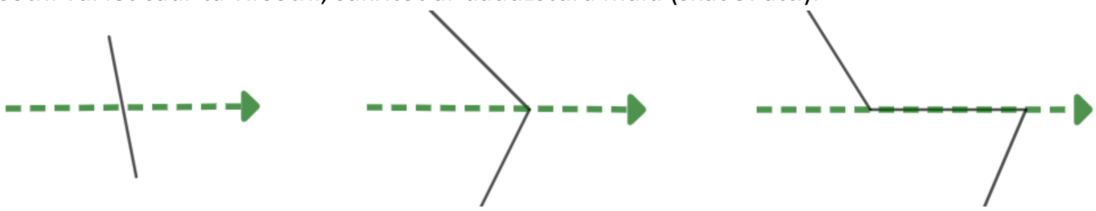
Ezītis meža ielokā iestaigāja taciņu daudzstūra formā. Pēc tam viņš iestaigāja taisnu taciņu pāri daudzstūrim, sadalot to divās daļās – piecstūrī un sešstūrī. Cik malu varēja būt sākotnējo taciņu veidotajam daudzstūrim?

Atrisinājums. Sākotnējam daudzstūrim varēja būt 7; 8; 9; 10 vai 11 malas (skat. 4. att., kurā ar zaļu pārtrauktu bultu attēlota ezīša taisnā taciņa).



4. att.

Pamatosim, ka citu iespēju nav. Ezīša taisnajai taciņai ir divi gali. Taisnās taciņas viens gals var krustot daudzstūra malu, iet caur tā virsotni vai iet caur tā virsotni, sakrītot ar daudzstūra malu (skat 5. att.).



5. att.

Visvairāk jaunu malu rodas, ja taciņa krustos daudzstūra malas. Tā kā daudzstūri sadalīja 2 figūrās (piecstūrī un sešstūrī), tad taciņa var krustot tikai 2 malas, tātad vairāk kā 4 jaunas malas nevar veidoties un mazākais iespējamais malu skaits ir 7. Ja nerodas neviena jauna mala, tad lielākais iespējamais malu skaits ir $5 + 6 = 11$.

6. uzdevums
Kāds var būt četrciparu skaitlis, kurš kļūst četras reizes lielāks, kad tā ciparus uzraksta pretējā secībā?

Atrisinājums. Uzdevumā prasīts atrast skaitli $\overline{abcd}$, lai $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$. Varam secināt, ka $a < 3$, jo citādi $3000 \cdot 4 = 12000$ un mēs iegūtu piecciparu skaitli. Skaitlis $\overline{dcba}$ ir pāra skaitlis, tāpēc ciparam a jābūt pāra, no kurienes secinām, ka $a = 2$. No $\overline{2bcd} \cdot 4 = \overline{dcb2}$ iegūstam, ka $d \geq 8$, bet $d \cdot 4$ beidzas ar ciparu 2, tāpēc $d = 8$. Rezultātā esam ieguvuši, ka $\overline{2bc8} \cdot 4 = \overline{8cb2}$ jeb

$$8000 + 400b + 40c + 32 = 8000 + 100c + 10b + 2.$$

Savelkot līdzīgos saskaitāmos un abas puses izdalot ar 30, iegūstam

$$390b + 30 = 60c;$$
$$13b + 1 = 2c.$$

Izteiksmes labā puse ir pāra skaitlis, tāpēc b jābūt nepāra ciparam un mazākam nekā 2. Iegūstam, ka $b = 1$ un $c = 7$. Prasītais skaitlis ir 2178.

7. uzdevums
Kāds var būt mazākais skaitlis, kuram nodzēšot pirmo ciparu, tas kļūst 73 reizes mazāks?

Atrisinājums. Ar x apzīmēsim skaitļa pirmo ciparu, bet ar y skaitli, kas izveidojas, nodzēšot x no sākotnējā skaitļa. Pēc uzdevuma nosacījumiem iegūstam, ka $10^n \cdot x + y = 73y$ jeb $10^n \cdot x = 72y$. Skaitlis 72 satur reizinātāju 9, tāpēc $10^n \cdot x$ arī jādalās ar 9. Tā kā 10^n nedalās ar 9, tad x jādalās ar 9. Tā kā x ir cipars, tad $x = 9$. Varam vienkāršot izteiksmi un iegūt, ka $10^n = 8y$. Tātad $y = \frac{10^n}{8}$. Tā kā y ir vesels skaitlis, tad jāatrod mazākais n, lai dalījums būtu vesels skaitlis. Tas notiek ja $n = 3$, jo tad $y = \frac{1000}{8} = 125$. Secinām, ka meklētais skaitlis ir

$$10^3 \cdot 9 + 125 = 9125 = 73 \cdot 125.$$

2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

Nellija uzrakstīja kāda skaitļa visus dalītājus. Vai var gadīties, ka šim skaitlim ir

a) tieši 8 dažādi dalītāji un divi no tiem ir 15 un 21;

b) tieši 16 dažādi dalītāji un divi no tiem ir 44 un 46?

Atrisinājums. a) Jā, var gadīties, piemēram, skaitlim 105 ir tieši 8 dažādi dalītāji, tai skaitā dalītāji 15 un 21.
Tā kā $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, tad aplūkosim visus iespējamos skaitļa 105 dalītājus (skat. tabulu)

Nr. p. k.	*Skaitļa 105 dalītāji*
1.	1
2.	3
3.	5
4.	7
5.	$3 \cdot 5 = 15$
6.	$3 \cdot 7 = 21$
7.	$5 \cdot 7 = 35$
8.	$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

b) Jā, var gadīties, piemēram, skaitlim 2024 ir tieši 16 dalītāji, tai skaitā dalītāji 44 un 46.
Tā kā $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, tad aplūkosim visus iespējamos skaitļa 2024 dalītājus (skat. tabulu).

Nr. p. k.	*Skaitļa 105 dalītāji*
1.	1
2.	2
3.	11
4.	23
5.	$2 \cdot 2 = 4$
6.	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
7.	$2 \cdot 11 = 22$
8.	$2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$
9.	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 88$
10.	$2 \cdot 23 = 46$
11.	$2 \cdot 2 \cdot 23 = 92$
12.	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 = 184$
13.	$11 \cdot 23 = 253$
14.	$2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$
15.	$2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = 1012$
16.	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$

2. uzdevums

Katrs no 17 rūķiem uz lapas uzrakstīja savu mīļāko skaitli un nostājās aplī. Izrādījās, ka visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi. Vai var gadīties, ka katra rūķa mīļākais skaitlis ir vienāds ar divu blakus esošo rūķu mīļāko skaitļu vidējo aritmētisko?

Atrisinājums. Nē, tā nevar gadīties. Ar *M* apzīmējam vismazāko no uzrakstītajiem skaitļiem. Tā kā visi skaitļi ir dažādi, tad abi *M* blakus esošie skaitļi *A* un *B* ir lielāki nekā *M*. Tātad arī skaitļu *A* un *B* vidējais aritmētiskais ir lielāks nekā *M*. Tā kā vismazākajam no uzrakstītajiem skaitļiem nevar atrast kaimiņus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, tad prasītais nav iespējams.

3. uzdevums

Uz galda ir novietotas vairākas vienādas monētas. Mārtiņš spēlē spēli, griežot monētas uz otru pusi – no ģerboņa (Ģ) uz ciparu (C) un otrādi. Katrā spēlē jāveic vismaz viens gājiens, un katrā gājienā var apgriezt otrādi vienu un to pašu skaitu monētu. Katras spēles sākumā tiek pateikts, cik monētas var apgriezt katrā gājienā. Spēles sākumā visām monētām ir redzams cipars.

Piemēram, vienā spēlē Mārtiņš var sākt ar 5 monētām, katrā gājienā apgriezt 2 monētas un veikt trīs gājienus šādi:

Sākums:	C	C	C	C	C
1. gājiens:	C	Ģ	Ģ	C	C
2. gājiens:	Ģ	Ģ	C	C	C
3. gājiens:	Ģ	Ģ	C	Ģ	Ģ

- **a)** Parādi, kā Mārtiņam izspēlēt spēli ar 14 monētām, katrā gājienā apgriežot 4 monētas, tā, lai pēc trīs gājieniem tieši 10 monētām būtu redzams ģerbonis!
- **b)** Paskaidro, kā Mārtiņam izspēlēt spēli ar 154 monētām, katrā gājienā apgriežot 52 monētas, tā, lai pēc trīs gājieniem visām monētām būtu redzams ģerbonis!
- **c)** Kāds ir mazākais iespējamais gājienu skaits, lai Mārtiņš izspēlētu spēli ar 26 monētām, katrā gājienā apgriežot 4 monētas, tā, lai spēles beigās visām monētām būtu redzams ģerbonis?
- **d)** Pierādi, ka, sākot spēli ar 154 monētām un katrā gājienā apgriežot nepāra skaita monētas, nevar panākt, ka pēc trīs gājieniem visām monētām būtu redzams ģerbonis!

Atrisinājums. a) Lai no 14 monētām tieši 10 monētām būtu redzams ģerbonis, trīs gājienus var veikt, piemēram, šādi (iekrāsotas tās monētas, kuras attiecīgajā gājienā tika apgrieztas):

Sākums:	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
1. gājiens:	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
2. gājiens:	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	C	C	C	C	C	C
3. gājiens:	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	Ģ	C	Ģ	Ģ	Ģ	C	C	C

b) Tā kā katrā gājienā tiek apgrieztas 52 monētas, tad trīs gājienu laikā notiks $3 \cdot 52 = 156$ monētu apgriešanas reizes. Spēli sāk ar 154 monētām, kurām redzams cipars un spēles beigās jāredz tikai ģerbonis. To var iegūt, trīs gājienu laikā 153 monētas apgriežot tieši vienu reizi un 1 monētu apgriežot trīs reizes (katrā gājienā apgriež vienu un to pašu monētu). Gājienus var attēlot šādi (iekrāsotas tās monētas, kuras attiecīgajā gājienā tika apgrieztas):

$$\text{Sākums:}\quad \overbrace{\text{C}\ldots\text{C}}^{154}$$

$$\text{1. gājiens:}\quad \overbrace{\text{Ģ}\ldots\text{Ģ}}^{52}\ \overbrace{\text{C}\ldots\text{C}}^{102}$$

$$\text{2. gājiens:}\quad \overbrace{\text{Ģ}\ldots\text{Ģ}}^{51}\,\text{C}\,\overbrace{\text{Ģ}\ldots\text{Ģ}}^{51}\,\overbrace{\text{C}\ldots\text{C}}^{51}$$

$$\text{3. gājiens:}\quad \overbrace{\text{Ģ}\ldots\text{Ģ}}^{51}\,\text{Ģ}\,\overbrace{\text{Ģ}\ldots\text{Ģ}}^{51}\,\overbrace{\text{Ģ}\ldots\text{Ģ}}^{51}$$

c) Mazākais gājienu skaits ir 7. Parādīsim, kā to var izdarīt. Pirmo trīs gājienu laikā 12 monētas tiek apgrieztas vienu reizi, tātad iegūstam 12 monētas ar redzamu ģerboni. Ar atlikušajām 14 monētām trīs gājienu laikā rīkosimies, kā parādīts a) gadījumā, iegūstot vēl 10 monētas ar redzamu ģerboni. Tātad pēc sešiem gājieniem iegūstam, ka 22 monētas ir ar redzamu ģerboni. Pēdējā gājienā atlikušās 4 monētas ar redzamu ciparu apgriežam, un iegūstam visas monētas ar redzamu ģerboni.

Pamatosim, ka mazāk gājienos to nevar izdarīt. Ja sešos vai mazāk gājienos apgriež 4 monētas, tad lielākais apgriezto monētu skaits ir $6 \cdot 4 = 24$ monētas, bet kopā ir nepieciešams apgriezt visas 26 monētas, tātad ir nepieciešami vismaz 7 gājieni.

d) Ievērosim, ka pāra skaits monētu var būt arī 0 monētu. Attēlosim iespējamos rezultātus pēc trīs gājieniem, sākot spēli ar 154 monētām un katrā gājienā apgriežot nepāra skaita monētas (iekrāsotas tās monētas, kuras attiecīgajā gājienā tika apgrieztas):

Sākums:	$\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{154}$
1. gājiens:	$\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\quad\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}$
2. gājiens:	$\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}\quad\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}$ vai $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}\quad\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}$, tātad abos gadījumos: $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\quad\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}$.
3. gājiens:	$\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}\quad\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}$ vai $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}\quad\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{pāra}}\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{pāra}}$, tātad abos gadījumos: $\overbrace{\text{Ģ}\ldots\ \text{Ģ}}^{\text{nepāra}}\quad\overbrace{\text{C}\ldots\ \text{C}}^{\text{nepāra}}$.

Tā kā pēc trīs gājieniem gan monētas ar redzamu ģerboni, gan ciparu būs nepāra skaitā, tad 154 monētas ar redzamu ģerboni nevar iegūt.

4. uzdevums

Kāds rūķis savā dzimšanas dienas ballītē viesiem iedeva tik daudz pilnīgi vienādus, mazus kubiņus, cik gadu viņam todien palika. Viesi no visiem mazajiem kubiņiem salika ļoti lielu kubu bez caurumiem. Zināms, ka lielajā kubā 168 kubiņi bija tādi, kuriem tieši četras skaldnes saskārās ar citu mazo kubu skaldnēm. Cik gadu dzimšanas dienu svinēja rūķis?

Atrisinājums. Rūķis svin 4096 gadu dzimšanas dienu. Aplūkosim, cik mazo kubiņu skaldnes varēja saskarties ar citu kubiņu skaldnēm, ņemot vērā to novietojumu lielajā kubā.

- Ja mazais kubiņš bija lielā kuba iekšpusē, tad visas sešas tā skaldnes saskārās ar citu kubiņu skaldnēm.
- Ja mazais kubiņš bija pie lielā kuba skaldnes, bet ne pie šķautnēm, tad tieši piecas tā skaldnes saskārās ar citu kubiņu skaldnēm.
- Ja mazais kubiņš bija pie lielā kuba šķautnēm, bet ne pie virsotnes (tas ir, ne kuba stūros), tad tieši četras tā skaldnes saskārās ar citu kubiņu skaldnēm.
- Ja mazais kubiņš bija pie lielā kuba virsotnēm (kuba stūros), tad tieši trīs tā skaldnes saskārās ar citu kubu skaldnēm.

Tātad 168 kubiņi, kuru četras skaldnes saskārās ar citu kubiņu skaldnēm, noteikti atradās pie lielā kuba šķautnēm, bet ne pie virsotnēm. Tā kā kubam ir 12 šķautnes, tad pie katras lielā kuba šķautnes, izņemot pie virsotnēm, atradās $168 : 12 = 14$ mazie kubiņi. Tādā gadījumā lielā kuba vienu šķautni veido $14 + 2 = 16$ mazie kubiņi un kopā lielajā kubā ir $16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096$ mazie kubiņi.

5. uzdevums

Fizmatiņu ģimenē ir četri bērni, kuri mācās atbilstoši 5., 6., 9. un 12. klasē. Fizmatiņu tētis ik pēc kāda laika piektdienās saņem bērnu sekmju izrakstus no skolas (neatkarīgi no brīvdienām):

- 5. klases skolēna sekmju izrakstu ik pēc 2 nedēļām;
- 6. klases skolēna – ik pēc 3 nedēļām;
- 9. klases skolēna – ik pēc 5 nedēļām;
- 12. klases skolēna – ik pēc 10 nedēļām.

Skolas gaitas sākās 2023. gada 1. septembrī un ar šo dienu sākas nedēļu uzskaitījums. Vai šajā mācību gadā būs tāda diena, kurā tētis saņems visu četru bērnu sekmju izrakstus?

Atrisinājums. Jā, Fizmatiņu tētis visu četru bērnu izrakstus saņems 29. martā. Meklējam skaitļu 2; 3; 5 un 10 mazāko kopīgo dalāmo. Tā kā 10 dalās ar 2 un 5, tad visu četru skaitļu mazākais kopīgais dalāmais sakrīt ar $MKD(3; 10) = 30$. Tātad tētis tieši pēc 30 nedēļām jeb $30 \cdot 7 = 210$ dienām saņems visu četru bērnu sekmju izrakstus.

Tā kā 2023./2024. mācību gadā ir februāris ar 29 dienām, tad 210 dienas, sākot ar 1. septembri, var sadalīt pa mēnešiem šādi: $210 = 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 29 + 28$. Tātad tētis šajā mācību gadā visus sekmju izrakstus saņems 29. martā.

6. uzdevums

Rūķīšu ciemā notika ūdens balonu mešanas turnīrs. Katrs turnīra dalībnieks spēlēja ar citu tieši vienu reizi. Šajā turnīrā nebija neizšķirtu rezultātu. Pie tam turnīra beigās katrs rūķītis izveidoja sarakstu, kas saturēja:

1) gan to rūķīšu vārdus, kurus viņš uzvarēja,
2) gan to rūķīšu vārdus, kuri zaudēja pret tiem, kurus viņš uzvarēja.

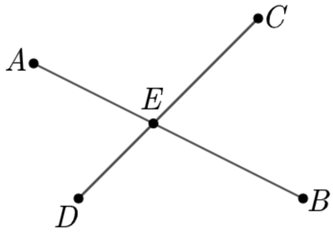
Pamato, ka kāds rūķītis savā sarakstā pieminējis visus pārējos dalībniekus!

Atrisinājums. Ar A apzīmēsim kādu no rūķīšiem, kurš uzvarējis visvairāk mačus. Pieņemsim, ka viņa sarakstā neatrodas visu dalībnieku vārdi. Tas nozīmē, ka ir kāds cits rūķītis B, kurš nav rūķīša A sarakstā. Tātad rūķītis B uzvarēja A un arī nav zaudējis pret nevienu no rūķīšiem, kurus uzvarējis rūķītis A, jo pretējā gadījumā rūķīša B vārds parādītos rūķīša A sarakstā pēc 2. nosacījuma. Tas nozīmē, ka rūķītis B ir uzvarējis tos pašus rūķīšus, kurus uzvarējis rūķītis A, bet papildus uzvarējis arī rūķīti A. Tātad rūķītis B ir uzvarējis vairāk maču nekā rūķītis A, kas ir pretrunā ar to, ka rūķītis A ir viens no rūķīšiem, kas uzvarējis visvairāk maču. Tātad pieņēmums ir aplams un rūķīša A sarakstā ir pieminēti visi pārējie dalībnieki.

7. uzdevums

Kad Valta draugi devās trenēties ar ūdens baloniem pikošanās sezonai, viņš diemžēl nevarēja piedalīties, jo bija saslimis. Neskatoties uz to, viņš devās atbalstīt savus draugus. Katrs no tiem nostājās kādā laukuma vietā tā, lai attālumi starp jebkuriem diviem draugiem būtu atšķirīgi. Pēc Valta signāla katrs meta ar balonu sev tuvākajam draugam. Lai cik reizes netiktu atkārtoti šādi metieni dažādos izkārtojumos, Valts ievēroja, ka balonu lidojuma trajektorijas nekad nekrustojas. Pamato, kāpēc Valta novērojums ir patiess vienmēr!

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka pastāv tāda situāciju, ka balonu lidojumu trajektorijas krustojas. Apzīmēsim draugus ar A, B, C, D un metienu trajektoriju krustpunktu ar E (skat. 6. att.).



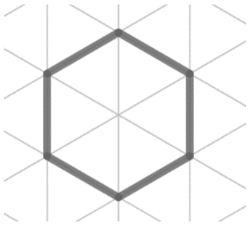
6. att.

No dotā zināms, ka nogrieznis AB ir īsāks nekā nogrieznis AC jeb $AB < AC$. Līdzīgi iegūstam, ka arī $CD < BD$, no kurienes secinām, ka $AB + CD < AC + BD$. Bet no otras puses pēc trīsstūra nevienādības ir zināms, ka $DE + BE > BD$ un $CE + AE > AC$. Tātad $AB + CD = DE + CE + BE + AE > BD + AC$. Iegūta pretruna, jo $AB < AC$ un $CD < BD$, tātad pieņēmums ir aplams un balonu trajektorijas nekad nekrustojas.

3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

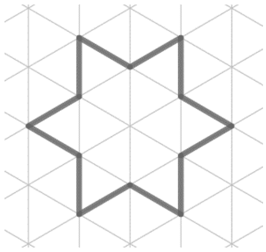
1. uzdevums

Lapa ar taisnēm ir sadalīta daudz vienādos trijstūros, kuriem visas malas ir 1 vienību garas un katra trijstūra laukums ir 1 laukuma vienība (skat. 5. lpp.). No šīs lapas Kristaps gatavo Ziemassvētku dekorācijas, pa dotajām līnijām izgriežot dažādas figūras. Kristaps veido tikai tādas dekorācijas, kurām gan perimetra, gan laukuma skaitliskā vērtība ir tāda pati kā malu skaits (piemēram, skat. 7. att., kur visi trīs minētie lielumi (perimetrs, laukums, malu skaits) ir vienādi ar 6). Uzzīmē figūru, kurai ir 12 malas un gan perimetra, gan laukuma skaitliskā vērtība ir 12!



7. att.

Atrisinājums. Figūra, kuras perimetra skaitliskā vērtība, laukuma skaitliskā vērtība un malu skaits ir 12, parādīta 8. att.



8. att.

2. uzdevums

Gar kādu rūķu ciemu stiepjas garš žogs. Rūķu bērni uz vairākiem žoga stabiņiem uzrakstīja pa vienam ciparam tā, ka visu ciparu summa ir 2023. Pēc tam visu ciparu veidotajam skaitlim rūķi pieskaitīja skaitli 2023 un ieguva jaunu skaitli. Vai ir iespējams, ka jaunā skaitļa ciparu summa ir 14?

Atrisinājums. Jā, tas ir iespējams. Piemēram, sākumā uzrakstītie cipari varēja veidot 225-ciparu skaitli, kas sākas ar 7 un tam ir 224 devītnieki, tas ir, uzrakstīja skaitli $7\underbrace{999\ldots999}_{224\,\text{"9"}}$. Šī skaitļa ciparu summa ir $7 + 224 \cdot 9 = 2023$. Ja šim skaitlim pieskaita 2023, iegūst 225-ciparu skaitli 80…02022 (skat. 9. att.), un tā ciparu summa ir $8 + 2 + 2 + 2 = 14$.

$$\begin{array}{r} 799\cdots999999 \\ +\qquad\quad 2023 \\ \hline 800\cdots002022 \end{array}$$

9. att.

3. uzdevums

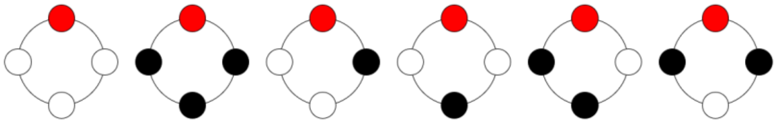
Desmit draudzenes veido rokassprādzes, uzverot uz gumijas vienāda izmēra pērlītes, kuras var būt dažādās krāsās. Divas rokassprādzes tiek uzskatītas par vienādām, ja vienu var iegūt no otras, to pagriežot vai apmetot otrādi. Vai noteikti vismaz divām draudzenēm būs vienādas rokassprādzes, ja rokassprādzes veido:

- **a)** no 4 pērlītēm, no kurām viena noteikti ir sarkana, bet pārējās var būt gan melnā, gan baltā krāsā;
- **b)** no 4 pērlītēm, kuras var būt gan melnā, gan baltā krāsā;
- **c)** no 5 pērlītēm, no kurām viena noteikti ir sarkana, bet pārējās var būt gan melnā, gan baltā krāsā;
- **d)** no 5 pērlītēm, kuras var būt gan melnā, gan baltā krāsā?

Atrisinājums. a) Jā, noteikti. Pamatosim, ka iespējams izveidot tikai 6 dažādas rokassprādzes. Tā kā no 4 pērlītēm viena noteikti ir sarkana, tad tikai 3 pērlītes rokassprādzē var būt novietotas dažādi. Apskatām visus iespējamos gadījumus:

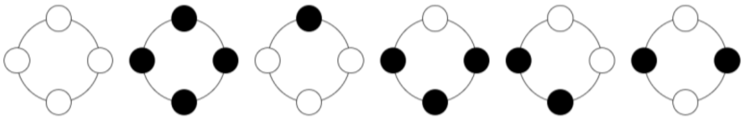
- visas 3 pērlītes var būt vai nu baltas, vai melnas, tātad var iegūt divas dažādas rokassprādzes;
- ja 2 pērlītes ir baltas un viena ir melna, tad melnā pērlīte var būt novietota vai nu blakus sarkanajai, vai starp baltajām pērlītēm, tātad iegūstam 2 dažādas rokassprādzes;
- līdzīgi iegūstam vēl 2 dažādas rokassprādzes, ja ir 2 melnas un 1 balta pērlīte.

Tātad kopā iespējams izveidot $2+2+2=6$ dažādas rokassprādzes (skat. 10. att.). Tā kā ir 10 draudzenes un tikai 6 iespējas izveidot dažādas rokassprādzes, tad pēc Dirihlē principa secinām, ka vismaz divas draudzenes izveidos vienādas rokassprādzes.



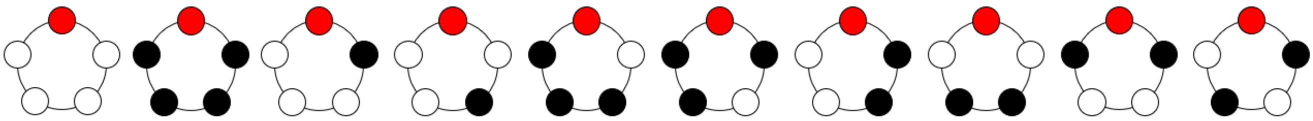
10. att.

b) Jā, noteikti. Pamatosim, ka iespējams izveidot tikai 6 dažādas rokassprādzes. Visas 4 pērlītes var būt vai nu baltas, vai melnas, veidojot 2 dažādas rokassprādzes. Ja 3 pērlītes ir baltas un viena ir melna, tad iespējams izveidot tikai vienu atšķirīgu rokassprādzi, lai kur arī noliktu melno pērlīti. Līdzīgi var iegūt vienu atšķirīgu rokassprādzi, ja 3 pērlītes ir melnas un viena ir balta. Ja 2 pērlītes ir baltas un 2 ir melnas, tad abas melnās pērlītes var novietot blakus vai katru pa vidu divām baltajām pērlītēm, tātad iegūstam 2 dažādas rokassprādzes. Tātad kopā iespējams izveidot $2+2+2=6$ dažādas rokassprādzes (skat. 11. att.). Tā kā ir 10 draudzenes un tikai 6 iespējas izveidot dažādas rokassprādzes, tad pēc Dirihlē principa secinām, ka vismaz divas draudzenes izveidos vienādas rokassprādzes.



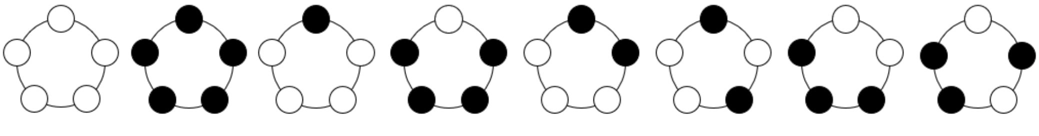
11. att.

c) Nē, ne noteikti. Parādīsim, ka iespējams izveidot 10 dažādas rokassprādzes. Tā kā no 5 pērlītēm viena noteikti ir sarkana, tad tikai 4 pērlītes rokassprādzē var būt novietotas dažādi. Visas 4 pērlītes var būt vai nu baltas, vai melnas, veidojot 2 dažādas rokassprādzes. Ja 3 pērlītes ir baltas un viena ir melna, tad melnā pērlīte var būt novietota vai nu blakus sarkanajai, vai starp divām baltajām pērlītēm, tātad iegūstam 2 dažādas rokassprādzes. Līdzīgi iegūstam vēl 2 dažādas rokassprādzes ar 3 melnām un 1 baltu pērlīti. Ja 2 pērlītes ir baltas un 2 ir melnas, tad abas melnās pērlītes var novietot blakus vienu otrai vai nu blakus sarkanajai pērlītei vai pa vidu baltajām pērlītēm. Ja melnās pērlītes nenovieto blakus vienu otrai, tad katru no tām var novietot no abām pusēm blakus sarkanajai pērlītei, vai arī vienu melno pērlīti blakus sarkanajai un otru var novietot pa vidu baltajām pērlītēm. Tātad kopā iespējams izveidot $2+2+2+4=10$ dažādas rokassprādzes (skat. 12. att.). Tā kā ir 10 draudzenes, tad katra no tām var izveidot atšķirīgu rokassprādzi.



12. att.

d) Jā, noteikti. Pamatosim, ka iespējams izveidot tikai 8 dažādas rokassprādzes. Visas 5 pērlītes var būt vai nu baltas, vai melnas, veidojot 2 dažādas rokassprādzes. Ja 4 pērlītes ir baltas un viena ir melna, tad iespējams izveidot tikai vienu atšķirīgu rokassprādzi, lai kur arī noliktu melno pērlīti. Līdzīgi var iegūt vienu atšķirīgu rokassprādzi, ja 4 pērlītes ir melnas un viena ir balta. Ja 3 pērlītes ir baltas un 2 ir melnas, tad abas melnās pērlītes var novietot blakus vai katru pa vidu divām baltajām pērlītēm, tātad iegūstam 2 dažādas rokassprādzes. Līdzīgi vari iegūt vēl 2 dažādas rokassprādzes, ja 3 pērlītes ir melnas un 2 ir baltas. Tātad kopā iespējams izveidot $2+2+2+2=8$ dažādas rokassprādzes (skat. 13. att.). Tā kā ir 10 draudzenes un tikai 8 iespējas izveidot dažādas rokassprādzes, tad pēc Dirihlē principa secinām, ka vismaz divas draudzenes izveidos vienādas rokassprādzes.



13. att.

4. uzdevums

Andrejam ir spēļu kauliņi, kuriem ir taisnstūra forma, un katram kauliņam viena mala ir par 1 cm garāka nekā otra. Zināms, ka kauliņu malu garumi ir 1 cm, 2 cm, 3 cm 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm (katra vērtība ir malas garums tieši diviem kauliņiem). No visiem šiem kauliņiem Andrejs saliek lielu taisnstūri, kura garums ir par 1 cm lielāks nekā platums. Kādi var būt lielā taisnstūra izmēri?

Atrisinājums. Pamatosim, ka izveidot taisnstūri atbilstoši uzdevuma nosacījumiem nav iespējams.

Tā kā ir jāizmanto divi kauliņi ar malas garumu 1 cm (katra dotā vērtība ir malas garums tieši diviem kauliņiem) un katra kauliņa viena mala ir par 1 cm garāka nekā otra, tad divi kauliņi ir ar izmēriem 1 cm $\times$ 2 cm.

Līdzīgi iegūstam, ka jāizmanto divi kauliņi ar izmēriem 3 cm $\times$ 4 cm; 5 cm $\times$ 6 cm un 7 cm $\times$ 8 cm, tad to kopējais laukums ir $2 \cdot (2 + 12 + 30 + 56) = 200$ cm^2. Sadalot 200 pirmreizinātājos $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, ievērojam, ka 200 nevar izteikt kā divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu reizinājumu, tātad nevar iegūt taisnstūri, kura laukums ir 200 cm^2 un kura garums ir par 1 cm lielāks nekā platums.

5. uzdevums

Trīs pirāti atrada vientuļas salas krastā izskalotu kuģi ar zelta monētām. Sākumā viņi visas zelta monētas sadalīja attiecībā $8 : 6 : 5$. Pēc tam pārdomāja un visas monētas sadalīja attiecībā $7 : 5 : 4$, tagad viens pirāts saņem par 25 monētām vairāk nekā pirms tam. Cik zelta monētu saņēma katrs pirāts sākumā?

Atrisinājums. Vispirms aplūkosim, kura pirāta ieguvums palielinās, mainot zelta monētu dalīšanas veidu. Dalot monētas attiecībā $8 : 6 : 5$, tās var sadalīt $8 + 6 + 5 = 19$ vienādās daļās, un katrs pirāts sākumā saņēma $\frac{8}{19}$; $\frac{6}{19}$ un $\frac{5}{19}$ visu monētu. Dalot monētas attiecībā $7 : 5 : 4$, pirāti saņem attiecīgi $\frac{7}{16}$; $\frac{5}{16}$ un $\frac{4}{16}$ jeb $\frac{1}{4}$ visu monētu. Salīdzināsim katra pirāta sākumā saņemto monētu skaitu ar to, cik monētas katrs saņem, mainot zelta monētu dalīšanas veidu.

- Tā kā $\frac{8}{19} = \frac{128}{16\cdot19} < \frac{133}{16\cdot19} = \frac{7}{16}$, tad, mainot monētu dalīšanas veidu, pirmais pirāts saņem vairāk monētu.
- Tā kā $\frac{6}{19} = \frac{96}{16\cdot19} > \frac{95}{16\cdot19} = \frac{5}{16}$, tad, mainot monētu dalīšanas veidu, otrais pirāts saņem mazāk monētu.
- Tā kā $\frac{5}{19} = \frac{20}{4\cdot19} > \frac{19}{4\cdot19} = \frac{1}{4}$, tad, mainot monētu dalīšanas kārtību, trešais pirāts saņem mazāk monētu.

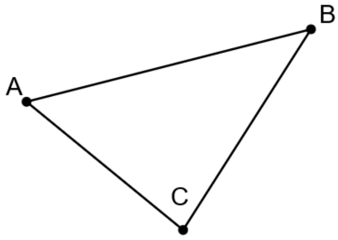
Iegūstam, ka tikai pirmais pirāts saņem vairāk monētu un 25 monētām atbilst $\frac{7}{16} - \frac{8}{19} = \frac{133}{16\cdot19} - \frac{128}{16\cdot19} = \frac{5}{304}$ visu monētu. Tātad kopā uz kuģa bija $25 : 5 \cdot 304 = 1520$ zelta monētu. Zinot visu monētu skaitu, varam aprēķināt, cik monētu sākumā saņēma katrs pirāts:

- pirmais pirāts saņēma $\frac{8}{19}$ no $1520 = 1520 : 19 \cdot 8 = 640$ zelta monētu;
- otrais pirāts saņēma $\frac{6}{19}$ no $1520 = 1520 : 19 \cdot 6 = 480$ zelta monētu;
- trešais pirāts saņēma $\frac{5}{19}$ no $1520 = 1520 : 19 \cdot 5 = 400$ zelta monētu.

6. uzdevums

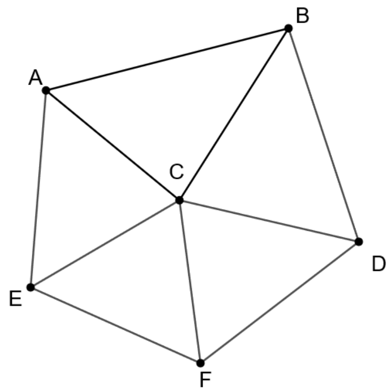
Beidzot ir pienākusi ziema un var atklāt pikošanās sezonu. Valts ar saviem draugiem nostājās kādā laukuma vietā tā, lai attālumi starp jebkuriem diviem draugiem būtu atšķirīgi. Pēc Valta signāla katrs meta ar sniega piku sev tuvākajam draugam. Pēc pāris mēģinājumiem viņiem pievienojās Baiba. Domājot par stratēģiju, kā nostāties laukumā tā, lai pa viņu mestu ar sniega pikām pēc iespējas mazāk cilvēku, viņa nonāca pie secinājuma, ka neatkarīgi no tā, kur viņa nostājas, vairāk kā 5 cilvēki viņai nevar vienlaikus iemest ar sniega piku. Pamatojiet, ka Baibas novērojums (tas ir, lielākais skaits cilvēku, kas var mest pa kādu citu kopīgu cilvēku, ir 5, vienmēr ir patiess!

Atrisinājums. Apskatīsim situāciju, kurā divi draugi A un B abi vienlaikus met pa draugu C. Tā kā viņi abi met pa vienu cilvēku, tad tas nozīmē, ka attālums starp A un B jeb nogrieznis AB ir garāks nekā nogriežņi AC un BC (skat. 14. att.).



14. att.

Tā kā lielākais leņķis atrodas pret garāko malu trīsstūrī, tad varam secināt, ka leņķis $\sphericalangle C$ ir lielākais trijstūra leņķis. Trīsstūra lielākais leņķis nevar būt mazāks kā $60°$ (jo tad visu leņķu summa būtu mazāka nekā $180°$), bet tā kā visas malas šajā trīsstūrī ir dažāda garuma, tad leņķis $\sphericalangle C$ noteikti ir lielāks nekā $60°$. Tātad, ja mēs pievienotu papildu cilvēkus D, F un E, lai tie arī mestu pa C, tad būtu jāņem vērā tie paši spriedumi par lielākajiem leņķiem (skat. 15. att.).



15. att.

Ja pa C mestu vismaz 6 cilvēki, tad būtu nepieciešams vairāk nekā $360°$, jo neviens no platajiem leņķiem nevar būt mazāks vai vienāds ar $60°$. Tātad lielākais skaits cilvēku, kas var mest pa kādu citu kopīgu cilvēku, ir 5.

7. uzdevums

Dots maiss ar 460 vienādiem kvadrātiņiem ar izmēriem 1×1 un četras bundžas ar Ziemassvētku krāsām – sarkanu, zaļu, baltu un dzeltenu. Vai ir iespējams katru kvadrātiņa malu nokrāsot kādā no krāsām (katram kvadrātiņam malu krāsošanai jāizmanto visas 4 krāsas) tā, lai no visiem kvadrātiņiem varētu izveidot taisnstūri ar izmēriem 20×23, kura katra mala ir savā krāsā un kurā katru divu blakus esošu kvadrātiņu kopīgās malas ir vienādā krāsā?

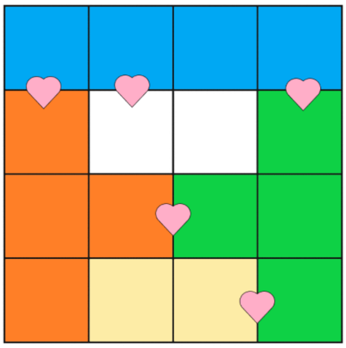
Atrisinājums. Pamatosim, ka to nevar izdarīt. Pieņemsim pretējo, ka mums ir dots taisnstūris ar izmēriem 20×23, kuram katra mala ir citā krāsā. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka viena no malām ar garumu 23 ir sarkanā krāsā. Aplūkosim, cik kopā ir sarkano malu taisnstūrī, kas sastāv no kvadrātiņiem. No pieņēmuma iegūstam, ka uz taisnstūra perimetra ir 23 sarkanu mazo kvadrātiņu malu. Tomēr taisnstūra iekšienē tam jābūt pāra skaitlim, jo blakus esošo kvadrātiņu kopīgajām malām ir jābūt vienādā krāsā. Tātad kopumā ir nepāra skaits sarkano malu. Iegūstam pretrunu ar to, ka katrs no kvadrātiņiem satur sarkanu malu, jo tie kopumā ir 460, kas ir pāra skaits. Secinām, ka pieņēmums, ka eksistē prasītais taisnstūris, ir aplams.

4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

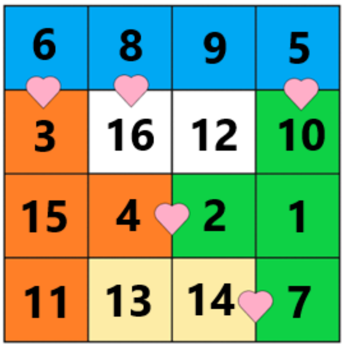
Režģa katrā rūtiņā (skat. 16. att.) ieraksti vienu skaitli no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai izpildītos visi nosacījumi:

- dzelteni iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 27;
- zaļi iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 20;
- oranži iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 33;
- zili iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 28;
- rūtiņās, starp kurām ir sirsniņa, viens no ierakstītajiem skaitļiem ir tieši divas reizes lielāks par otru!



16. att.

Atrisinājums. Skaitļu izvietojumu skat., piemēram, 17. att.

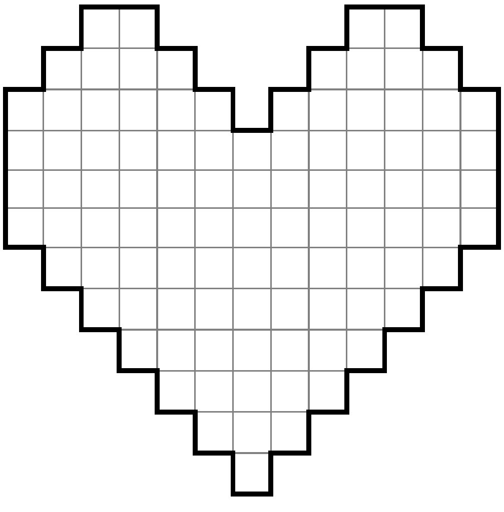


17. att.

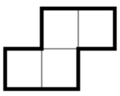
2. uzdevums

Tuvojas mīlestības svētki – Valentīndiena. Kāds ir lielākais skaits 19. att. doto figūru, ko var izgriezt no 18. att. dotās figūras, ja jābūt izgrieztai arī tieši vienai 20. att. figūrai?

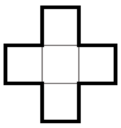
Piezīme. Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu līnijām, 19. att. figūru drīkst pagriezt un apmest otrādi.



18. att.

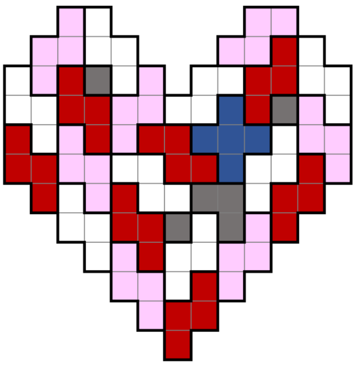


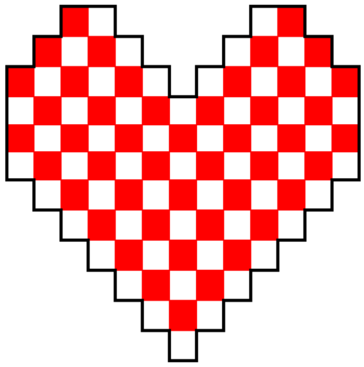
19. att.



20. att.

Atrisinājums. Lielākais skaits, ko no 18. att. dotās figūras var izgriezt 19. att. figūras, ir 22. Piemērs, kā to var izdarīt, redzams 21. att. Pamatosim, ka vairāk figūru izgriezt nevar.
Iekrāsosim 18. att. figūru šaha galdiņa veidā (skat. 22. att.). Sarkanā krāsā ir nokrāsotas 46 rūtiņas, bet baltā krāsā ir nokrāsotas 53 rūtiņas. Ievērosim, ka, lai kā arī izgrieztu 20. att. figūru, tā vienmēr noklāj vismaz vienu sarkanu rūtiņu (skat. 23. att.), tātad atliek ne vairāk kā 45 sarkanas rūtiņas. Tā kā katra 19. att. figūra vienmēr noklāj tieši divas sarkanas rūtiņas (skat. 23. att.), tad no 18. att. figūras vēl var izgriezt ne vairāk kā 22 šīs figūras, jo $45 : 2 = 22$, atl. 1.


21. att.


22. att.


23. att.

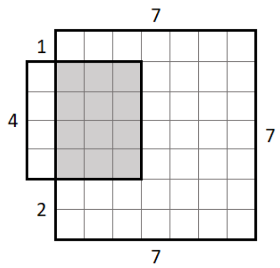
3. uzdevums
Rūķim Valentīnam Mīlīgajam 14. februārī paliek 869 gadi. Viņš uz dzimšanas dienas viesībām uzlūdza tikai tos rūķus, kas viņam atsūtīja tādu piecciparu skaitli $\overline{V869M}$, kas dalās ar rūķa mīļāko skaitli 15. Kādus skaitļus rūķi varēja aizsūtīt Valentīnam Mīlīgajam?
Atrisinājums. Rūķi Valentīnam Mīlīgajam varēja aizsūtīt šādus skaitļus: 18690; 48690; 78690; 28695; 58695 vai 88695. Pamatosim, ka tikai šie seši skaitļi atbilst nosacījumiem. Tā kā skaitļi 3 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad, lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās ar 3 un ar 5. Lai skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam ir jābūt 0 vai 5. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Aplūkojam visas iespējas.

- Ja $M = 0$, tad skaitļa $\overline{V8690}$ ciparu summa ir $V + 8 + 6 + 9 + 0 = V + 23$. Lai $V + 23$ dalītos ar 3, tad V var būt 1; 4 vai 7. Tātad iegūstam trīs skaitļus: 18690; 48690; 78690.
- Ja $M = 5$, tad skaitļa $\overline{V8695}$ ciparu summa ir $V + 8 + 6 + 9 + 5 = V + 28$. Lai $V + 28$ dalītos ar 3, tad V var būt 2; 5 vai 8. Tātad iegūstam trīs skaitļus: 28695; 58695 vai 88695.

4. uzdevums
Jūlija no rūtiņu lapas izgrieza vairākus kvadrātus ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, kur n ir naturāls skaitlis, kas ir lielāks nekā 1. Pēc tam Jūlija nejauši izvēlējās 2 izgrieztos kvadrātus, tos daļēji uzlika vienu otram virsū jeb pārklāja un aprēķināja abu kvadrātu kopīgi veidotās figūras perimetru un pārklātās daļas laukumu. Piemēram, 24. att. kvadrāts ar izmēriem 4×4 rūtiņas pārklāj kvadrātu ar izmēriem 7×7 rūtiņas un iegūtās figūras perimetrs ir

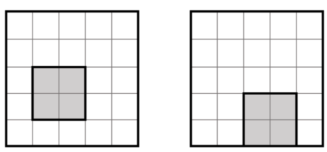
$$P = 7 + 7 + 7 + 2 + 1 + 4 + 1 + 1 = 30,$$

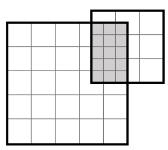
bet pārklātās daļas (iekrāsota pelēka) laukums ir $S = 4 \cdot 3 = 12$.



24. att.

Jūlija, kvadrātus pārklājot, ievēroja divus noteikumus:
1) viens kvadrāts nedrīkst pilnībā pārklāt otru kvadrātu (neder 25. att. pārklājumi);
2) kvadrātu malām jāiet pa rūtiņu līnijām (neder 26. att. pārklājums).


25. att.


26. att.

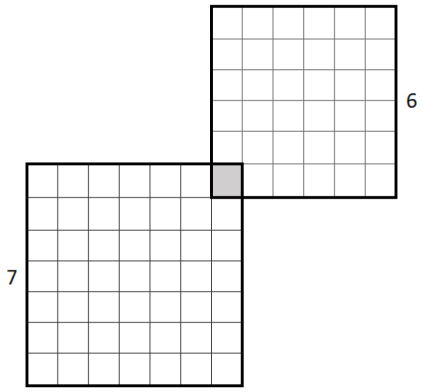
a) Parādi, kā jāpārklāj kvadrāti ar izmēriem 6×6 un 7×7 rūtiņas, lai iegūtās figūras perimetrs būtu 48!

b) Parādi, kā jāpārklāj kvadrāti ar izmēriem 6×6 un 7×7 rūtiņas, lai iegūtās figūras perimetrs būtu 30!

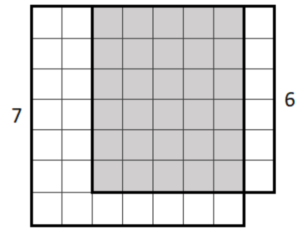
c) Abu kvadrātu pārklātās daļas laukums ir 1, bet visas iegūtās figūras perimetrs ir 32. Kādi var būt abu kvadrātu izmēri?

d) Abu kvadrātu pārklātās daļas laukums ir 12, bet visas iegūtās figūras perimetrs ir 30. Kādi var būt abu kvadrātu izmēri?

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 27. att., kurā iegūtās figūras perimetrs ir $P = 7 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 48$.
b) Skat., piemēram, 28. att., kurā iegūtās figūras perimetrs ir $P = 7 \cdot 2 + 8 + 6 + 1 \cdot 2 = 30$.



27. att.

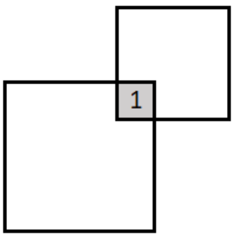


28. att.

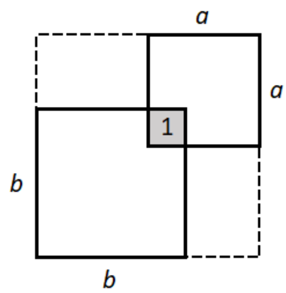
c) 1. atrisinājums. Pamatosim, ka kvadrāti var būt tikai ar izmēriem:

- 2×2 un 7×7 rūtiņas;
- 3×3 un 6×6 rūtiņas;
- 4×4 un 5×5 rūtiņas.

Tā kā pārklātās daļas laukums ir 1, tad pārklātā daļa ir kvadrāts ar izmēriem 1×1 rūtiņa un tā perimetrs ir 4 (skat. 29. att.). Tā kā visas figūras perimetrs ir 32, tad abu kvadrātu perimetru summa ir $32 + 4 = 36$. Kvadrāta perimetrs ir četras reizes lielāks nekā kvadrāta mala. Tā kā abu kvadrātu perimetru summa ir 36, tad to vienas malas garumu summa ir $36 : 4 = 9$. Vienīgie iespējamie kvadrātu malu garumi ir 2 un 7; 3 un 6 vai 4 un 5 (jo pēc dotā kvadrāta malas garums ir lielāks nekā 1).



29. att.



30. att.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka kvadrāti var būt tikai ar izmēriem:

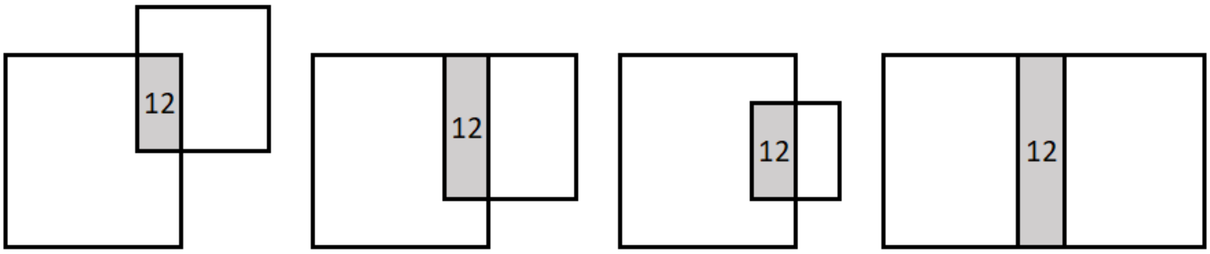
- 2×2 un 7×7 rūtiņas;
- 3×3 un 6×6 rūtiņas;
- 4×4 un 5×5 rūtiņas.

Tā kā pārklātās daļas laukums ir 1, tad pārklātā daļa ir kvadrāts ar izmēriem 1×1 rūtiņa un tā perimetrs ir 4 (skat. 29. att.). Apzīmēsim kvadrātu malu garumus ar a un b. Ievērosim, ka abu kvadrātu perimetru summa sakrīt ar tāda kvadrāta perimetru, kas ierobežo abus kvadrātus (skat. 30. att.). Tātad $4(a + b - 1) = 32$; $a + b - 1 = 8$ jeb $a + b = 9$. Tātad $a = 2$ un $b = 7$; $a = 3$ un $b = 6$ vai $a = 4$ un $b = 5$ (jo pēc dotā kvadrāta malas garums ir lielāks nekā 1).

d) 1. atrisinājums. Pamatosim, ka kvadrāti var būt tikai ar izmēriem:

- 4×4 un 7×7 rūtiņas;
- 5×5 un 6×6 rūtiņas.

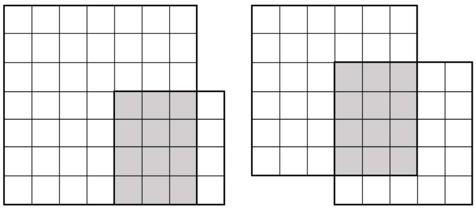
Ievērosim, ka divi kvadrāti var pārklāties tieši četros dažādos veidos (skat. 31. att.). Tā kā pārklātās daļas laukums ir 12, tad pārklātā daļa var būt taisnstūris ar izmēriem 12×1; 6×2 vai 4×3 rūtiņas.



31. att.

Aplūkosim visas trīs iespējas. Izmantosim sakarību, ka iegūtās figūras perimetrs ir vienāds ar abu kvadrātu perimetru summu, no kuras atņem pārklātās daļas perimetru.

- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 12×1 rūtiņa, tad katra kvadrāta malas garums ir vismaz 12. Tādā gadījumā iegūtās figūras perimetrs ir vismaz $8 \cdot 12 - 2 \cdot (12 + 1) = 96 - 26 = 70$. Tā kā ir dots, ka iegūtās figūras perimetrs ir 30, iegūstam pretrunu, tātad šis gadījums nav iespējams.
- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 6×2 rūtiņas, tad katra kvadrāta malas garums ir vismaz 6. Tādā gadījumā iegūtās figūras perimetrs ir vismaz $8 \cdot 6 - 2 \cdot (6 + 2) = 48 - 16 = 32$. Tā kā ir dots, ka iegūtās figūras perimetrs ir 30, iegūstam pretrunu, tātad šis gadījums nav iespējams.
- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 4×3 rūtiņas, tad abu kvadrātu perimetru summa ir $30 + 2 \cdot (3 + 4) = 44$, tātad abu kvadrātu malu summa ir $44 : 4 = 11$. Tā kā katra kvadrāta malas garums ir vismaz 4 (pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 4×3 rūtiņas), tad vienīgie iespējamie kvadrātu malu garumi ir 4 un 7 vai 5 un 6 (skat. 32. att.).


32. att.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka kvadrāti var būt tikai ar izmēriem:

- 4×4 un 7×7 rūtiņas;
- 5×5 un 6×6 rūtiņas.

Ievērosim, ka divi kvadrāti var pārklāties tieši četros dažādos veidos (skat. 31. att.). Tā kā pārklātās daļas laukums ir 12 cm^2, tad pārklātā daļa var būt taisnstūris ar izmēriem 12×1; 6×2 vai 4×3 rūtiņas.
Aplūkosim visas trīs iespējas. Apzīmēsim kvadrātu malu garumus ar a un b $(a \leq b)$.

- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 12×1 rūtiņa, tad $a + b \geq 2 \cdot 12 = 24$. Tā kā iegūtās figūras perimetrs ir $P = 4a + 4b - 2 \cdot (12 + 1) = 30$, tad, atrisinot vienādojumu, iegūstam, ka $a + b = 14$. Iegūstam pretrunu, tātad šis gadījums nav derīgs.
- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 6×2 rūtiņa, tad iegūtās figūras perimetrs ir $P = 4a + 4b - 2 \cdot (6 + 2) = 30$. Risinot vienādojumu, iegūstam, ka $4a + 4b = 46$, kas nav iespējams, jo 46 nedalās ar 4 un a; b ir naturāli skaitļi.
- Ja pārklātā daļa ir taisnstūris ar izmēriem 4×3 rūtiņa, tad iegūtās figūras perimetrs ir $P = 4a + 4b - 2 \cdot (4 + 3) = 30$. Risinot vienādojumu, iegūstam, ka $a + b = 11$. Tā kā $a \geq 4$, tad $a = 4$ un $b = 7$ vai $a = 5$ un $b = 6$ (skat. 32. att.).

5. uzdevums

Zem Profesora Cipariņa mājas pazemē ir izveidots alu labirints. Lai sargātu konkursa uzdevumus un atrisinājumus, viņš kādā no labirinta galapunktiem ir paslēpis uzdevumu skapi. Profesors pats nebija mājās, bet četriem viņa kolēģiem (Marutai un trīs asistentiem) bija uzdevumi steidzami jāatrod. Maruta zina, ka divi asistenti vienmēr runā patiesību, bet trešais dažreiz melo. Tomēr viņa nezina, kuri asistenti runā patiesību un kurš – melo.
Maruta ar trīs asistentiem nonāk līdz vietai, kas sazarojas trīs alās (tālāk šīs alas vairs nesazarojas). Maruta zina, ka uzdevumu skapis ir vienā no šīm trim alām un līdz tam var nokļūt 1 stundas laikā. Tomēr ne Maruta, ne asistenti nezina, kura ir šī ala. Maruta izdomāja, ka visiem četriem kolēģiem ir jāšķiras un jāmeklē uzdevumu skapis. Maruta var nosūtīt asistentus izlūkos kādā no alām un pēc tam atgriezties, kā arī pati doties alās un atgriezties. Kā Maruta kopā ar asistentiem var nokļūt līdz uzdevumu skapim, patērējot ceļā ne vairāk kā 3 stundas?

1. atrisinājums. Maruta sūta visus trīs asistentus pirmajā alā un pati dodas otrajā alā. Visi dodas pa alu uz priekšu tieši vienu stundu un tad atgriežas sākumpunktā, kopā ceļā pavadot 2 stundas. Ja Maruta konstatē, ka uzdevumu skapis ir viņas izvēlētajā alā, tad visi četri kolēģi dodas pa šo alu un uzdevumu skapi atrod trīs stundās. Ja Marutas izvēlētajā alā uzdevumu skapja nav, tad viņa jautā asistentiem, vai viņi ir atraduši uzdevumu skapi. Tā kā viens no asistentiem dažreiz melo, tad patiesība ir tā, ko saka vismaz divi asistenti. Ja vismaz divi asistenti saka, ka viņi sasniedza uzdevumu skapi, tad visi kolēģi dodas pa pirmo alu. Ja vismaz divi asistenti saka, ka uzdevumu skapi neatrada, tad visi kolēģi dodas pa trešo alu. Tādā veidā visi nokļuva līdz uzdevumu skapim trīs stundu laikā.

2. atrisinājums. Maruta sūta vienu asistentu *A* izlūkos pa pirmo alu un pārējos divus asistentus *B* un *C* izlūkos pa otro alu, bet pati dodas izlūkos pa trešo alu. Visi dodas pa alu uz priekšu tieši vienu stundu un tad atgriežas sākumpunktā, kopā ceļā pavadot 2 stundas.

Ja Maruta konstatē, ka uzdevumu skapis ir atrodams pa viņas izvēlēto alu, tad visi četri kolēģi dodas pa šo alu un uzdevumu skapi atrod trīs stundās. Ja Marutas izvēlētā ala nav īstā, tad viņa jautā asistentiem, vai viņi ir sasnieguši uzdevumu skapi. Iespējami divi gadījumi.

- Asistentu *B* un *C* atbildes ir dažādas, tātad viens no tiem melo. Tādā gadījumā asistents *A* noteikti runā patiesību. Ja asistents *A* saka, ka sasniedza uzdevumu skapi, visi kolēģi dodas pa pirmo alu. Ja asistents *A* saka, ka nav sasniedzis uzdevumu skapi, visi kolēģi dodas pa otro alu. Tādā veidā visi nokļuva līdz uzdevumu skapim trīs stundu laikā.
- Asistentu *B* un *C* atbildes ir vienādas, tātad abi saka taisnību, jo tikai viens asistents var melot. Tādā gadījumā visi kolēģi dodas pa pirmo vai otro alu, ja asistenti *B* un *C* saka, ka uzdevumu skapi attiecīgi nav vai ir sasnieguši. Tādā veidā visi nokļuva līdz uzdevumu skapim trīs stundu laikā.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Reinis un Ilze kopīgi spēlē spēli. Katrs iedomājas vienu pozitīvu reālu skaitli, kurus apzīmēsim ar x un y. Uz tāfeles tad tiek uzrakstīti trīs skaitļi $x; y$ un $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Starp šiem trīs skaitļiem izvēlas mazāko un apzīmē to ar m. Spēles mērķis ir panākt to, ka m ir pēc iespējas lielāks. Kāda ir lielākā iespējamā m vērtība un kādām x un y vērtībām tā atbilst?

Atrisinājums. Ja m ir mazākais skaitlis starp $x; y$ un $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, tad noteikti ir spēkā nevienādības

$$x \geq m, \quad y \geq m, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq m.$$

Pie tam ir zināms, ka vismaz viena no šīm nevienādībām ir vienādība. Vēl varam spriest, ka no pirmajām divām nevienādībām izriet šādas nevienādības:

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{m}.$$

Apvienojot šīs nevienādības, iegūstam

$$m \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{m}.$$

Tātad $m^2 \leq 2$ jeb $m \leq \sqrt{2}$. Tas nozīmē, ka lielāku vērtību kā $\sqrt{2}$ nevaram iegūt. Lai nevienādību $\sqrt{2} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq m$ pārveidotu par vienādību, varam izvēlēties $x=y=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

7. uzdevums

Doti 15 dažādi naturāli skaitļi, kas lielāki nekā 1 un nepārsniedz 2024. Zināms, ka jebkuri divi skaitļi no šiem 15 ir savstarpēji pirmskaitļi. Pamatot, ka starp šiem 15 skaitļiem noteikti ir kāds pirmskaitlis!

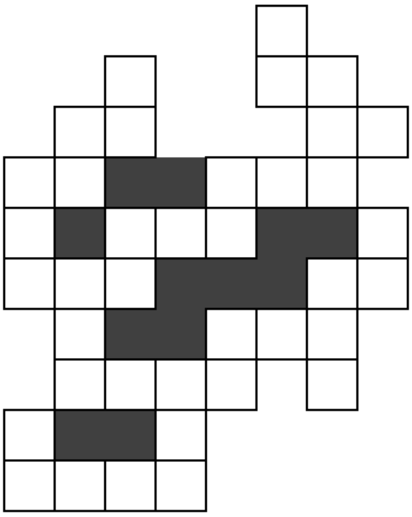
Atrisinājums. Pieņemsim, ka mums ir doti 15 naturāli skaitļi $n_1, n_2, \ldots, n_{15}$ intervālā no 2 līdz 2024, kuri pa pāriem ir savstarpēji pirmskaitļi. Ar p_i apzīmēsim mazāko skaitļa n_i pirmreizinātāju. Tā kā visi skaitļi n_i ir savstarpēji pirmskaitļi, tad katrs p_i ir unikāls, jo pretējā gadījumā diviem skaitļiem būtu kopīgs pirmreizinātājs. Tātad mums ir doti 15 pirmskaitļi p_i un starp tiem atradīsies lielākais, ko apzīmēsim ar p. Varam apgalvot, ka $p \geq 47$, jo 47 ir 15. pirmskaitlis. Apzīmēsim to skaitli, kuram p ir mazākais pirmreizinātājs, ar n. Pamatosim, ka šis skaitlis n ir meklētais pirmskaitlis. Ja pieņemtu pretējo, ka n ir salikts skaitlis (skaitlis n ir lielāks nekā 1 pēc dotā), tad tam noteikti būtu dalītājs, kas ir vismaz p^2. Tā tam jābūt, jo p ir mazākais skaitļa n pirmreizinātājs. Tātad skaitlim n izpildītos $n \geq p^2 \geq 47^2=2209>2024$, kas noved pie pretrunas, jo dots, ka n nepārsniedz 2024. Secinām, ka pieņēmums, ka n ir salikts skaitlis, ir aplams.

5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

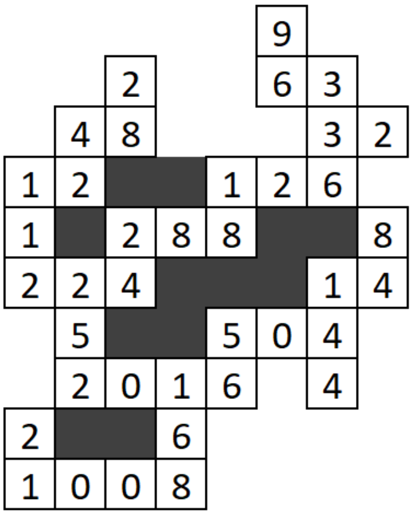
1. uzdevums

Ieraksti krustskaitļu mīklā skaitļa 2016 divciparu, trīsciparu un četrciparu dalītājus (katru ne vairāk kā vienu reizi), izņemot dalītājus 16 un 36.

Piezīme. Skaitļus lasa no augšas uz leju un no kreisās uz labo pusi.



Atrisinājums. Dažu divciparu, trīsciparu un četrciparu skaitļa 2016 dalītāju, izņemot 16 un 36, izvietojums parādīts krustskaitļu mīklā. Mīklā nav ierakstīti arī tādi skaitļa 2016 dalītāji kā 72 un 672.



2. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 202320232023. Ar skaitli atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt vai atņemt 12;
- nodzēst tā trīs vienādus ciparus (skaitļa pirmais cipars nedrīkst būt 0);
- mainīt vietām skaitļa ciparus (skaitļa pirmais cipars nedrīkst būt 0);
- ja skaitlī trīs cipari ir "1", tad katru no tiem var aizstāt ar ciparu "5".

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no uzrakstītā skaitļa var iegūst skaitli **a)** 2023; **b)** 2025?

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka skaitli 2023 nevar iegūt. Skaitlim 202320232023 izpildās īpašība "dalās ar 3", jo tā ciparu summa $3 \cdot (2+0+2+3) = 21$ dalās ar 3, bet skaitlim 2023 šī īpašība neizpildās, jo tā ciparu summa $2+0+2+3=7$ nedalās ar 3. Pierādīsim: ja sākotnējais skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar uzdevumā dotajām darbībām, arī dalās ar 3. Izmantosim dalāmības pazīmi ar 3: ja skaitļa ciparu summa dalās ar 3, tad skaitlis dalās ar 3.

Ievērojam, ka

- ja skaitlis n dalās ar 3, tad arī skaitlis $(n-12)$ un $(n+12)$ dalās ar 3 (ja katrs saskaitāmais dalās ar 3, tad arī summa vai starpība dalās ar 3);
- ja skaitļa ciparu summa n dalās ar 3, tad arī ciparu summa $(n - 3 \cdot k)$ dalās ar 3, kur k ir vienādie cipari, kurus nodzēš (ja katrs saskaitāmais dalās ar 3, tad arī starpība dalās ar 3), tātad dalāmība ar 3 saglabājas;

- mainot vietām skaitļa ciparus, nemainās ciparu summa, tātad dalāmība ar 3 saglabājas;
- ja skaitlī katru no trīs cipariem "1" aizstāj ar ciparu "5", tad ciparu summa palielinās par $3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 12$, tātad, ja skaitļa ciparu summa n dalās ar 3, tad arī ciparu summa $(n + 12)$ dalās ar 3 (ja katrs saskaitāmais dalās ar 3, tad arī summa dalās ar 3), tātad dalāmība ar 3 saglabājas.

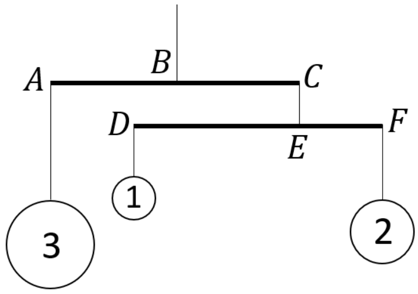
Tātad, ja dotais skaitlis dalās ar 3, tad pēc atļauto darbību izpildes arī iegūtais skaitlis dalīsies ar 3. Skaitlis 2023 ar 3 nedalās, tātad ar atļautajām darbībām to nevar iegūt.

b) Jā, skaitli 2025 var iegūt, piemēram, šādi:

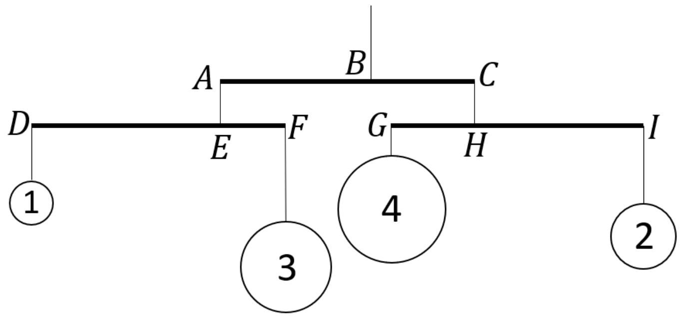
$$202320232023 \xrightarrow{\text{nodzēš 3 "0"}} 223223223 \xrightarrow{\text{nodzēš 3 "2"}} 232323 \xrightarrow{\text{nodzēš 3 "2"}} 333 \xrightarrow{\text{141 reizi +12}} 333 + 141 \cdot 12 = 2025.$$

3. uzdevums

Modelis sastāv no dažādu masu bumbām, kuras ar auklām iekārtas horizontālos stieņos. Katra horizontālā stieņa galā var iekārt vai nu vienu bumbu, vai vienu horizontālu stieni. Katra horizontālā stieņa garums ir 120 cm un katras iekārtās bumbas masa kilogramos ir uzrakstīta uz bumbas (piemēram, skat. 33. att.).



33. att.



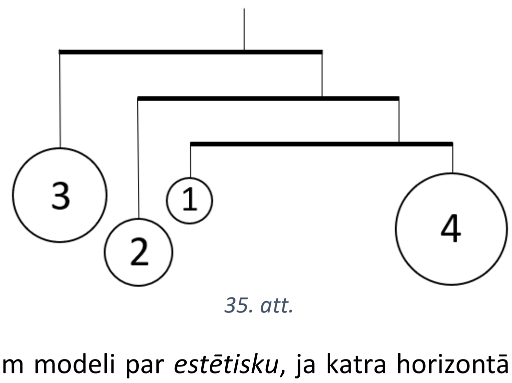
34. att.

Visi modeļi tiek veidoti tā, lai stieņa augšpusē aukla ir piestiprināta tuvāk smagākajai bumbai proporcionāli pārējai iekārtajai masai (neņemot vērā stieņu un auklu masu). Piemēram, 33. att. augšējā stieņa katrā galā ir iekārti 3 kg, tāpēc augšējā aukla ir piestiprināta tieši stieņa viduspunktā 60 cm no abiem tā galiem ($AB = BC = 60$ cm). Aukla, kas notur apakšējo stieni, ir piestiprināta tuvāk smagākajai bumbai tieši divas reizes lielākā attālumā no stieņa kreisā gala D nekā no labā F, jo bumba ar 2 kg masu ir tieši divas reizes smagāka nekā bumba ar 1 kg masu. Tātad $DE = 80$ cm un $EF = 40$ cm.

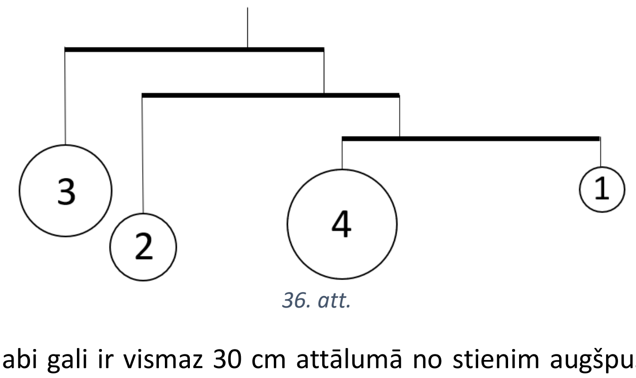
a) Lai izveidotu nākamo modeli, izmanto trīs horizontālus stieņus un vienu 1 kg, vienu 2 kg, vienu 3 kg un vienu 4 kg bumbu (skat. 34. att.). Kādi ir stieņu gabalu AB, BC, DE, EF, GH un HI garumi?

b) No a) gadījumā izmantotajām bumbām un stieņiem var izveidot vairākus modeļus. Piemēram, mainot bumbu, stieņu un auklu stiprinājuma vietu novietojumu, var iegūt 35. att. redzamo modeli. Cik dažādus modeļus var izveidot no trim horizontāliem stieņiem un vienas 1 kg, vienas 2 kg, vienas 3 kg un vienas 4 kg bumbas?

Piezīme. Par vienādiem modeļiem tiek uzskatīti simetriski modeļi, kā arī tādi modeļi, kuriem vienā horizontālajā stienī iekārtās bumbas samaina vietām (piemēram, 35. att. un 36. att. dotie modeļi ir vienādi).



35. att.



36. att.

c) Sauksim modeli par *estētisku*, ja katra horizontālā stieņa abi gali ir vismaz 30 cm attālumā no stienim augšpusē piestiprinātās auklas. Pamato, kāpēc 35. att. dotais modelis nav *estētisks*!

d) Cik dažādus *estētiskus* modeļus var izveidot no trim horizontāliem stieņiem un vienas 1 kg, vienas 2 kg, vienas 3 kg un vienas 4 kg bumbas?

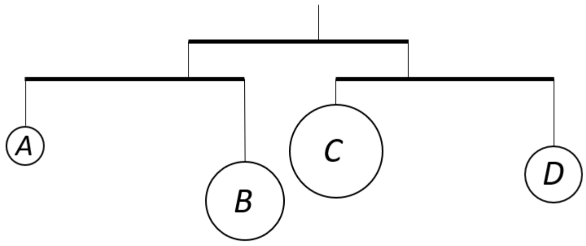
Piezīme. Par vienādiem modeļiem tiek uzskatīti simetriski modeļi, kā arī tādi modeļi, kuriem vienā horizontālajā stienī iekārtās bumbas samaina vietām (piemēram, skat. 35. att. un 36. att.).

Atrisinājums. a) Tā kā augšējā stieņa katrā galā iekārto bumbu masu attiecība ir $4 : 6 = 2 : 3$, tad stieņa garums, sākot no kreisā gala, ir jāsadala attiecībā 3 : 2. Tātad $AB = \frac{3}{5}$ no $120 = 72$ cm un $BC = 120 - 72 = 48$ cm. Apakšējā auklā pa kreisi iekārto bumbu masu attiecība ir $1 : 3$, tātad $DE = \frac{3}{4}$ no $120 = 90$ cm un $EF = \frac{1}{3}$ no $120 = 30$ cm. Apakšējā auklā pa labi iekārto bumbu masu attiecība ir $2 : 1$, tātad $GH = \frac{1}{3}$no$120 = 40$ cm un $HI = 120 - 40 = 80$ cm.

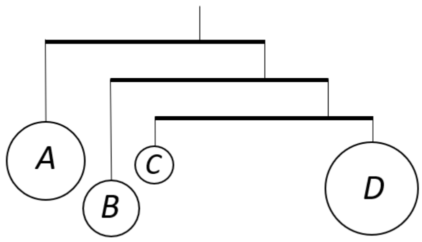
b) 1. atrisinājums. Pamatosim, ka iespējams izveidot 15 dažādus modeļus no trim stieņiem un četrām bumbām. Aplūkosim abus iespējamos gadījumus, kā stieņi var būt iekārti.

1. Divi stieņi ir iekārti paralēli trešajā stienī (skat. 37 . att., kurā ar *A, B, C* un *D* apzīmēti dotās četras bumbas). Tātad atšķirīgus modeļus veidos tikai tas, kuras divas bumbas iekar vienā stienī. Kopā ar bumbu *A* var iekārt bumbu *B, C* vai *D,* tātad iegūstam 3 iespējas. Otrā stienī atliek iekārt atlikušās divas bumbas, kuru mainīšana vietām neveido citu modeli.
2. Visi trīs stieņi ir iekārti viens zem otra (skat. 38. att., kurā ar *A, B, C* un *D* apzīmēti dotās četras bumbas). Ievērojam, ka bumbas *A* vietā var iekārt jebkuru no četrām bumbām un ka bumbas *B* vietā var iekārt jebkuru no atlikušajām trim bumbām. Tā kā bumbu *C* un *D* vietā atliek iekārt atlikušās divas bumbas un to mainīšana vietām neveido citu modeli, kopā iegūstam $4 \cdot 3 = 12$ dažādus modeļus.

Tā kā abi minētie stieņu novietojumi ir vienīgie iespējamie, tad kopā iegūstam $3 + 12 = 15$ dažādus modeļus.



37 . att.



38. att.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka iespējams izveidot 15 dažādus modeļus, uzskaitot visas iespējas. Bumbu un stieņu novietojumu aprakstīsim ar skaitļu pāri iekavās. Ja bumbas ar masu 1 kg un 2 kg ir iekārtas vienā stienī, tad to pierakstīsim kā (1, 2). Piemēram, 34. att. redzamo modeli pierakstīsim kā ((1, 3), (2, 4)), un 35. att. redzamo modeli – kā (3, (2, (1, 4))).

Aplūkosim abus iespējamos gadījumus, kā stieņi var būt iekārti.

1. Ja divi stieņi ir iekārti paralēli trešajā stienī (skat. 37 . att.), tad var izveidot 3 dažādus modeļus: ((1, 2), (3, 4)); ((1, 3), (2, 4)) un ((1, 4), (2, 3)).
2. Ja visi trīs stieņi ir iekārti viens zem otra (skat. 38. att.), tad iespējams izveidot 12 dažādus modeļus:

(1, (2, (3, 4))); (1, (3, (2, 4))); (1, (4, (2, 3)));
(2, (1, (3, 4))); (2, (3, (1, 4))); (2, (4, (1, 3)));
(3, (1, (2, 4))); (3, (2, (1, 4))); (3, (4, (1, 2)));
(4, (1, (2, 3))); (4, (2, (1, 3))); (4, (3, (1, 2))).

Tā kā abi minētie stieņu novietojumi ir vienīgie iespējamie, tad kopā iegūstam $3 + 12 = 15$ dažādus modeļus.

c) Ievērojam, ka apakšējā stienī ir iekārtas bumbas ar masu 1 kg un 4 kg, tātad to masu attiecība ir $1 : 4$, un aukla ir piestiprināta $\frac{1}{5}$ no $120 = 24$ cm attālumā no stieņa labā gala, tāpēc 35. att. redzamais modelis nav *estētisks.*

d) Pamatosim, ka atbilstoši nosacījumiem var izveidot 5 dažādus *estētiskus* modeļus. Lai modelis būtu *estētisks*, auklai jābūt piestiprinātai vismaz 30 cm attālumā no abiem stieņa galiem (30 cm un 90 cm attālumā no abiem stieņa galiem vai tuvāk viduspunktam), tātad stienim abos galos piestiprinātajai masai jāatšķiras ne vairāk kā 3 reizes. Aplūkosim abus iespējamos gadījumus, kā stieņi var būt iekārti.

1. Ja divi stieņi ir iekārti paralēli trešajā stienī (skat. 37 . att.), tad var izveidot 3 dažādus modeļus, kurus ieguvām b) gadījumā. Visu stieņu galos iekārto masu attiecību skatīt tabulā.

Modelis	**Stieņa galos iekārto masu attiecība**		
$\boldsymbol{((A, B), (C, D))}$	$\boldsymbol{A : B}$	$\boldsymbol{C : D}$	$\boldsymbol{(A + B) : (C + D)}$
((1, 2), (3, 4))	$1 : 2$	$3 : 4$	$3 : 7$
((1, 3), (2, 4))	$1 : 3$	$2 : 4 = 1 : 2$	$4 : 6 = 2 : 3$
((1, 4), (2, 3))	$1 : 4$ (nav *estētisks*)	$2 : 3$	$5 : 7$

Kā redzams tabulā, divi modeļi ir *estētiski*.

2. Ja visi trīs stieņi ir iekārti viens zem otra (skat. 38. att.), tad iespējams izveidot 12 dažādus modeļus, kurus ieguvām b) gadījumā. Lai modelis būtu *estētisks*, riņķa *A* vietā nevar būt bumba ar 1 kg vai 2 kg masu, jo tad masu attiecība pret augšējā stieņa otrā galā iekārto masu būtu attiecīgi $1 : (2 + 3 + 4) = 1 : 9$ vai $2 : (1 + 3 + 4) = 2 : 8 = 1 : 4$. Visu stieņu galos iekārto masu attiecību skatīt tabulā, ja bumbas *A* vietā ir bumba ar masu 3 kg vai 4 kg.

Modelis	**Stieņa galos iekārto masu attiecība**		
$\left(\boldsymbol{A}, \left(\boldsymbol{B}, (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})\right)\right)$	$\boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})$	$\boldsymbol{B} : (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})$	$\boldsymbol{C} : \boldsymbol{D}$
(3, (1, (2, 4)))	$3 : 7$	$1 : 6$ (nav *estētisks*)	$2 : 4 = 1 : 2$
(3, (2, (1, 4)))	$3 : 7$	$2 : 5$	$1 : 4$ (nav *estētisks*)
(3, (4, (1, 2)))	$3 : 7$	$4 : 3$	$1 : 2$
(4, (1, (2, 3)))	$4 : 6 = 2 : 3$	$1 : 5$ (nav *estētisks*)	$2 : 3$
(4, (2, (1, 3)))	$2 : 3$	$2 : 4 = 1 : 2$	$1 : 3$
(4, (3, (1, 2)))	$2 : 3$	$3 : 3 = 1 : 1$	$1 : 2$

Kā redzams tabulā, trīs modeļi ir *estētiski*.

Kopā iegūstam $2 + 3 = 5$ dažādus *estētiskus* modeļus.

4. uzdevums

Marts ir sakrājis naudas summu, izmantojot tikai 1 eiro monētas. Viens šokolādes batoniņš “KitKat” maksā 66 centus un viens šokolādes batoniņš “Twix” maksā 85 centus. Kādu mazāko skaitu šokolādes batoniņu “KitKat” un “Twix” Marts var nopirkt, lai būtu nopirkts vismaz viens katra veida batoniņš un būtu iztērēts vesels skaits eiro?

Atrisinājums. Pamatosim, ka Martam jānopērk 2 šokolādes batoniņi “Twix” un 5 batoniņi “KitKat”, lai iztērētu mazāko veselo skaitu eiro. Apzīmēsim nopirkto šokolādes batoniņu “Twix” skaitu ar t un “KitKat” skaitu ar k, bet iztērēto veselo eiro skaitu ar e. Tā kā 1 eiro ir 100 centi, tad varam izveidot vienādību, kuras abas puses izsaka iztērēto naudas daudzumu:

$$85 \cdot t + 66 \cdot k = 100 \cdot e.$$

Ievērojam, ka saskaitāmais $66 \cdot k$ un vienādības labā puse $100 \cdot e$ dalās ar 2, tātad arī saskaitāmajam $85 \cdot t$ jādalās ar 2. Tā kā 85 nedalās ar divi , tad reizinātājam t jādalās ar 2, tātad t ir vismaz 2.

Līdzīgi var iegūt, ka k ir vismaz 5, jo saskaitāmais $85 \cdot t$ un vienādības labā puse $100 \cdot e$ dalās ar 5, tātad arī saskaitāmajam $66 \cdot k$ jādalās ar 5. Tā kā 66 nedalās ar 5, tad reizinātājam k jādalās ar 5.

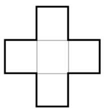
Tātad mazākās iespējamās t un k vērtības ir atbilstoši 2 un 5. Pārbaudīsim, vai ar šādām t un k vērtībām arī e ir vesels skaitlis. Ja $t = 2$ un $k = 5$, tad $85 \cdot 2 + 66 \cdot 5 = 170 + 330 = 500$. Tātad $e = 5$, lai $100 \cdot e = 100 \cdot 5 = 500$.

Iegūstam, ka, nopērkot 2 šokolādes batoniņus “Twix” un 5 batoniņus “KitKat”, Marts iztērē 5 eiro, kas ir vesels skaits eiro.

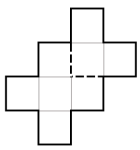
5. uzdevums

Jāzeps rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1, pa rūtiņu līnijām zīmē tādus daudzstūrus, kuriem perimetra skaitliskā vērtība P sakrīt ar malu skaitu. Kādas P vērtības, kas ir vismaz 12 un dalās ar 4, Jāzeps var iegūt?

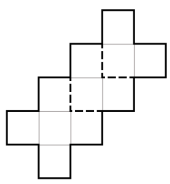
Atrisinājums. Jāzeps var iegūt visas tādas P vērtības, kas ir vismaz 12 un dalās ar 4, jeb $P = 8 + 4k$, kur $k \in \mathbb{N}$. Parādīsim, kā visus tādus daudzstūrus iegūt. Daudzstūris, kuram $P = 12$, redzams 39. att. Nākamais daudzstūris, kura perimetra skaitliskā vērtība dalās ar 4, ir 16-stūris (skat. 40. att.). To var iegūt no 12-stūra, pieliekot klāt trīs rūtiņas, malu un perimetra skaitlisko vērtību samazinot par 2 un palielinot par 6, kopumā malu skaits palielinās par 4. Šādu konstrukciju turpinot, katrā reizē malu skaitu samazinot par 2 un palielinot par 6 (skat. 20-stūri 41. att.), perimetra skaitliskā vērtība un malu skaits palielināsies par 4, tātad dalīsies ar 4.



39. att.



40. att.



41. att.

6. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīti trīs skaitļi 2; 6 un 12. Vienā gājienā var izvēlēties divus uz tāfeles uzrakstītos skaitļus a un b un to vietā uzrakstīt skaitļus $\frac{5}{13}a+\frac{12}{13}b$ un $\frac{12}{13}a-\frac{5}{13}b$. Vai, atkārtoti izpildot šādus gājienus, var panākt, ka uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi 4; 8 un 10?

Atrisinājums. Pamatosim, ka nevar iegūt prasīto. Ievērosim: ja skaitļus a un b aizvieto ar $\frac{5}{13}a+\frac{12}{13}b$ un $\frac{12}{13}a-\frac{5}{13}b$, tad to kvadrātu summa paliek nemainīga:

$$\left(\frac{5}{13}a+\frac{12}{13}b\right)^2+\left(\frac{12}{13}a-\frac{5}{13}b\right)^2=a^2+b^2,$$

Tātad sākotnējo skaitļu kvadrātu summa ir invarianta, tas ir, pēc katra gājiena uz tāfeles uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa ir $2^2+6^2+12^2=184$. Bet skaitļu 4; 8 un 10 kvadrātu summa ir $4^2+8^2+10^2=188$. Tātad nevar iegūt, ka uz tāfeles būs uzrakstīti skaitļi 4; 8 un 10.

7. uzdevums

Pa apli patvaļīgā secībā sarakstīti 1012 vieninieki un 1011 nulles. Vienā gājienā starp vienādajiem cipariem ieraksta nulli, bet starp dažādajiem – vieninieku. Pēc tam, kad starp visiem sākotnējiem cipariem ir ierakstīti jaunie cipari, visi sākotnējie cipari tiek nodzēsti. Pēc tam atkal atkārto šādu gājienu (ieraksta 0 vai 1) ar cipariem, kas palika pēc nodzēšanas. Vai, atkārtoti izpildot šādus gājienus, var iegūt, ka pa apli visi cipari ir 0?

Atrisinājums. Pamatosim, ka prasīto nevar iegūt. Veiksim pāris spriedumus no beigām. Vienīgais veids, kā iegūt, ka visi cipari ir nulles, ir tad, ja iepriekšējā solī visi cipari bija vieninieki. Pie tam vienīgais veids, kā iegūt, ka visi cipari ir 1, ir, ja iepriekšējā solī cipari pa apli pamīšus bija dažādi, tas ir, veidojās virkne 1; 0; 1; 0; 1; 0; … 1; 0. Ievērosim, ka šāda situācija nav iespējama, jo tai būtu nepieciešams vienāds skaits vieninieku un nuļļu jeb kopā jābūt pāra skaits ciparu sarakstītiem ap apli, bet mums sākotnēji ir doti 2023 cipari.