

Profesora Cipariņa klubs
2024./2025. mācību gads
5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

a) Ierakstīt dotajā izteiksmē starp cipariem 13 matemātikas simbolus (“+”; “−”; “.”; “:”; “(” vai “)”) tā, lai vienādība būtu patiesa.

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ = \ 2025.$$

b) Vai to var izdarīt ar mazāku simbolu skaitu?

Piezīmes. 1. Ja lieto vienu iekavu pāri “(1 + 2)”, tad tiek izmantoti 2 simboli.

2. Drīkst veidot arī skaitļus no vairākiem pēc kārtas esošiem cipariem, piemēram, no 1 un 2 izveido skaitli 12 (tādā gadījumā netiek izmantots neviens simbols).

Atrisinājums. a) $12 \cdot 3 + (4 + 5) \cdot (6 + 7) \cdot (8 + 9) = 2025$

b) Jā, var, piemēram, ar 8 simboliem: $1 \cdot 2 + 34 \cdot 56 + 7 \cdot (8 + 9) = 2025$.

2. uzdevums

Profesora Cipariņa skolas vairāki skolēni devās ekskursijā uz atrakciju parku “Tarzāns”. Zināms, ka katrs skolēns apmeklēja vai nu tīklu parku, vai kāpelēšanas trases (vismaz viens skolēns apmeklēja katru aktivitāti). Tīklu parka apmeklējums maksāja 7 eiro, bet kāpelēšanas trases – 16 eiro. Cik skolēnu devās ekskursijā, ja visi skolēni kopā samaksāja 420 eiro par Tarzāna parka apmeklējumu?

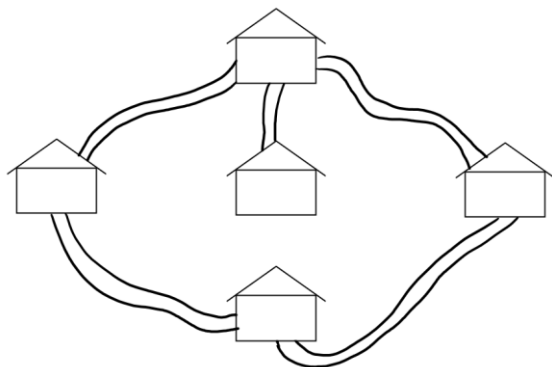
Atrisinājums. Apzīmējot skolēnu skaitu, kas apmeklēja tīklu parku, ar t un skolēnu skaitu, kas apmeklēja kāpelēšanas trases, ar k , iegūstam sakarību $7 \cdot t + 16 \cdot k = 420$ jeb $16 \cdot k = 420 - 7 \cdot t$. Ievērojām, ka izteiksmes labā puse dalās ar 7 (jo katrs saskaitāmais dalās ar 7), tātad arī kreisajai pusei $16 \cdot k$ jādalās ar 7. Tā kā 16 un 7 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad k jādalās ar 7, turklāt $16 \cdot k < 420$ jeb $k < 26$. Tātad k var būt trīs dažādas vērtības:

- ja $k = 7$, tad $7 \cdot t + 16 \cdot 7 = 420$ jeb $t = 44$, tātad kopā ir $k + t = 7 + 44 = 51$ skolēns,
- ja $k = 14$, tad $7 \cdot t + 16 \cdot 14 = 420$ jeb $t = 28$, tātad kopā ir $k + t = 14 + 28 = 42$ skolēni,
- ja $k = 21$, tad $7 \cdot t + 16 \cdot 21 = 420$ jeb $t = 12$, tātad kopā ir $k + t = 21 + 12 = 33$ skolēni.

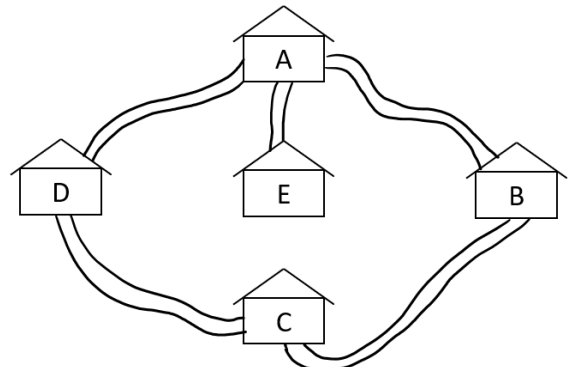
Tādā gadījumā ekskursijā devās 51; 42 vai 33 skolēni.

3. uzdevums

Kādā ciemā 5 mājas savienotas ar celiņiem (skat. 1. att.). Katras mājas jumts ir nokrāsots kādā no trim krāsām (zaļš, balts vai sarkans) tā, ka māju, kuras savieno celiņš, jumti ir dažādās krāsās. Cik dažādos veidos var būt nokrāsoti šo māju jumti?



1. att.



2. att.

Atrisinājums. Apzīmējam mājas ar A, B, C, D un E (skat. 2. att.). Māju B un D jumtus var nokrāsot divos veidos.

- Ja māju B un D jumtus nokrāso vienā un tajā pašā krāsā, tad tos var nokrāsot 3 dažādos veidos, tādā gadījumā māju A, C un E jumtus var nokrāsot kādā no atlikušajām 2 krāsām (katru māju 2 dažādos veidos). Tātad kopā māju jumtus var nokrāsot $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ dažādos veidos.
- Ja māju B un D jumtus nokrāso divās dažādās krāsās, tad to var izdarīt 3 un 2 veidos. Tādā gadījumā māju A un C jumtus var nokrāsot tikai vienā veidā, jo tās ir savienotas ar mājām B un D, kuru jumti ir nokrāsoti atšķirīgās krāsās. Mājas E jumtu var nokrāsot 2 krāsās, kas nesakrīt ar mājas A jumtu, tātad kopā māju jumtus var nokrāsot $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ dažādos veidos.

Tā kā māju jumtus var nokrāsot vienā no 24 vai 12 veidiem, tad kopā tos var nokrāsot $24 + 12 = 36$ dažādos veidos.

4. uzdevums

Dana ir 8 kartītes un uz katras kartītes vienas puses ir uzrakstīts viens skaitlis no 1 līdz 8 (kopā 8 dažādi skaitļi). Pēc tam Dana sadala kartītes pāros, saskaita katra pāra skaitļus un uzraksta uz tāfeles visas četras iegūtās summas, kurām aprēķina mazāko kopīgo dalāmo. Piemēram, ja kartītes sadala šādos pāros:

$$7/3; 2/6; 5/1 \text{ un } 8/4,$$

tad uz tāfeles Dana uzrakstīja summas 10; 8; 6 un 12, un šo četru skaitļu mazākais kopīgais dalāmais ir $M(10; 8; 6; 12) = 120$.

- Vai ir divi dažādi veidi, kā kartītes var sadalīt pa pāriem, lai uz tāfeles uzrakstīto skaitļu mazākais kopīgais dalāmais būtu 24?
- Pierādi, ka uz tāfeles uzrakstīto skaitļu mazākais kopīgais dalāmais nevar būt 39.
- Danas draudzenei levai ir sešas kartītes, uz kurām uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 6, bet viņa kartītes sadala divās grupās, katrā pa trim kartītēm. Pēc tam viņa saskaita katras grupas skaitļus un abas summas uzraksta uz tāfeles. Pēc tam leva uzraksta skaitli A , kas ir vienāds ar uz tāfeles uzrakstīto divu skaitļu mazāko kopīgo dalāmo. Kādu vismazāko A vērtību leva var iegūt?

Atrisinājums. a) Jā, vienīgie divi veidi, kā sakārtot kartītes pāros, lai uz tāfeles uzrakstīto skaitļu mazākais kopīgais dalāmais būtu 120, ir

$$1) \quad 2/6; 4/8; 1/3; 5/7, \text{ tādā gadījumā uz tāfeles būtu uzrakstīti skaitļi } 8; 12; 4 \text{ un } 12 \text{ un } M(8; 12; 4; 12) = 24;$$

$$2) \quad 2/6; 4/8; 3/5; 1/7, \text{ tādā gadījumā uz tāfeles būtu uzrakstīti skaitļi } 8; 12; 8 \text{ un } 8 \text{ un } M(8; 12; 8; 8) = 24.$$

b) Mazākais iespējamais uzrakstītais skaitlis uz tāfeles var būt $1 + 2 = 3$, bet lielākais – var būt $7 + 8 = 15$. Tā kā skaitļa 39 vienīgie dalītāji ir 1; 3; 13 un 39, tad uz tāfeles jābūt uzrakstītiem tikai skaitļiem 3 un 13. Vienīgais veids, kā iegūt 3 kā divu skaitļu summu ir, ja pāri ir kartītes ar skaitļiem 1/2, tātad pārējiem trim uz tāfeles uzrakstītajiem skaitļiem jābūt 13. Tā kā no atlikušajiem skaitļiem 3; 4; 5; 6; 7 un 8 summu 13 var iegūt tikai divos veidos ($8 + 5 = 7 + 6 = 13$), tad uz tāfeles nevar būt uzrakstīti trīs skaitļi 13 un mazākais kopīgais dalāmais nevar būt 39.

c) Mazākais iespējamais uzrakstītais skaitlis uz tāfeles var būt $1 + 2 + 3 = 6$, bet lielākais – var būt $4 + 5 + 6 = 15$. Tādā gadījumā ir tikai 5 gadījumi, kādus skaitļus var uzrakstīt uz tāfeles (skat. tabulu).

<i>Uz tāfeles uzrakstītie skaitļi</i>	<i>Kartīšu trijnieku piemērs</i>	<i>Uz tāfeles uzrakstīto skaitļu MKD</i>
6 un 15	1/2/3 un 4/5/6	$M(6; 15) = 30$
7 un 14	1/2/4 un 3/5/6	$M(7; 14) = 14$
8 un 13	1/2/5 un 3/4/6	$M(8; 13) = 104$
9 un 12	1/2/6 un 3/4/5	$M(9; 12) = 36$
10 un 11	1/3/6 un 2/4/5	$M(10; 11) = 110$

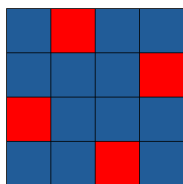
Tātad mazākā iespējamā mazākā iespējamā A vērtība ir 14, ja kartītes sakārtotas pa trīs šādi: 1/2/4 un 3/5/6.

5. uzdevums

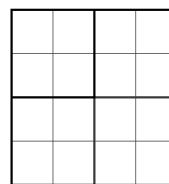
Katrs no 16 rūķiem ir uzvilcis vai nu sarkanu, vai zilu kombinezonu. Viņi ir sastājušies 4 rindās un 4 kolonnās tā, lai katrs rūķis ar zilo kombinezonu stāv blakus vismaz vienam rūķim ar sarkano kombinezonu. Kāds lielākais skaits rūķu var būt uzvilkuši zilu kombinezonu?

Piezīme. Divi rūķi stāv blakus, ja tie stāv blakus vienā un tajā pašā rindā vai vienā un tajā pašā kolonnā.

Atrisinājums. Lielākais skaits rūķu ar zilu kombinezonu var būt 12 (skat. 3. att., kā jāsastājas 16 rūķiem atbilstoši nosacījumiem, kurā zili vai sarkani iekrāsotas rūtiņas apzīmē rūķi un tā kombinezona krāsu). Pamatotsim, ka vairāk rūķu nevar būt uzvilkuši zilu kombinezonu.



3. att.



4. att.

Attēlosim rūķu stāvēšanas vietas ar rūtiņām, tādējādi iegūstot kvadrātu ar izmēriem 4×4 rūtiņas. Ja rūtiņā stāv rūķis ar zilu kombinezonu, tad to iekrāsosim zilā krāsā. Sadalīsim šo kvadrātu 4 kvadrātos ar izmēriem 2×2 rūtiņas (skat. 4. att.). Katrā mazākajā kvadrātā nevar visas 4 rūtiņas iekrāsot zilā krāsā, citādi katrs rūķis zilā kombinezonā neatrodas blakus rūķim sarkanā kombinezonā. Tātad katrā mazākajā kvadrātā vismaz 1 rūtiņa jāiekārso sarkanā krāsā un kopā no visām 16 rūtiņām vismaz 4 rūtiņām jābūt sarkanām. Tādā gadījumā lielākais rūķus skaits, kas var būt zilā kombinezonā, ir $16 - 4 = 12$.

6. uzdevums

Kādi ir visu veselo skaitļu pāri m un n , kuriem ir patiesa vienādība $m^2 + mn + n^2 = m^2n^2$?

Atrisinājums. Ievērosim, ka labās puses izteiksmes dalās ar m , tāpēc arī kreisās puses izteiksmei ir jādalās ar m . Tā kā vienīgais saskaitāmais, kas nesatur m , ir n^2 , tad n^2 ir jādalās ar m . Līdzīgi varam spriest, ka m^2 ir jādalās ar n . Tātad $m^2 = an$ un $n^2 = bm$ kādiem veseliem skaitļiem a un b . Ievietojot tos dotajā vienādībā, iegūstam, ka $an + mn + bm = ab \cdot mn$

Izmantojot tos pašus spriedumu, ko iepriekš, varam secināt, ka n dalās ar m un m dalās ar n . Tas ir iespējams vienīgi tad, ja abi šie skaitļi ir vai nu vienādi, vai arī tie ir pretēji skaitļi. Tātad vai nu $m = n$, vai arī $m = -n$. Apskatām abus gadījumus.

1. Ja $m = n$, tad, ievietojot to vienādībā, iegūstam:

$$m^2 + m^2 + m^2 = m^4;$$

$$3m^2 = m^4;$$

$$m^2(m^2 - 3) = 0.$$

Vienīgais atrisinājums veselos skaitļos ir $m = n = 0$.

2. Ja $m = -n$, tad, ievietojot to vienādībā, iegūstam:

$$m^2 - m^2 + m^2 = m^4;$$

$$m^2(m^2 - 1) = 0.$$

Iegūstam atlikušos veselo skaitļu atrisinājuma pārus $m = 1; n = -1$ un $m = -1; n = 1$.

Tātad vienādojumam ir trīs atrisinājumi veselos skaitļos: $\begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}; \begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \end{cases}; \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases}$.

7. uzdevums

Matilde un Ernests uz tāfeles ir uzzīmējuši regulāru 2024-stūri. Katrs pamīšus novelk kādu diagonāli daudzstūrī. Zaudē tas, kuram pirmajam jānovelk diagonāle, kas krusto kādu citu. Vai kādam ir stratēģija, kas garantē uzvaru, ja Matilde sāk pirmā?

Atrisinājums. Pamatotsim, ka Matilde vienmēr var uzvarēt. Matildei pirmajā gājienā jānovelk kāda no galvenajām diagonālēm, tas ir, diagonāli, kas sadala daudzstūri divās vienādās daļās. Lai kādu diagonāli Ernests tagad novilkto, Matilde vienmēr varēs simetriski pret 1. gājienā novilkto diagonāli novilkt jaunu diagonāli. Ja Ernests var novilkt diagonāli, kas nekrusto kādu citu, tad noteikti arī Matilde varēs to izdarīt. Tātad Ernestam pirmajam nāksies novilkt diagonāli, kas krusto kādu citu, un zaudēs.