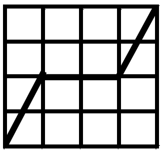
"Profesora Cipariņa klubs" 2002./03. m.g.

1. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Tā kā $A \neq N$, tad $A \neq 0; 1; 5; 6$. Ja A = 2, tad N = 4 un JULITA = 444444:2 = 222222 – pretruna. Līdzīgi pierāda, ka $A \neq 3$. Ja A = 4, tad N = 6, bet 666666 nedalās ar 4; ja A = 8, tad N = 4, bet 444444 nedalās ar 8; ja A = 9, tad N = 1, bet 111111 nedalās ar 9. Tāpēc A = 7, N = 9 un
JULITA = 999999:7 = 142857.
Visi uzdevuma nosacījumi ir apmierināti.

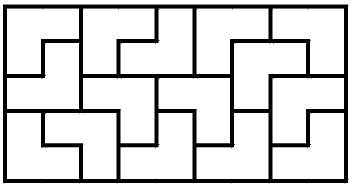
2. Jā. Skat., piem., rūtiņu lapā uzzīmētu kvadrātu A75. zīm.



A75.zīm.

3. Katrā spēlē viens spēlētājs uzvar, bet otrs zaudē. Tāpēc katra no summām vienāda ar visu izspēlēto spēļu skaitu.

4. Jā, var. Skat., piem., A76. zīm.



A76. zīm.

5. To, ka kāds apgalvojums X ir patiess (aplams), apzīmēsim attiecīgi ar X ~ p (X ~ a). Pieņemsim, ka A ~ p, tad arī B ~ p. Tāpēc C ~ a. Bet no A seko, ka C ~ p. Iegūta pretruna, tātad A ~ a. Tad C izsaka nepatiesību par A, tātad C ~ a. Ja D ~ p, tad jābūt B ~ p. Bet tad pēc B jēgas iznāk, ka D ~ a. Tātad iegūta pretruna, tāpēc D ~ a. Tad pēc D jēgas seko, ka B ~ a. Tagad skaidrs, ka E ~ p un F ~ a.

6. Pieņemsim, ka tāda uzdevuma nav. Tad katru uzdevumu atrisinājis vai nu ≤ 1 zēns, vai ≤ 3 meitenes. Pirmajā gadījumā sauksim uzdevumu par grūtu zēniem, otrajā gadījumā – par grūtu meitenēm. (Protams, uzdevums var arī būt grūts gan zēniem, gan meitenēm.) Aplūkosim visus iespējamos $21 \cdot 21 = 441$ pārus, kas sastāv no viena zēna un vienas meitenes, un katram pārim izvēlēsimies vienu no tiem uzdevumiem, kurus gan attiecīgais zēns, gan meitene atrisinājuši. Pavisam būs izdarīta 441 izvēle. Tā kā $105 + 335 = 440 < 441$, tad noteikti vai nu ≥ 106 reizes būs izvēlēts uzdevums, kas grūts zēniem, vai arī ≥ 336 reizes būs izvēlēts uzdevums, kas grūts meitenēm.
Aplūkosim šos gadījumus atsevišķi.
Vismaz 106 reizes izvēlēts uzdevums, kas grūts zēniem. Šīs izvēles attiecas uz pāriem, kuros pavisam ir 21 dažāda meitene. Tā kā $21 \cdot 5 = 105 < 106$, tad uz kādu meiteni - sacīsim, Lienīti – attiecas vismaz 6 no šīm izvēlēm. Tas nozīmē, ka Lienīte atrisinājusi pa kopīgam izvēlētajam uzdevumam ar vismaz 6 zēniem. Tā kā visi šie uzdevumi ir grūti zēniem, tad tie visi ir dažādi. Tātad Lienīte nav atrisinājusi nevienu citu uzdevumu (jo pavisam viņa atrisinājusi ≤ 6 uzdevumus). Bet tad Lienītei ir kopīgi atrisināti uzdevumi ar tikai 6 zēniem – pretruna.

Vismaz 336 reizes izvēlēts uzdevums, kas grūts meitenēm. Šīs izvēles attiecas uz pāriem, kuros pavisam ir 21 zēns. Tā kā $21 \cdot 15 = 315 < 336$, tad uz kādu zēnu – sacīsim, uz Sprīdīti – attiecas vismaz 16 no tām. Tas nozīmē, ka Sprīdītis atrisinājis pa kopīgam izvēlētajam uzdevumam ar vismaz 16 meitenēm. Tā kā visi šie uzdevumi ir grūti meitenēm un katru meitenēm grūtu uzdevumu atrisinājušas ≤ 3 meitenes, un $3 \cdot 5 = 15 < 16$, tad starp šiem uzdevumiem ir 6 dažādi. Tā kā Sprīdītis vispār atrisinājis ≤ 6 uzdevumus, tad viņš nav atrisinājis nevienu citu uzdevumu. Bet tad viņam ir kopīgi atrisināti uzdevumi ar $\leq 6 \cdot 3 = 18$ meitenēm – pretruna.

Tātad mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs.

B grupa

1. Kvadrātā pēdējais cipars var būt 1; 4; 5; 6; 9. Divciparu kvadrāti ir 16; 25; 36; 49; 64; 81. Trīsciparu kvadrāti ir 121; 144; 169; 196; 225; 256; 289; 324; 361; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 961 (neapskatām tos, kas satur ciparu 0). Redzam, ka neviens trīsciparu kvadrāts nebeidzas ar 16; 36; 49; 64; 81. Tāpēc mūsu apskatāmais skaitlis beidzas ar 25; tātad tas ir $\overline{ab225}$ vai $\overline{ab625}$. Tā kā $\overline{b225}$ resp. $\overline{b625}$ ir kvadrāti, tad, atceroties likumu, kā kāpina kvadrātā skaitļus, kuri beidzas ar 5 , iegūstam: $\overline{b2}$ resp. $\overline{b6}$ jābūt divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu reizinājumam.

Pārbaude parāda, ka tādi ir 12; 42; 72; 56. Tātad mūsu meklējamais skaitlis ir vienā no formām $\overline{a1225}$; $\overline{a4225}$; $\overline{a7225}$; $\overline{a5625}$. Līdzīgi kā iepriekš skaitļiem $\overline{a12}$ ($\overline{a42}$; $\overline{a72}$; $\overline{a56}$) jābūt divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu reizinājumiem. Pārbaude parāda, ka tādi ir skaitļi 812; 342; 272; 156; 756. Tātad mūsu meklējamie skaitļi ir 81225; 34225; 27225; 15625; 75625.

2. Varam uzskatīt, ka vispirms novelk taisnes, bet pēc tam - riņķa līnijas. Divas taisnes plakni sadala 3 vai 4 daļās, tātad augstākais 4 daļās. Ja trešā taisne krusto abas jau novilktās n punktos, tad tā pati sadalās n + 1 daļā; katra no šīm n + 1 daļām rada vienu jaunu plaknes apgabalu. Tā kā $n \leq 2$, tad trīs taisnes sadala plakni ≤ 7 daļās. Ievērojot, ka riņķa līnijai un taisnei vai arī divām dažādām riņķa līnijām var būt ≤ 2 kopīgi punkti, līdzīgi izspriežam, ka plaknes daļu skaits nepārsniedz 7 + 6 + 8 + 10 = 31. Šādu daļu skaitu sasniedz, ja visas taisnes krustojas savā starpā, katra riņķa līnija ar katru taisni un katras divas riņķa līnijas krustojas 2 punktos un visi krustpunkti ir dažādi.

3. Katrs spēlētājs izspēlē 9 spēles, tāpēc $x_i = 9 - y_i$ un $x_i^2 = 81 - 18 \cdot y_i + y_i^2$. Saskaitot šīs vienādības pie i = 1; 2;...; 10, iegūstam

$x_1^2 + \ldots + x_{10}^2 = 810 - 18 \cdot (y_1 + \ldots + y_{10}) + (y_1^2 + \ldots + y_{10}^2)$.

Kopējais zaudējumu skaits ir vienāds ar kopējo spēļu skaitu. Tātad $y_1 + \ldots + y_{10} = 45$. Tā kā $18 \cdot 45 = 810$, vajadzīgais iegūts.

4. Nē, nevar. "Stūrīša" formas figūriņa ir vienīgā iespējamā; to skaits noteikti ir 15, tātad visu figūru perimetru summa ir $15 \cdot 8 = 120$. Šī perimetru summa sastāv no: a) taisnstūra ārējā kontūra garuma, kas ir 2(5 + 9) = 28, b) divkāršota griezuma līniju kopējā garuma (jo katrs griezuma posms atdala divas figūriņas). Tātad griezumu kopgarums noteikti ir $\frac{1}{2}(120 - 28) = 46$.

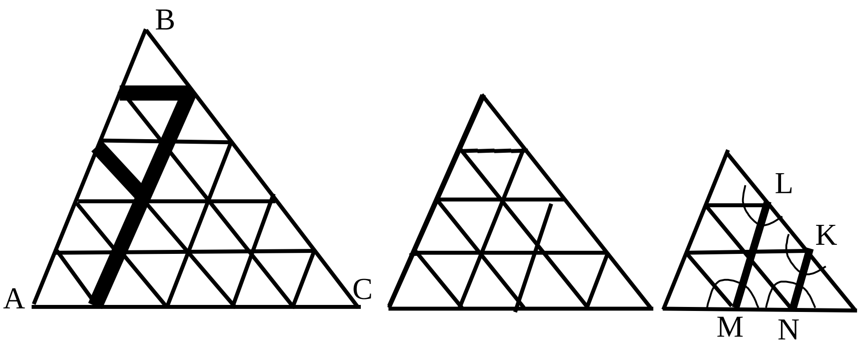
5. Izvēlamies cilvēkus A un B, kas draudzējas savā starpā. Katram no tiem ir vēl 8 citas draudzības. Tā kā bez A un B ir vēl 11 cilvēki un 8 + 8 > 11, tad eksistē tāds cilvēks C, kas draudzējas gan ar A, gan ar B. Katram no cilvēkiem A, B, C ir vēl 7 draudzības ārpus viņu trijnieka. Tātad kopā viņiem ir $7+7+7=21$ draudzība ārpus viņu trijnieka. Tā kā bez viņiem ir vēl 10 cilvēki un $21>10\cdot 2$, tad eksistē kāds no šiem 10 cilvēkiem, kas draudzējas gan ar A, gan ar B, gan ar C. (Tiešām, ja neviens no šiem 10 nedraudzētos ar A, B un C, tad katrs no viņiem draudzētos ar augstākais diviem no A, B, C; bet tad A, B un C kopā nevarētu būt vairāk par $2\cdot 10=20$ draudzībām šajā 10 cilvēku grupā.)

6. Uzdevuma risinājums līdzīgs A grupas 6. uzdevuma risinājumam ar sekojošām izmaiņām: a) uzdevumu sauc par grūtu zēniem (meitenēm), ja to atrisinājuši ≤ 2 zēni (≤ 2 meitenes), b) šķiro gadījumus, vai no 441 izvēlēm 221 reizes ir izvēlēts zēniem grūts uzdevums vai 221 reizes izvēlēts meitenēm grūts uzdevums.

2. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

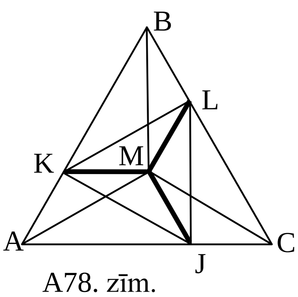
A grupa

1. Pierakstot nulli skaitļa galā, tas palielinās 10 reizes. Tātad starpība starp patieso rezultātu 948 un iegūto rezultātu 2181 ir 9 reizes lielāka par to skaitli, kuru Jānis "sabojāja". Tāpēc šis skaitlis ir $(2181-948):9=1233:9=\underline{137}$, bet otrs skaitlis ir 948 – 137 = <u>811</u>.
2. Jā. Apskatīsim 2001 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus 10234567890001, 10234567890002, ... , 10234567892001. Viens no tiem dalās ar 2001. Bet visiem šiem skaitļiem pirmie 10 cipari ir visi cipari no 0 līdz 9 ieskaitot.
3. <u>Atbilde:</u> abi daudzumi ir vienādi.
   <u>Atrisinājums:</u> Ņemsim patvaļīgu naturālu skaitli n, kur $1 \le n \le 1000$; pieņemsim, ka tas uzrakstīts ar zilu tinti. Ar sarkanu tinti uzrakstīsim visus skaitļus, kurus iegūst, aiz tieši viena n cipara pierakstot klāt nulli. Piemēram, ja n = 1201, tad ar sarkanu tinti tiks uzrakstīti skaitļi 10201; 12001; 12001; 12010 (ievērojiet, ka divi no tiem ir vienādi). Skaidrs, ka ar sarkanu tinti tiks uzrakstīti tieši tik daudzi skaitļi (varbūt ar atkārtojumiem), cik ir ciparu visos skaitļos no 1 līdz 1000 ieskaitot. Skaidrs arī, ka visi ar sarkanu tinti uzrakstītie skaitļi ir robežās no 1 līdz 10 000 ieskaitot un katrs no šādiem skaitļiem ir uzrakstīts tik reizes, cik viņā ir nuļļu. Tātad ar sarkanu tinti uzrakstīts tieši tik skaitļu, cik ir nuļļu visos skaitļos 1 līdz 10 000 ieskaitot. Tas arī pierāda mūsu apgalvojumu.
4. Skat., piem., A77. zīm., kur trijstūris ABC ar taisnēm, kas paralēlas tā malām, vispirms sadalīts 25 vienādos sev līdzīgos trijstūrīšos.

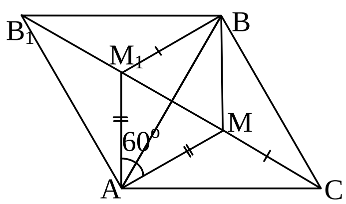


A77. zīm.

   Pilnīgā risinājumā noteikti jāpierāda gan iepriekš minētās sagriešanas iespējamība, gan tas, ka no trim daļām saliktā figūra vispār ir trijstūris, t.i., ka zīmējumā kā savietotie parādītie nogriežņi savā starpā ir vienādi un ka punktos M, N, K, L veidojas 180° lieli leņķi.
5. Dosim trīs atrisinājumus.
   1. Novilksim $MK \parallel AC$, $ML \parallel AB$, $MJ \parallel BC$ (skat. A78. zīm.). Tad četrstūri AKMJ,



A78. zīm.



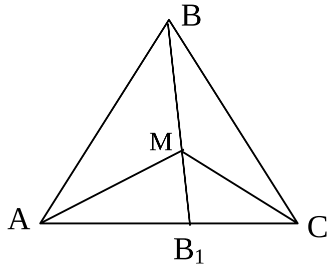
A79. zīm.

BLMK un CJML ir vienādsānu trapeces (pierādiet!). Vienādsānu trapecē diagonāles ir vienādas, tāpēc JK = AM, KL = BM un LJ = CM. Tātad ΔKLJ malu garumi ir AM, BM un CM.

2. Pagriežam ΔABC par 60° pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam ap punktu A. Tā kā AC = AB un $\angle BAC = 60^O$, tad punkts C attēlojas par punktu B, bet punkti B un M – attiecīgi par punktiem B_1 un M_1 (skat A79. zīm.). Tā kā nogrieznis CM attēlojas par BM_1, tad $\underline{CM = BM_1}$. Tā kā AM attēlojas par AM_1, tad $AM = AM_1$; tā kā pagrieziens notiek par 60°, tad $\angle M_1AM = 60^O$, un ΔM_1AM ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60°, tātad vienādmalu. No tā seko, ka $\underline{AM = MM_1}$.

No abām izceltajām vienādībām secinām, ka ΔBM_1M malu garumi ir BM, AM un CM.

3. No ΔAMC seko, ka $\underline{AM + MC > AC}$ (skat. A80. zīm.). Varam pieņemt, ka



A80. zīm.

$\angle BB_1C \geq 90^O$. Tad trijstūrī BB_1C lielākais leņķis ir $\angle BB_1C$. Tā kā pret lielāku leņķi atrodas lielāka mala, tad $BC > BB_1$. Bet AC = BC un $BB_1 > BM$, tātad $\underline{AC > BM}$. (Piezīme: ja būtu $\angle BB_1C < 90^O$, mēs apskatītu trijstūri BB_1A, kurā $\angle BB_1A > 90^O$.) No pasvītrotajām nevienādībām seko, ka AM + CM > BM. Līdzīgi pierāda, ka AM + BM > CM un BM + CM > AM. Tātad, apskatot lielumus AM, BM un CM, katru divu summa ir lielāka par trešo. No skolas kursa zinām, ka tad šie lielumi ir kāda trijstūra malu garumi.

6. Vispirms parādīsim, kā samainīt vietām jebkurus divus blakus esošus cilvēkus, citus cilvēkus atstājot sākotnējās pozīcijās. Tad, atkārtojot šādus "gājienus", pakāpeniski varēsim iegūt jebkuru cilvēku sakārtojumu. Turpmāk ar grieķu burtiem α, β apzīmētas rindā stāvošu cilvēku virknītes; ar x un y apzīmēsim tos blakus stāvošos cilvēkus, kurus gribam samainīt vietām.

$$\alpha\ x\ y\ \beta \quad (1)$$

Sākot ar situāciju (1), virknītes β cilvēkus pa vienam nosūtām uz kreiso galu, kamēr iegūstam situāciju (2):

$$\beta\ \alpha\ x\ y \quad (2)$$

Samainām vietām x un y, iegūstot (3):

$$\beta\ \alpha\ y\ x \quad (3)$$

Nosūtām uz kreiso galu x un y, iegūstot (4):

$$y\ x\ \beta\ \alpha \quad (4)$$

Virknītes a cilvēkus pa vienam nosūtām uz kreiso galu, iegūstot (5):

$$\alpha\ y\ x\ \beta \quad (5)$$

Vajadzīgais sasniegts.

Ilustrēsim šī algoritma darbu konkrētā piemērā, kad sākotnējā cilvēku virkne ir ABCXYDE:

ABCXYDE
EABCXYD
DEABCXY
DEABCYX
XDEABCY
YXDEABC
CYXDEAB
BCYXDEA
ABCYXDE.

B grupa

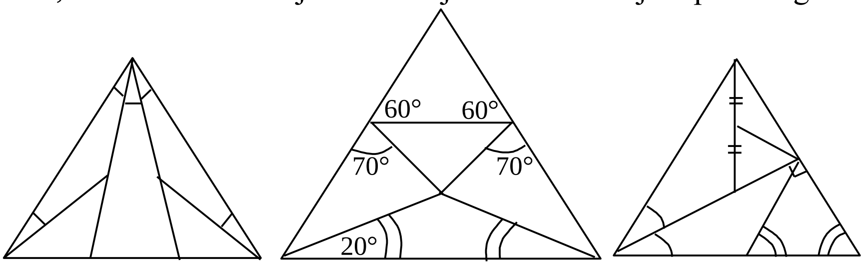
1. Vispirms noskaidrosim, kura rūķīša ieguvums palielinātos, mainot dalīšanas noteikumus. Dalot naudu attiecībā 8:6:5, rūķīši saņēma attiecīgi $\frac{8}{19}; \frac{6}{19}$ un $\frac{5}{19}$ visas naudas. Dalot naudu attiecībā 7:5:4, rūķīši saņemtu attiecīgi $\frac{7}{16}; \frac{5}{16}$ un $\frac{4}{16}$ (jeb $\frac{1}{4}$)visas naudas. Ievērojam, ka $\frac{7}{16} = \frac{7 \cdot 19}{16 \cdot 19} = \frac{133}{16 \cdot 19} > \frac{128}{16 \cdot 19} = \frac{8 \cdot 16}{16 \cdot 19} = \frac{8}{19}$. Tātad, mainot sadalīšanas kārtību, pirmajam rūķītim naudas daudzums palielinātos. Turpretī $\frac{5}{16} = \frac{5 \cdot 19}{16 \cdot 19} = \frac{95}{16 \cdot 19} < \frac{96}{16 \cdot 19} = \frac{6 \cdot 16}{16 \cdot 19} = \frac{6}{19}$ un $\frac{1}{4} = \frac{19}{4 \cdot 19} < \frac{20}{4 \cdot 19} = \frac{5}{19}$, tātad, mainot sadalīšanas kārtību, otrajam un trešajam rūķītim naudas daudzumi samazinātos. No šejienes iegūstam, ka 25 dālderi ir $\frac{7}{16} - \frac{8}{19} = \frac{7 \cdot 19}{16 \cdot 19} - \frac{8 \cdot 16}{16 \cdot 19} = \frac{133-128}{16 \cdot 19} = \ = \frac{5}{16 \cdot 19} = \frac{5}{304}$ visas naudas. Tātad 5 dālderi ir $\frac{1}{304}$ visas naudas, un pavisam lādē bija $5 \cdot 304 = 1520$ dālderi. No šī daudzuma aprēķinām vienu deviņpadsmito daļu: 1520:19 = 80. Tātad pirmais rūķītis saņēma $8 \cdot 80 = 640$ dālderus, otrais – $6 \cdot 80 = 480$ dālderus un trešais – $5 \cdot 80 = 400$ dālderus.
2. Atbilde: pirmskaitļu var būt 0; 1; 2; 3; 4.
   Atrisinājums: Pieņemsim, ka a, b, c, d, e – dažādi pirmskaitļi. Visos tālāk norādītajos piemēros katru četru uzrādīto skaitļu reizinājums dalās ar piekto:
   a) ab, bc, cd, de, ea (0 pirmskaitļu),
   b) a, abcd, abce, abde, acde (1 pirmskaitlis),
   c) a, b, ab, $(ab)^2$, $(ab)^3$ (2 pirmskaitļi),
   d) a, b, c, abc, $(abc)^2$ (3 pirmskaitļi),
   e) a, b, c, d, abcd (4 pirmskaitļi).
   Skaidrs, ka abcd nedalās ar e. Tāpēc visi pieci skaitļi nevar būt pirmskaitļi.
3. Var gadīties, ka ir 36 pieturas: viena pietura, kurā pietur visu firmu autobusi, un pa 5 pieturām katrai no 7 firmām, kas visas savā starpā atšķiras. Tad pieturu ir $5 \cdot 7 + 1 = 36$, un no katras pieturas uz katru citu var aizbraukt kaut vai caur "universālo" pieturu. Pierādīsim, ka vairāk par 36 pieturām nevar būt.
   Pieņemsim pretējo: ir vismaz 37 pieturas.
   Apskatīsim vienas firmas apkalpotās 6 pieturas. Ja neviena cita firma neapkalpotu nevienu no tām, tad no šīm pieturām nevarētu aizbraukt ne uz vienu citu -

pretruna. Tātad kāda firma apkalpo vismaz vienu no šīm 6 pieturām. Tāpēc abas šīs firmas kopā apkalpo ne vairāk par 6 + 6 – 1 = 11 pieturām.

Ja nevienu no šīm 11 pieturām neapkalpotu neviena cita firma, tad no tām nevarētu nokļūt ne uz vienu citu - pretruna. Tātad vēl kāda trešā firma apkalpo vismaz vienu no šīm 11 pieturām. Tātad līdz šim minētās trīs firmas kopā apkalpo ne vairāk par 11 + 6 – 1 = 16 dažādas pieturas.

Līdzīgi turpinot, iegūstam, ka eksistē ceturtā firma, kura kopā ar šīm trim apkalpo ne vairāk par $16+6-1=21$ pieturu; eksistē piektā firma, kura kopā ar šīm četrām apkalpo ne vairāk par $21+6-1=26$ pieturām; eksistē sestā firma, kura kopā ar šīm piecām apkalpo ne vairāk par $26+6-1=31$ pieturām. Tā kā septītajai firmai jāapkalpo vismaz vienu no 31 pieturas, tad kopējais pieturu skaits nav lielāks par $31+6-1=36$. Iegūta pretruna ar iepriekš izcelto pieņēmumu. tātad pieturu tiešām ir ne vairāk kā 36.

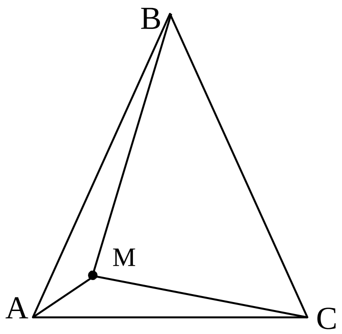
4. Skat., piem., A81. zīm. Pierādījumus atstājam veikt lasītājam patstāvīgi.



A81. zīm.

5. Atbilde: nevienam.

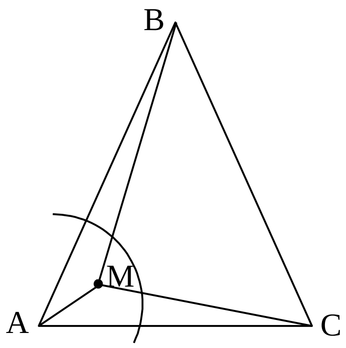
Risinājuma ideja: Ja trijstūris ABC nav vienādmalu, tad tam var atrast divas dažāda garuma malas; pieņemsim, ka tās ir AB un AC, pie tam AB > AC. Izvēlēsimies punktu M ļoti tuvu virsotnei A (skat A82. zīm.).



A82. zīm.

Tad $BM \approx AB$ un $CM \approx AC$. Tāpēc $BM - CM \approx AB - AC$. Ja M būs tik tuvu virsotnei A, ka AM ir daudzkārt mazāks par starpību AB – AC, tad AM < BM – CM jeb AM + CM < BM. Bet trijstūrī katrai malai jābūt īsākai par abu pārējo malu garumu summu.

Precīzs risinājums. Pieņemsim, ka trijstūris ABC nav vienādmalu. Tad tajā var atrast divas dažāda garuma malas. Pieņemsim, ka tās ir AB un AC, un AB > AC. Novilksim ap virsotni A riņķa līniju ar rādiusu $r = \frac{1}{4}(AB - AC)$ (skat A83. zīm.).



A83. zīm.

Izvēlēsimies trijstūra ABC iekšēju punktu M tā, lai tas atrastos šīs riņķa līnijas iekšpusē. Tad $AM < r$. No trijstūriem AMB un AMC iegūstam $BM + AM > AB$ un $AC + AM > CM$. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$$BM + AM + AC + AM > AB + CM$$

$$BM > (AB - AC) + CM - 2AM \quad (*)$$

Tā kā $AB - AC = 4r$ un $AM < r$, tad no (*) seko

$$BM > 4r + CM - 2r$$

$$BM > CM + 2r \quad (**)$$

Tā kā $AM < r < 2r$, tad no (**) seko $BM > CM + AM$. Bet tas nozīmē, ka nevar izveidot trijstūri, kura malu garumi būtu BM, CM un AM.

6. Apzīmēsim monētas ar A; B; C; D; E un F. Pirmajā svēršanā nosveram vienlaicīgi A, B un C, bet otrajā nosveram vienlaicīgi B, C , D un E. Aplūkosim sekojošas iespējas:

a) visas svērtās monētas ir ar vienādu masu. Tad svaru rādījumu attiecība ir $\frac{3}{4}$;

b) B vai C ir ar masu y, un tā atšķiras no pārējo monētu masas x. Tad svaru rādījumu attiecība ir $\frac{2x+y}{3x+y}$. Ja būtu $\frac{2x+y}{3x+y} = \frac{3}{4}$, tad $4(2x + y) = 3(3x + y)$, $8x + 4y = 9x + 3y$ un $x = y$ – pretruna. Tātad svaru rādījumu attiecība noteikti nav $\frac{3}{4}$.

c) līdzīgi kā b) gadījumā pierāda, ka svaru rādījumu attiecība nav $\frac{3}{4}$ arī gadījumos, ja A, D vai E ir ar atšķirīgu masu no pārējām monētām.

No šejienes varam secināt: ja abu svaru rādījumu attiecība $\frac{3}{4}$, tad visas monētas A, B, C, D, E ir ar vienādu masu, kuru no svaru rādījumiem viegli aprēķināt. Tad ar trešo svēršanu nosakām F masu. Ja turpretī abu svaru rādījumu attiecība nav $\frac{3}{4}$, tad viena no monētām A, B, C, D, E ir ar citādu masu nekā pārējās (un tad F noteikti ir "īstā" monēta). Šajā gadījumā ar trešo svēršanu nosveram vienlaicīgi C un D. Apzīmējot piecu monētu masas ar x, bet atšķirīgās monētas masu ar y, iegūstam sekojošu tabulu, kas rāda svēršanu rezultātus m_1, m_2 un m_3 atkarībā no tā, kura no monētām A; B; C; D; E ir ar masu y:

Svēršanas rezultāts	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
$\mathbf{m_1}$	2x+y	2x+y	2x+y	3x	3x
$\mathbf{m_2}$	4x	3x+y	3x+y	3x+y	3x+y
$\mathbf{m_3}$	2x	2x	x+y	x+y	2x

Viegli pārbaudīt, ka

a) $m_2 = 2m_3$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir A,

b) $m_3 = 2(m_2 - m_1)$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir B,

c) $m_2 + m_3 = 2m_1$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir C,

d) $2m_1 = 3(m_2 - m_3)$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir D,

e) $2m_1 = 3m_3$ tad un tikai tad, ja atšķirīgā monēta ir E.

Tā kā skaitļi m_1, m_2 un m_3 mums ir zināmi, tad mēs varam noskaidrot, kurš no minētajiem gadījumiem ir spēkā, un katrā gadījumā viegli aprēķināt x un y vērtības.

Komentārs. Var pierādīt, ka 7 monētu gadījumā, no kurām vienai varbūt ir citāda masa nekā pārējām, visu monētu masas iespējams noskaidrot ar 5 svēršanām (pierādījums ir ļoti sarežģīts).

3. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Nē, nevar. Ja skaitlis x beidzas ar kādu no cipariem 1; 4; 6; 9, tad skaitlis 37x beidzas attiecīgi ar ciparu 7; 8; 2; 3, bet mūsu rīcībā nav ne 7, ne 8, ne 2, ne 3.

2. Apzīmēsim pirmā koncerta ienākumu ar M. Ja biļešu cena nebūtu paaugstināta, tad otrā koncerta ienākumam būtu jābūt $1\frac{1}{2}\mathrm{M}$. Bet tas ir $1\frac{1}{4}\mathrm{M}$. Tātad biļetes cena otrajā koncertā attiecas pret biļetes cenu pirmajā koncertā kā $\left(1\frac{1}{4}\mathrm{M}\right):\left(1\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{5}{4}\mathrm{M}\right):\left(\frac{6}{4}\mathrm{M}\right)=5:6$. Tātad biļetes cena otrajā koncertā ir $\frac{15\mathrm{Ls}}{6}\cdot 5=12\mathrm{Ls}\ 50\mathrm{s}$.

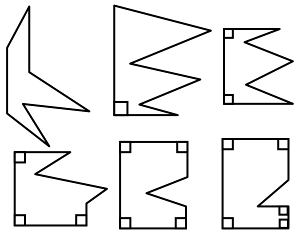
3. Var, piemēram, uzrakstīt skaitļus 1111; 1223; 1332; 2122; 2231; 2313; 3133; 3212; 3321.
Uzrakstot 10 skaitļus, vismaz četriem no tiem sakritīs pirmais cipars (jo $3\cdot 3=9<10$). Šiem četriem skaitļiem otrais cipars var būt tikai 1; 2; 3, tāpēc vismaz diviem no tiem sakritīs arī otrais cipars. Tāpēc 10 skaitļus saskaņā ar uzdevuma prasībām uzrakstīt nevar.

4. Divu divciparu skaitļu reizinājumam var būt vai nu 3, vai 4cipari. Apzīmējot Nezinīša reizinātos divciparu skaitļus ar x un y, iegūstam, ka pastāv viena no vienādībām.
(A) $x\cdot y=105$
(B) $x\cdot y=150$
(C) $x\cdot y=1005$
(D) $x\cdot y=1050$
(E) $x\cdot y=1500$
Tālāk apskatām šīs iespējas atsevišķi.
Ievērojam, ka $105=3\cdot 5\cdot 7$, tātad 105 nav izsakāms kā divu divciparu skaitļu reizinājums. Tāpēc (A) gadījumā atrisinājumu nav.
Ievērojam, ka $150=2\cdot 3\cdot 5\cdot 5$. Vienīgais skaitļa 150 sadalījums divu divciparu skaitļu reizinājumā ir $10\cdot 15\ (=15\cdot 10)$. Bet Nezinītis nevar savā kalkulatorā ievadīt skaitli 10. Tāpēc arī (B) gadījumā atrisinājumu nav.
Ievērojam, ka $1005=3\cdot 5\cdot 67$ un 67 tālāk sadalīt naturālos reizinātājos vairs nevar. Iegūstam vienu vienīgu iespēju: Nezinītis reizināja skaitļus 15 un 67.
Ievērojam, ka $1050=2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7$. Lai neviens no skaitļiem x un y nebeigtos ar nulli, reizinātājs 2 "nedrīkst būt kopā" ar 5. Iegūstam divas iespējas: ir reizināti vai nu skaitļi $14\ (=2\cdot 7)$ un $75\ (=3\cdot 5\cdot 5)$, vai arī skaitļi $42\ (=2\cdot 3\cdot 7)$ un $25\ (=5\cdot 5)$.
Ievērojam, ka $1500=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5$. Atkal ievērojot, ka reizinātājs 5 "nedrīkst būt kopā" ar 2, vienam reizinātājam jāsatur visi piecinieki, tātad tas ir vismaz $125\ (=5\cdot 5\cdot 5)$ – trīsciparu skaitlis. Tāpēc arī (E) gadījumā atrisinājuma nav.

5. Ja kvadrātā ir nepāra skaits rūtiņu, tad melno un balto rūtiņu daudzumi tajā atšķiras viens no otra par 1. Turklāt kvadrāta centrālā rūtiņa ir tajā krāsā, kurā ir rūtiņu vairākums.

Tā kā lielajā kvadrātā ar izmēriem 100×100 ir vienāds skaits balto un melno rūtiņu, tad kvadrātu ar vairāk baltajām rūtiņām ir tikpat, cik kvadrātu ar vairāk melnajām rūtiņām. No šejienes un iepriekš izceltā fakta seko pierādāmais.

6. Septiņstūra iekšējo leņķu lielumu summa ir $180^\circ \cdot (7-2) = 180^\circ \cdot 5 = 900^\circ$. Septiņu taisnu leņķu lielumu summa būtu $90^\circ \cdot 7 = 630^\circ$; tātad visi 7 leņķi nevar būt taisni. Sešu taisnu leņķu lielumu summa būtu $90^\circ \cdot 6 = 540^\circ$; tad septītā leņķa lielums būtu $900^\circ - 540^\circ = 360^\circ$, kas nevar būt. Tātad septiņstūrī nevar būt arī 6 taisni leņķi.
Tas, ka septiņstūrī var būt 0; 1; 2; 3; 4; 5 taisni leņķi, redzams A84. zīm.



A84. zīm.

B grupa

1. Apzīmēsim votivapu skaitu ar x, bet šillišallu skaitu ar y. Katrs šillišalla pazīst y-1 citus šillišallas. Tā kā šillišallas runā patiesību, tad votivapu ir vairāk nekā y-1, tātad vismaz y. Tāpēc $x \geq y$ (1)
Tā kā votivapas melo, tad patiesībā neviens votivapa nepazīst vairāk votivapu nekā šillišallu. Tā kā katrs votivapa pazīst x-1 citus votivapas, tad katrs votivapa pazīst vimaz x-1 šillišallas. Tāpēc pazīšanos skaits S starp votivapām un šillišallām ir vismaz $x(x-1)$. No otras puses, S nav lielāks par $y \cdot x$, jo neviens šillišalla nevar pazīt vairāk par x votivapām. No nevienādībām $x(x-1) \leq S \leq y \cdot x$ seko $x(x-1) \leq y \cdot x$ un, tā kā $x \neq 0$, tālāk $x - 1 \leq y$. Ņemot vērā (1), iegūstam $y \leq x \leq y+1$ (2)
Apskatīsim abas iespējas, ko pieļauj (2).
A. Varbūt $x = y$. Ja kāds šillišalla nepazītu kaut vienu votivapu, tad viņa teiktais būtu meli - pretruna. Tāpēc katrs šillišalla pazīst katru votivapu.
B. Varbūt $x = y + 1$. Tad katrs no $y + 1$ votivapām pazīst y votivapas; saskaņā ar iepriekš izcelto apgalvojumu viņam jāpazīst vismaz y šillišallas, tātad visi šillišallas.

2. No diviem pāra skaitļiem ar aprakstīto operāciju iegūst pāra skaitli, no pāra un nepāra skaitļiem - nepāra skaitli. Tātad uz tāfeles vienmēr paliek tieši viens nepāra skaitlis. Tāpēc pēdējais palikušais skaitlis noteikti būs nepāra.
Tā kā gājienu rezultātā iegūst nenegatīvus skaitļus un $0 < x - y < x$, ja $x > y > 0$, tad nevar iegūt lielākus skaitļus par 16. Tāpēc noteikti kā pēdējos nevar iegūt citus skaitļus kā vien (varbūt!) 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15.
Parādīsim, ka katru no šiem skaitļiem var iegūt kā pēdējo.
No 1 un 2 var iegūt 1: $2 - 1 = 1$.
No 1, 2 un 4 var iegūt 3 ($2 - 1 = 1$ un $4 - 1 = 3$) un 1 ($4 - 2 = 2$ un $2 - 1 = 1$).
Iedomāsimies, ka mums sākumā doti skaitļi 1; 2; 4; 8.
a) skaitļus 1 un 3 var iegūt, vispirms iegūstot $8 - 4 = 4$ un tālāk rīkojoties kā iepriekšējā punktā,

b) skaitļus 5 un 7 var iegūt, vispirms no 1; 2; 4 iegūstot 3 vai 1 (skat. iepriekšējo punktu) un pēc tam iegūstot 8 – 3 = 5 vai 8 – 1 = 7.
Ja doti skaitļi 1; 2; 4; 8; 16, tad:
a) skaitļus 1; 3; 5; 7 var iegūt, vispirms iegūstot 16-8 = 8 un tālāk rīkojoties kā iepriekšējā punktā,
b) skaitļus 9; 11; 13; 15 var iegūt, vispirms no 1; 2; 4; 8 iegūstot 7; 5; 3 vai 1 un pēc tam iegūstot atbilstoši 16 – 7 = 9, 16 – 5 = 11, 16 – 3 = 13, 16 – 1 = 15.
Komentārs. Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt, ka no skaitļiem 1; 2; 4; 8; …; 2^{n-1}; 2^n ar uzdevumā minētajām operācijām kā pēdējo var iegūt jebkuru naturālu nepāra skaitli, kas mazāks par 2^n, un nekādu citu skaitli.

3. Ir iespējamas 9 dažādas krāsas (skat. A85. zīm.).

7	7	8	8	9	9
7	7	8	8	9	9
4	4	5	5	6	6
4	4	5	5	6	6
1	1	2	2	3	3
1	1	2	2	3	3

A85. zīm.

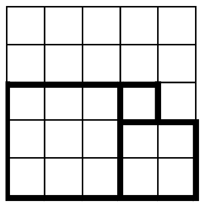
X	A	Y

A	Y
X	

A86. zīm.

Pieņemsim, ka krāsu ir vairāk par 9; tad to ir vismaz 10. Tā kā pavisam ir 36 rūtiņas un $10\cdot4=40>36$, tad kādā no krāsām nokrāsotas ne vairāk par 3 rūtiņām. Ja A - viena no tām, tad abas pārējās rūtiņas X un Y var būt novietotas tikai tā, kā parādīts A86 zīmējumā (varbūt triju rūtiņu veidotā figūra pagriezta citā virzienā). Bet tad attiecībā uz X un Y uzdevuma nosacījumi neizpildās. Iegūta pretruna, tātad krāsu nav vairāk par 9.

4. Atbilde**:** mazākais iespējamais virsmas laukums ir 194.
Atrisinājums. Figūru ar virsmas laukumu 194 var iegūt, ja kubus novieto, piemēram, tā, kā parādīts A87. zīm. Tur attēlots skats no augšas. Trīs mazākie kubi novietoti uz lielā kuba vienas skaldnes.



A87. zīm.

Saskāršanās rezultātā no kubu virsmas laukumu summas 6(25 + 9 + 4 + 1) "tiek zaudēti" 6 kvadrāti 1×1, 4 kvadrāti 2×2 un 2 kvadrāti 3×3. Tāpēc virsmas laukums ir $6\cdot(25+9+4+1)-6\cdot1-4\cdot4-2\cdot9=234-6-16-18=194$.
Tagad pierādīsim, ka mazāku virsmas laukumu iegūt nevar. Tas būs pierādīts, ja pamatosim, ka kopējais saskāršanās laukums uz kubu virsmām nevar būt lielāks par $6\cdot1+4\cdot4+2\cdot9$.
Īsuma pēc kubus turpmāk sauksim par K_1, K_2, K_3 un K_5 atbilstoši to šķautņu garumiem. Jebkuri divi kubi savā starpā var saskarties ar augstākais vienu skaldni katrs. Tāpēc uz K_1 virsmas saskāršanās laukums nevar būt lielāks par $3\cdot(1\times1)=3$.
Uz K_2 virsmas tas nevar būt lielāks par $2\cdot(2\times2)+1\times1$ (divas skaldnes pilnībā tiek nosegtas ar lielākajiem kubiem, bet uz trešās skaldnes K_1 rada maksimāli

iespējamu pārsegumu). Uz K_3 virsmas saskāršanās laukums nevar būt lielāks par $3\times 3+2\times 2+1\times 1$, un arī uz K_5 virsmas tas nevar būt lielāks par $3\times 3+2\times 2+1\times 1$. Tāpēc kopējais saskāršanās laukums uz visu kubu virsmām nevar būt lielāks par $3\cdot(1\times 1)+2\cdot(2\times 2)+$ $+1\times 1+2(3\times 3+2\times 2+1\times 1)=6\cdot(1\times 1)+4\cdot(2\times 2)+2\cdot(3\times 3)$, k.b.j.

5. Atbilde: jā, tā var gadīties.

Atrisinājums: Pieņemsim, ka Pēteris vienīgais atrisināja 10 uzdevumus, bet Andris vienīgais atrisināja 5 uzdevumus; bez tam bija 13 tādi uzdevumi, kurus atrisināja Jānis un Andris, un 7 tādi uzdevumi, kurus atrisināja Jānis un Pēteris.

Pārliecinieties paši, ka Jānis atrisināja 20 uzdevumus, Andris - 18 uzdevumus un Pēteris – 17 uzdevumus; savukārt Jānis saņēma 20 punktus, Andris – 23 punktus un Pēteris – 27 punktus.

6. Atbilde: jā, tādi skaitļi eksistē.

Atrisinājums: Ar n! apzīmējam visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n ieskaitot. Piemēram, $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$.

Apskatām skaitļus $1\cdot 200!, 2\cdot 200!, 3\cdot 200!, \ldots, 100\cdot 200!$. Skaidrs, ka tie ir naturāli, dažādi un to skaits ir 100. Ņemam divus no tiem: $x\cdot 200!$ un $y\cdot 200!$ $(1\le x, y\le 100)$. Tad

$$\frac{(x\cdot 200!)(y\cdot 200!)}{(x\cdot 200!)+(y\cdot 200!)}=\frac{x\cdot y\cdot 200!\cdot 200!}{(x+y)200!}=x\cdot y\cdot\frac{200!}{(x+y)}.$$

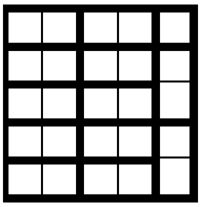
Tā kā $1\le x\le 100$ un $1\le y\le 100$, tad $2\le x+y\le 200$ (patiesībā pat $3\le x+y\le 199$, jo $x\ne y$). Tāpēc reizinājums $200!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 199\cdot 200$ satur reizinātāju x + y, tātad dalās ar x + y.

4. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Ja pārdeva x kg "Murijuri" un y kg "Mazakaza", tad kopējais ieņēmums bija 3x + 5y latu. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem 3x = 5y, tāpēc $x = \frac{5}{3}y$ un kopā pārdeva $y + \frac{5}{3}y = \frac{8}{3}y$ kilogramu konfekšu, bet kopējais ieņēmums bija 3x + 5y = 5y + 5y = 10y latu. Tātad maisījumu varēja pārdot par $10y : \left(\frac{8}{3}y\right) = \frac{30}{8} = 3\frac{3}{4}$ latiem kilogramā jeb par Ls 3,75 kilogramā.

2. Sadalām kvadrātu 12 rūtiņu pāros un 1 atsevišķā rūtiņā, kā redzam A88. zīm.



A88. zīm.

No 14 melnajām rūtiņām vismaz 14 – 1 = 13 atrodas rūtiņu pāros. Tā kā šādu pāru ir tikai 12, tad noteikti būs divas melnas rūtiņas no viena pāra. Tās atrodas blakus.

3. Naturāls skaitlis, kas beidzas ar n nullēm, dalās ar $\underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\text{n reizes}}$. Tātad tas dalās ar $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{n reizes}}$ un ar $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{\text{n reizes}}$.

Noskaidrosim vispirms, cik pieciniekus var atrast uzdevumā minētajā reizinājumā R.

Katrs piektais naturālais skaitlis dalās ar 5. Tā kā $2002 = 5 \cdot 400 + 2$, tad R satur 400 reizinātājus, kas dalās ar 5.

Daži no šiem reizinātājiem dalās ar $5 \cdot 5 = 25$. Tā kā $2002 = 25 \cdot 80 + 2$, tad R satur 80 reizinātājus, kas dalās ar 25.

Daži no šiem reizinātājiem dalās ar $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Tā kā $2002 = 125 \cdot 16 + 2$, tad R satur 16 reizinātājus, kas dalās ar 125.

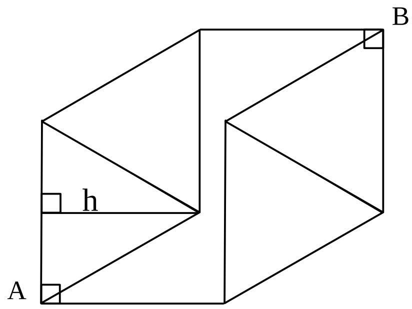
Daži no šiem reizinātājiem dalās ar $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.Tā kā $2002 = 625 \cdot 3 + 127$, tad R satur 3 reizinātājus, kas dalās ar 625.

Tā kā $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125 > 2002$, tad R nesatur nevienu reizinātāju, kas dalās ar 3125.

Tātad no R ietilpstošajiem reizinātājiem 400 reizinātāji satur vismaz vienu piecinieku. No šiem 400 reizinātājiem 80 reizinātāji satur vismaz vēl vienu piecinieku. No šiem 80 reizinātājiem 16 reizinātāji satur vēl vismaz vienu piecinieku, un no šiem 16 reizinātājiem 3 reizinātāji satur vēl vismaz vienu piecinieku. Tātad R pavisam satur 400 + 80 + 16 + 3 = 499 pieciniekus.

Tā kā R acīmredzot satur kā reizinātājus vismaz 1001 divnieku (R satur 1001 pāra reizinātāju) un 1001 > 499, tad R beidzas ar tieši 499 nullēm.

4. Jā, var. Skat., piem., A89. zīm., kur punktos A un B kontūrā veidojas taisni leņķi. Tā kā h < 1, tad abi rombi nepārklājas.



A89. zīm.

5. Jā, var. Aprakstīsim vienu no daudzajām metodēm, kā tādus skaitļus var atrast. Izvēlamies četrus dažādus naturālu skaitļu kvadrātus a^2; b^2; c^2; d^2. Apzīmējam $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Skaitļi $\frac{S}{3} - a^2$, $\frac{S}{3} - b^2$, $\frac{S}{3} - c^2$ un $\frac{S}{3} - d^2$ ir tādi, ka katru triju summa ir naturāla skaitļa kvadrāts. Tiešām, $\left(\frac{S}{3} - a^2\right) + \left(\frac{S}{3} - b^2\right) + \left(\frac{S}{3} - c^2\right) = S - (a^2 + b^2 + c^2) = d^2$; citas triju saskaitāmo summas pārbauda līdzīgi.

Atliek izvēlēties a, b, c, d tā, lai S dalītos ar 3 un lai $\frac{S}{3}$ būtu lielāks gan par a^2, gan par b^2, gan par c^2, gan par d^2. Var ņemt, piemēram, $a^2 = 64$, $b^2 = 81$, $c^2 = 100$, $d^2 = 121$. Tad S = 366 un $\frac{S}{3} = 122$. Mūs interesējošie skaitļi tad iznāk 1; 22; 41; 58.

6. Skat., piem., A90. zīm.

3	14	9
19	2	5
4	10	12

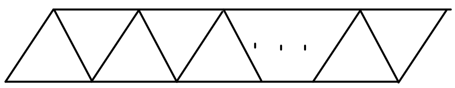
A90. zīm.

B grupa

1. <u>Atbilde:</u> nē, tas nav iespējams.

<u>Risinājums</u>. Pieņemsim no pretējā, ka to izdarīt izdevies. Saskaitot tās summas, kuras ir pāra skaitļi, iegūst pāra skaitli P. Saskaņā ar pieņēmumu saskaitot tās summas, kuras ir nepāra skaitļi, iegūst to pašu pāra skaitli P. Tāpēc, saskaitot visas summas, iegūst P + P = 2P; tā kā P – pāra skaitlis, tad 2P dalās ar 4. Bet 2P ir divkāršota visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summa, jo katrs kvadrātā ierakstītais skaitlis ietilpst vienas rindas elementu summā un vienas kolonnas elementu summā. Atliek ievērot, ka 1 + 2 + ... + 25 ir nepāra skaitlis, jo satur nepāra skaitu nepāra saskaitāmo (tie ir 1; 3; 5; ...; 23; 25 – skaitā trīspadsmit). Tāpēc 2(1 + ... + 25) nedalās ar 4. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

2. Jā, var. Kā to izdarīt, redzams A91. zīm.



A91. zīm.

Komentārs. Uzdevuma nosacījumos ieviesusies bija kļūda. Vārdu "salikt izliektu daudzstūri" vietā vajadzēja būt "salikt izliektu sešstūri". Pierādiet patstāvīgi, ka šādā formulējumā a) gadījumā atbilde ir "nē", bet b) gadījumā atbilde ir "jā".

3. Atbilde: šis cipars ir 6.

Atrisinājums. Izmantosim sekojošus apzīmējumus:

a) ar n! sapratīsim visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n ieskaitot. Piemēram, $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$; 1! = 1 utt.

b) to, ka naturālu skaitļu a un b pēdējie nenulles cipari ir vienādi, pierakstīsim kā a ~ b. Piemēram, 32 ~ 52; 610 ~ 11 utt. Skaidrs: ja naturāls skaitlis M beidzas ar nenulles ciparu m, tad M ~ m.

Risinājuma pamatā būs sekojoša teorēma.

Teorēma. Ja n – naturāls skaitlis, tad $(5n)! \sim 2^n \cdot n!$ un n! pēdējais nenulles cipars nav 5.

Pieņemsim uz brīdi, ka teorēma jau pierādīta.

Tad

$$2000! = (5\cdot 400)! \sim 2^{400}\cdot 400! = 2^{400}\cdot (5\cdot 80)! \sim 2^{400}\cdot 2^{80}\cdot 80! = 2^{480}(5\cdot 16)! \sim 2^{480}\cdot 2^{16}\cdot 16! =$$

$$= 2^{496}\cdot 16\cdot 15! = 2^{500}(5\cdot 3)! \sim 2^{500}\cdot 2^{3}\cdot 3! = 2^{500}\cdot 8\cdot 6 = 2^{500}\cdot 48 = (2^4)^{125}\cdot 48 = 16^{125}\cdot 48 \sim 6\cdot 48 \sim 8$$

.

Tāpēc $2002! = 2000!\cdot 2001\cdot 2002 \sim 8\cdot 1\cdot 2 \sim 6$.

Atliek pierādīt teorēmu.

Sadalīsim (5n)! reizinātājus grupās pa 5:

$$(5n)! = (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)\cdot(6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10)\cdot(11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15)\cdot$$
$$\cdot\ldots\cdot((5n-4)(5n-3)(5n-2)(5n-1)\cdot 5n).$$

Ievērosim, ka katrā grupā ir vismaz divi pāra reizinātāji. Katru grupu $(5k-4)(5k-3)(5k-2)(5k-1)\cdot 5k$ pārveidojam formā $\frac{(5k-4)(5k-3)(5k-2)(5k-1)}{2}\cdot 10k$, kur abi reizinātāji ir naturāli skaitļi. Tāpēc

$$(5n)! = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2}\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2}\cdot\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{2}\cdot\ldots\cdot$$
$$\frac{(5n-4)(5n-3)(5n-2)(5n-1)}{2}\cdot 10^n\cdot n!.$$

Pierādīsim, ka katra reizinātāja $R_k = \frac{(5k-4)(5k-3)(5k-2)(5k-1)}{2}$ pēdējais cipars ir 2.

Ja k dalās ar 4 (t. i., k = 4t, $t\in N$), tad $R_k = \frac{(20t-4)(20t-3)(20t-2)(20t-1)}{2} =$

$= (10t-2)(20t-3)(20t-2)(20t-1) = (\ldots 8)(\ldots 7)\cdot(\ldots 8)(\ldots 9) = \ldots 2$, k.b.j.

Gadījumus, kad k dod atlikumus 1; 2; 3, dalot ar 4 (resp. k = 4t + 1; k = 4t + 2; k = 4t + 3, $t\in N$), apskata līdzīgi.

Tātad $(5n)! = \underbrace{(\ldots 2)(\ldots 2)\ldots(\ldots 2)}_{n\ \text{reizes}}\cdot 10^n\cdot n!$. Skaidrs, ka 10n neietekmē reizinājuma pēdējo nenulles ciparu. Tāpēc

(*) $(5n)! \sim \underbrace{(\ldots 2)(\ldots 2)\ldots(\ldots 2)}_{n\ \text{reizes}}\, n!$

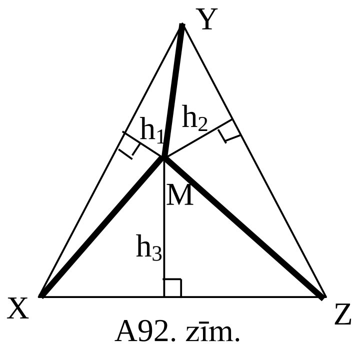
Skaitļi, kas dalās ar 2, naturālo skaitļu virknē parādās ātrāk un sastopami biežāk nekā skaitļi, kas dalās ar 5; skaitļi, kas dalās ar $2\cdot 2 = 4$, parādās ātrāk un sastopami biežāk nekā skaitļi, kas dalās ar $5 \cdot 5 = 25$, utt. Tāpēc vai nu n! = 1 (ja n = 1), vai arī n! dalās ar vairāk divniekiem nekā pieciniekiem. Tāpēc n! pēdējais nenulles cipars nav 5: visi piecinieki, kombinējoties ar divniekiem, rada nulles skaitļa beigās. No šejienes un no vienādības (*) seko teorēmas pareizība.

4. Atbilde: nē, tas nav iespējams.

Risinājums. Pieņemsim no pretējā, ka kastīti aizpildīt izdevies. Ievērojam, ka kastītes tilpums ir $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 \text{cm}^3$ un klucīšu kopējais tilpums ir $126 \cdot 4 = 504$ cm^3. Tātad klucīši neizvirzās ārā no kastītes. Kastītes sienas un dibens pārklāti ar klucīšu skaldnēm. Ievērojam, ka klucīšu skaldņu laukumi ir 2 cm^2 un 4 cm^2. Bet ar šādiem laukumiem, kas izsakās ar pāra skaitļiem, nevar noklāt kastītes sienu (vai dibenu) ar laukumu $7\,\text{cm} \cdot 9\,\text{cm} = 63\text{cm}^2$. Iegūta pretruna.

5. Dosim divus atrisinājumus.

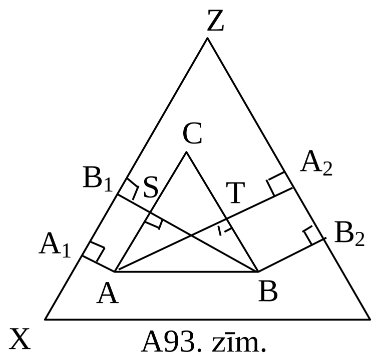
1. Apskatām vienādmalu trijstūri XYZ un punktu M tā iekšpusē. Savienojam M ar trijstūra virsotnēm, bet M attālumus līdz trijstūra malām apzīmējam ar h_1, h_2 un h_3. Trijstūra XYZ malas garumu apzīmējam ar a, bet augstumu – ar h (atceramies, ka vienādmalu trijstūrī visi augstumi ir vienādi).



A92. zīm.

Ievērojam, ka trijstūra XYZ laukums vienāds ar trijstūru XMY, YMZ un ZMX laukumu summu. Lietojot trijstūra laukuma formulu, iegūstam $\frac{a \cdot h_1}{2} + \frac{a \cdot h_2}{2} + \frac{a \cdot h_3}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$, no kurienes seko $h_1 + h_2 + h_3 = h$. Tātad vienādmalu trijstūra patvaļīga iekšēja punkta attālumu summa līdz trijstūra malām ir šī trijstūra augstums.

2. Pieņemsim vispirms, ka A un B atrodas uz nogriežņa, kas paralēls vienai no vienādmalu trijstūra XYZ malām; varam pieņemt, ka tā ir mala XY (skat. A93. zīm.).



A93. zīm.

Tā kā AB || XY, tad A un B attālumi līdz XY ir savā starpā vienādi. Tāpēc mums jāpierāda, ka

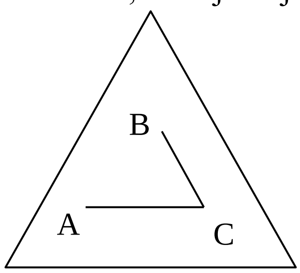
$$AA_1 + AA_2 = BB_1 + BB_2 \quad (1)$$

Konstruējam vienādmalu trijstūri ABC, kā parādīts A93. zīmējumā. Tad AC || XZ un BC || YZ (pierādiet to patstāvīgi). Tāpēc $BB_1 \perp AC$, $AA_2 \perp BC$, $BB_2 = TA_2$ un $AA_1 = SB_1$. Vienādmalu trijstūrī augstumi savā starpā vienādi, tāpēc AT = BS. Izmantojot minētās vienādības, iegūstam

$$AA_1 + AA_2 = AA_1 + AT + TA_2 = SB_1 + BS + BB_2 = (BS + SB_1) + BB_2 = BB_1 + BB_2,$$

kas arī bija jāpierāda.

Tagad tikai atliek aplūkot gadījumu, kad AB nav paralēls nevienai dotā vienādmalu trijstūra malai. Tad atrodam tādu trijstūra iekšēju punktu C, ka AC paralēls vienai trijstūra malai, bet BC – otrai (skat. A94. zīm.) Saskaņā ar iepriekš pierādīto A attālumu summa līdz trijstūra malām vienāda ar C attālumu summu līdz trijstūra malām, bet C attālumu summa līdz trijstūra malām vienāda ar B attālumu summu līdz trijstūra malām. Tātad savā starpā vienādas arī A un B attālumu summas līdz trijstūra malām, ko vajadzēja pierādīt.



A94. zīm.

Iespējami arī daudzi citi risinājumi.

6. Pierādīsim, ka A grupas 6. uzdevuma risinājumā uzrādītā iespēja ir vienīgā.
Apzīmēsim sākotnēji neaizpildītajās rūtiņās ierakstāmos skaitļus, kā parādīts A95. zīm.

3	b	9
a	2	c
d	e	f

A95. zīm.

3	b	9
a	2	c
d	10	3d

A96. zīm.

No vienādības $3 + b + 9 = b + 2 + e$ seko, ka $e = 10$. No vienādības $3 \cdot 2 \cdot f = 9 \cdot 2 \cdot d$ seko, ka f = 3d. Iegūstam A96. zīm. attēloto ainu.

Ja d ir 1; 2 vai 3, tad skaitļi tabulā atkārtojas. Ja d = 4, tad apakšējās rindas skaitļu summa ir 26. Tālāk viennozīmīgi iegūstam A grupas 6. uzdevuma risinājumā iegūto aizpildījumu. Ja d = 5, tad apakšējas rindas skaitļu summa ir 30.

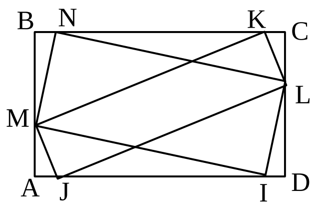
Tāpēc $a = 30 - 3 - 5 = 22 > 20$ – pretruna. Ja $d \geq 6$, tad apakšējās rindas skaitļu summa ir vismaz 34; tad $b \geq 34 - 3 - 9 = 22 > 20$ – pretruna.

Tātad citu iespēju bez A grupas 6. uzdevuma risinājumā uzrādītās nav.

5. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

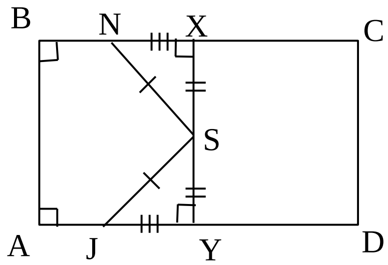
A grupa

1. Sauksim vecīti, kas griezās atpakaļ, par A, bet vecīti, kas turpināja ceļu, par T. Attālumu starp pieturām apzīmēsim ar 3s. Kamēr A sasniedza iepriekšējo pieturu, viņš nogāja attālumu s. Arī T šai laikā nogāja attālumu s. Tātad T līdz nākošajai pieturai vēl palika ko iet attālumu 2s – s = s. šo attālumu T veica tādā pašā laikā, kādā A, braucot ar tramvaju, veica attālumu 3s. Tātad tramvaja ātrums 3 reizes pārsniedz Ziemassvētku vecīša ātrumu.
2. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar n, bet tā ciparu summu ar s. Tad $n = 2002 \cdot s$ (*)
   Skaidrs, ka s – naturāls skaitlis. Jo mazāks vienādībā (*) ir s, jo mazāks ir n. Liekot s = 1; 2; 3; 4; 5, iegūstam attiecīgi n = 2002; 4004; 6006; 8008; 10010. Redzam, ka šajos gadījumos n ciparu summa nav s. Liekot s = 6, $n = 6 \cdot 2002 = 12012$. Šeit n ciparu summa ir s. Tāpēc meklējamais skaitlis ir 12012.
3. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda: ir augstākais 4 dažādu šķirņu āboli, un nevienas šķirnes ābolu nav vairāk kā 4. Tad ābolu kopējais skaits nepārsniedz $4 \cdot 4 = 16$; tā ir pretruna. Tātad mūsu pieņēmums bijis nepareizs.
4. Izvēlēsimies vienu rūķīti A. Ja tas runā patiesību, tad viņa kaimiņš pa labi X saskaņā ar A teikto ir melis; tātad X kaimiņš pa labi Y runā patiesību (jo melis X apgalvo, ka Y esot melis), utt. Iznāk, ka ap galdu pamīšus atrodas meļi un patiesību runājošie rūķīši. Skaidrs, ka šāds rūķīšu izvietojums apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad šajā gadījumā katra veida rūķīšu ir 6.
   Ja A melo, iegūstam tādu pašu atbildi.
5. Ievērosim, ka MN = LI un $\angle BMN = \angle DLI$ kā leņķi ar savstarpēji paralēlām un pretēji vērstām malām. Tāpēc $\Delta MBN = \Delta LDI$ (hl); tātad BM = DL.



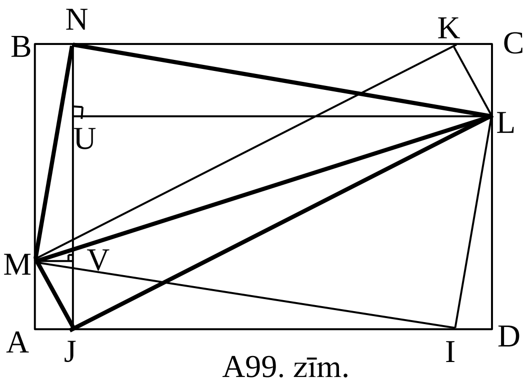
A97. zīm.

Novilksim ML un atzīmēsim tā viduspunktu S. Pieņemsim uz brīdi, ka jau pierādīts: S ir taisnstūra ABCD centrs (diagonāļu krustpunkts). Skaidrs, ka S ir arī abu ievilkto taisnstūru diagonāļu krustpunkts. Tāpēc SN = SM = SJ. Tāpēc (skat. A98. zīm.) $\Delta SXN = \Delta SYJ$ (hk), tātad XN = YJ. No tā seko, ka NJ || XY (jo taisnes NJ divi punkti ir vienādos attālumos no XY un vienā pusē no XY), tātad arī NJ || AB un NJ || CD.



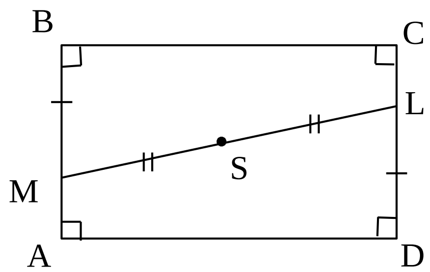
A98. zīm.

Novilksim $LU \perp NJ$ un $MV \perp NJ$ (skat. A99. zīm.).



A99. zīm.

Taisnstūris ABCD sadalīts 4 taisnstūros MBNV, UNCL, JULD un AMVJ. Četrstūris MNLJ satur pusi no katra no šiem taisnstūriem. Tāpēc MNLJ laukums ir puse no ABCD laukuma. No otras puses, MNLJ satur pusi no taisnstūra MNLI (šī puse ir ΔMNL) un pusi no taisnstūra MKLJ (šī puse ir ΔMLJ). Tāpēc MNLJ laukums ir puse no taisnstūru MNLI un MKLJ laukumu summas. No abiem izceltajiem faktiem seko uzdevuma atrisinājums. Atliek pamatot sākumā minēto apgalvojumu par to, ka S ir ABCD centrs (skat. A100. zīm.).



A100. zīm.

Profesionāls matemātiķis to pamatotu dažos vārdos: "simetrijas dēļ S ir ABCD diagonāļu krustpunkts". Izskaidrosim detalizēti šīs frāzes jēgu. Kā zināms, taisnstūrim ABCD ir simetrijas centrs – diagonāļu krustpunkts. Apzīmēsim to ar O. Attēlojot ABCD simetriski pret punktu O, A un C mainās vietām, B un D – tāpat. Tātad nogrieznis AB attēlojas par CD un otrādi. Tā kā M atrodas uz nogriežņa AB, L atrodas uz nogriežņa CD un BM = DL, tad arī M un L šajā simetrijā attēlojas viens par otru. Tātad nogrieznis ML šajā simetrijā "apgriežas otrādi". Tāpēc ML viduspunkts šajā simetrijā paliek uz vietas. Bet vienīgais punkts, kas paliek uz vietas, izdarot simetriju ar centru O, ir pats O. Tātad S sakrīt ar O, ko arī vajadzēja pierādīt.

6. Vispirms vienam ķiveres paraugam metam virsū pēc kārtas 80 kg, 150 kg, 210 kg, 260 kg, 300 kg, 330 kg, 350 kg, 360 kg smagos akmeņus. Ja ķivere iztur visus šos triecienus, vajadzīgais sasniegts: ar astoņām pārbaudēm esam noskaidrojuši, ka ķivere iztur 360kg smaga akmens triecienu.

Pieņemsim, ka ķivere neiztur jau 80 kg smagā akmens triecienu. Tad ķiveres otram eksemplāram pēc kārtas metam virsū 10 kg, 20 kg, ..., 70 kg smagus akmeņus. Pēdējais no šiem akmeņiem, kura triecienu ķivere iztur, ir tas akmens, kuru mēs meklējam. Iztērētas ne vairāk kā 1 + 7 = 8 pārbaudes.

Pieņemsim, ka ķivere izturējusi 80 kg smaga akmens triecienu, bet salūzusi no 150 kg smaga akmens trieciena. Tad mūs interesējošais akmens jāmeklē starp akmeņiem ar masām 90 kg, 100 kg, 110 kg, 120 kg, 130 kg, 140 kg. Skaidrs, ka to var atrast, pārbaudot ķiveres otro eksemplāru augstākais 6 reizes. Kopā tiek iztērētas ne vairāk kā 2 + 6 pārbaudes

Vispārīgā gadījumā spriežam šādi. pieņemsim, ka ķiveres pirmais eksemplārs izturējis n-to triecienu ar akmeni, kura masa ir m, bet nav izturējis (n + 1)-o triecienu ar akmeni, kura masa ir M (n = 1; 2; 3; ...; 7) Masu virkne 80 kg, 150 kg, 210 kg, 260 kg, 300 kg, 330 kg, 350 kg, 360 kg izveidota tā, ka starp masām m kg un M kg atrodas tieši 7-n citas masas. Ar otro ķiveres eksemplāru pēc kārtas pārbaudām, vai tas iztur m + 10 kg; m + 20 kg; ...; m + 10(7 – n) kg smaga akmens triecienu; pēdējais akmens, kura triecienu ķivere iztur, ir meklētais. Kopā tiek patērētas ne vairāk kā n + 1 + (7 – n) = 8 pārbaudes.

B grupa

1. Atbilde: 254 piparkūkas.
Risinājums. Aplūkosim pretēju procesu: rūķīši, sākot ar pēdējo un beidzot ar pirmo, pēc kārtas pienāk pie galda un vispirms noliek uz tā vienu piparkūku, bet pēc tam uz galda esošo piparkūku daudzumu dubulto.
Pirms 7. rūķīša pienākšanas uz galda ir 0 piparkūkas. Pēc viņa darbībām uz galda ir $(0+1)\cdot 2=2$ piparkūkas.
Pēc 6. rūķīša pienākšanas uz galda ir $(2+1)\cdot 2=6$ piparkūkas. Līdzīgi iegūstam virkni $(6+1)\cdot 2=14$, $(14+1)\cdot 2=30$, $(30+1)\cdot 2=62$, $(62+1)\cdot 2=126$, $(126+1)\cdot 2=254$.

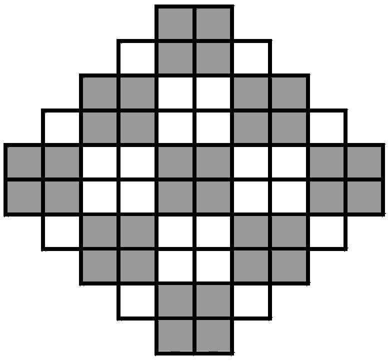
2. Atbilde: vienīgais šāds skaitlis a ir 129.
Risinājums. Tā kā trijos trīsciparu skaitļos kopā ir 9 cipari un nenulles ciparu pavisam arī ir 9, tad skaitļos a, 3a un 5a visi cipari ir dažādi.
Apzīmēsim $a=\overline{xyz}$, $3\cdot a=b=\overline{uvt}$, $5\cdot a=c=\overline{mkl}$. Tā kā c - trīsciparu skaitlis, tad x < 2; tāpēc x = 1. Tā kā $l\neq 0$, tad z - nepāra cipars; tāpēc l = 5 un t – nepāra cipars. Tā kā 1 un 5 jau izmantoti, tad **z ir 3, 7 vai 9**. Ja būtu z = 7, tad t = 1 – pretruna, jo ir iznācis x = t. Tātad $\mathbf{z\neq 7}$.
Pieņemsim, ka z = 3. Ja y būtu pāra cipars, tad k = 1 (šis vieninieks rodas no pārnesuma):

$$\begin{array}{r} x\,y\,3 \\ \times\qquad 5 \\ \hline \ldots 1\,5 \end{array}$$

un tā ir pretruna, jo ir iznācis x = k. Tātad $\mathbf{z\neq 3}$.
No trim izceltajiem apgalvojumiem seko, ka z = 9.
Esam ieguvuši $a=\overline{xyz}=\overline{1y9}$, kur y nav ne 1, ne 9, ne 5 (jo l = 5). Pārbaudām visas iespējamās y vērtības:

y	**a**	**3·a**	**5·a**	**Secinājums**
2	129	387	645	der
3	139	417		neder
4	149	447		neder
6	169	507		neder
7	179	537		neder
8	189	567	945	neder

3. Atbilde: nē, nevar.
Risinājums. Iekrāsosim rūtiņas, kā parādīts A101. zīm. Pavisam ir 36 melnas un 24 baltas rūtiņas.



A101. zīm.

Ja uzdevumā minēto sagriešanu varētu izdarīt, tad rastos 60:4 = 15 mazās figūras. Viegli pārbaudīt, ka katra no tām saturētu vai nu 1, vai 3 melnās rūtiņas. Tātad katra figūriņa saturētu nepāra skaitu melno rūtiņu; tāpēc 15 šādas figūriņas kopā saturētu nepāra skaitu melno rūtiņu. Bet 36 ir pāra skaitlis. Iegūta pretruna, tātad prasītā sagriešana nav iespējama.

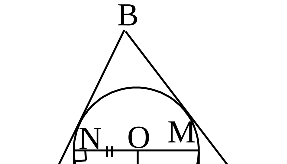
4. Sprīdītis nosūta vienu rūķīti A izlūkos pa vienu ceļu, divus citus rūķīšus B un C izlūkos pa otru ceļu, bet pats dodas izlūkos pa trešo ceļu. Visiem pieteikts pēc divām dienām atgriezties ceļu sazarojuma vietā.

Ja Sprīdītis konstatē, ka Laimīgā Zeme sasniedzama pa viņa izvēlēto ceļu, tad viņš rūķīšus nemaz neaptaujā, bet kopā ar visiem dodas uz mērķi. Aplūkosim gadījumu, kad Sprīdītis savā izlūkgājienā Laimīgo Zemi nav sasniedzis. Tad viņš jautā visiem rūķīšiem, vai viņi ir sasnieguši Laimīgo Zemi. Šķirojam divas iespējas.

a) B un C atbildes ir dažādas. Tātad viens no viņiem ir neuzticams. Tātad A noteikti runā patiesību. Balstoties uz A teikto un sava izlūkgājiena rezultātiem, Sprīdītis izvēlas pareizo ceļu;

b) B un C atbildes ir vienādas. Tad tās abas nevar būt nepareizas; tātad tās ir pareizas. (Ievērojiet: mēs neapgalvojām, ka B un C abi vienmēr runā patiesību!). Balstoties uz B un C teikto un sava izlūkgājiena rezultātiem, Sprīdītis izvēlas pareizo ceļu.

5. Pierādīsim, ka visi šie punkti atrodas vienādos attālumos no trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centra O.



A102. zīm.

Pieņemsim, ka riņķa līnija ar centru O un rādiusu r pieskaras malai AC punktā P (skat. A102. zīm.). Novelkam riņķa līnijas diametru MN, kas paralēls malai AC. Tā galapunktu M un N projekcijas uz AC apzīmējam attiecīgi ar M_1 un N_1. Četrstūrī OPN_1N ir trīs taisni leņķi ($\angle N$, $\angle N_1$ un $\angle P$), tātad visi tā leņķi ir taisni un tas ir taisnstūris; tā kā OP = ON, tad tas ir kvadrāts.

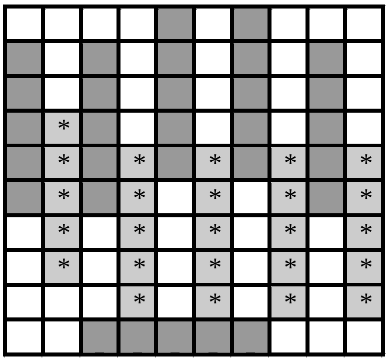
Pierādīsim, ka neviena riņķa līnijas punkta Q projekcija Q_1 neatrodas pa kreisi no punkta N_1.

Tiešām, ja tā būtu, tad $PQ_1 > PN_1 = ON = r = OQ$; tātad $PQ_1 > OQ$ un nogriežņa OQ projekcija būtu garāka par pašu nogriezni – pretruna. Līdzīgi pierāda, ka neviena riņķa līnijas punkta projekcija neatrodas pa labi no punkta M_1. Tātad riņķa līnijas projekcija uz malas AC ir nogrieznis N_1M_1.

Mēs jau redzējām, ka ON_1 ir tāda kvadrāta diagonāle, kura malas garums ir r. Tas pats attiecas uz OM_1 un uz nogriežņiem, kas savieno O ar analogiem punktiem uz AB un BC. Tātad visu šo 6 punktu attālumi no O ir vienādi. Tātad tie pieder riņķa līnijai ar centru O.

6. Atbilde: nē, ne noteikti.

Atrisinājums: skat. A103. zīm.



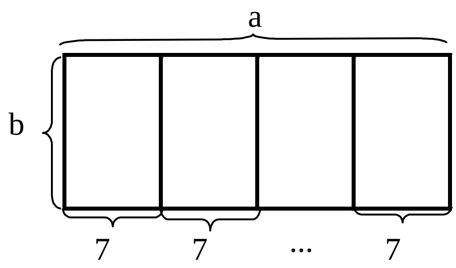
A103. zīm.

Komentārs. Var pierādīt: ja minētajā kvadrātā ir ievietotas 10 taisnstūrveida plāksnītes, kas katra pārklāj 5 rūtiņas, tad kvadrātā noteikti atradīsies vieta vēl vienai šādai plāksnītei.

6. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Katra zīmējumā attēlotā figūra sastāv no 7 rūtiņām. Tātad taisnstūra rūtiņu skaits dalās ar 7. Ja taisnstūra malu garumi ir a un b (par mērvienību ņemot rūtiņas malu), tad tas satur $a \cdot b$ rūtiņas. Tātad **$\mathbf{a \cdot b}$ dalās ar 7**. Tā kā 7 ir pirmskaitlis, tad no izceltā apgalvojuma seko: vai nu a, vai b dalās ar 7. Pieņemsim, ka a dalās ar 7. Tad malu ar garumu a sadala 7 vienības garos nogriežņos un caur dalījuma punktiem izdara griezumus, sadalot taisnstūri strēmelēs ar platumu 7 (skat. A104. zīm.), bet pēc tam katru strēmeli sagriež b taisnstūros ar izmēriem 1×7.

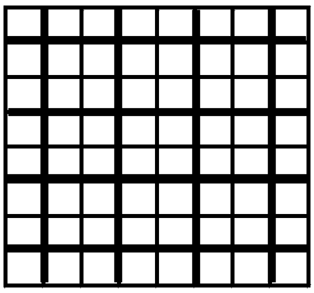


A104. zīm.

Gadījumu, kad b dalās ar 7, apskata līdzīgi.

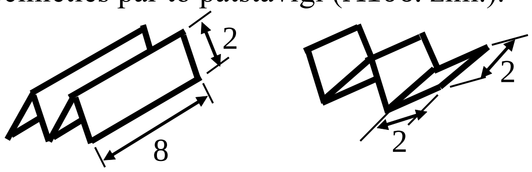
2. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka visos grozos kopā saldo ābolu ir vairāk nekā skābo. Ja gan dzelteno saldo ābolu būtu mazāk nekā dzelteno skābo, gan arī sarkano saldo ābolu būtu mazāk nekā sarkano skābo, tad saldo ābolu kopā būtu mazāk nekā skābo. Tā ir pretruna ar iepriekš secināto. Tātad vai nu dzelteno saldo ābolu ir vairāk nekā dzelteno skābo, vai arī sarkano saldo ābolu ir vairāk nekā sarkano skābo.

3. Pieņemsim, ka rūtiņas malas garums ir 1. Katra griezienа rezultātā papīra lapa sadalās gabalos pa (varbūt vairākām) paralēlām līnijām. Starp katrām divām šādām dalījuma līnijām ir vismaz viena locījuma līnija. Tātad attālums starp katrām divām paralēlām dalījuma līnijām ir vismaz 2. Tāpēc viena grieziena rezultātā nevar rasties vairāk par 4 dalījuma līnijām (jo 5 paralēlu dalījuma līniju gadījumā attālums starp divām malējām no tām būtu vismaz $4 \cdot 2 = 8$, kas acīmredzami nav iespējams). Ja abu griezienu rezultātā rodas paralēlas dalījuma līnijas, tad to kopskaits nav lielāks par 7 (jo paralēlu rūtiņu līniju kvadrātā vispār ir tikai 7). Tāpēc šādā gadījumā rodas ne vairāk par 8 gabaliem. Ja viena grieziena rezultātā rodas ≤ 4 vienā virzienā ejošas dalījuma līnijas, bet otra grieziena rezultātā – arī ≤ 4 perpendikulārā virzienā ejošas dalījuma līnijas, tad kvadrāts sadalās $\leq 5 \cdot \leq 5$, tātad ≤ 25 gabalos (skat. A105. zīm.)



A105. zīm.

Divdesmit piecus gabalus tiešām var iegūt, vispirms salokot lielo kvadrātu līdz 2×2 rūtiņu kvadrātam un tad sagriežot to ar diviem perpendikulāriem griezieniem. Pārliecinieties par to patstāvīgi (A106. zīm.).



A106. zīm.

4. Pieņemsim, ka kāda skaitļa x cipari no kreisās uz labo pusi ir c_1, c_2, ... , c_n; pierakstīsim to kā $x = \overline{c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n-1} c_n}$.

Atceroties, ka pēdējais cipars skaitļa pierakstā norāda vienus, priekšpēdējais - desmitus utt., iegūstam, ka

$$x = c_n + 10 \cdot c_{n-1} + 100 \cdot c_{n-2} + \ldots + 1\underbrace{0\ldots0}_{n-2 \text{ nulles}} \cdot c_2 + \; + 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1 \text{ nulle}} \cdot c_1 .$$

Pierakstīsim to formā $x = (c_n + c_{n-1} + c_{n-2} + \ldots + c_2 + c_1) + 9c_{n-2} + \ldots + + \underbrace{99\ldots9}_{n-2} c_2 + \underbrace{99\ldots9}_{n-1} c_1$

Tā kā visi skaitļi $9, 99, \ldots, \underbrace{99\ldots9}_{n-1}$ dalās ar 9, tad no šejienes seko: skaitlis x un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus, dalot ar 9. Faktu, ka divi skaitļi x un y dod vienādus atlikumus dalot ar 9, pierakstīsim kā $x \equiv_9 y$. Ja patvaļīga naturāla skaitļa x ciparu summu apzīmēsim ar S(x), tad iegūto rezultātu varam formulēt lemmas veidā.

1. lemma: $x \equiv_9 S(x)$.

Mums būs svarīgs arī otrs palīgrezultāts.

2. lemma: $S(a + b) \equiv_9 S(a) + S(b)$.

Tiešām, iztēlosimies, kā notiek divu naturālu skaitļu saskaitīšana stabiņā. Ja pēdējā šķirā pārnesums nerodas, tad summā kārtējais cipars vienāds ar abu saskaitāmo pēdējo ciparu summu. Ja turpretī tur rodas pārnesums, tad abu pēdējo ciparu a un b summa ir bijis divciparu skaitlis $\overline{1d}$ jeb 10 + d. Kā ciparu mēs pierakstām d, bet 1 veido pārnesumu uz nākošo šķiru. Tātad lieluma a + b vietā rezultāta ciparu summā iekļaujas 1 + d. Bet 1 + d = (10 + d) – 9 = (a + b) – 9. Tātad šai šķirā rodas starpība 9 starp S(x) + S(y) un S(x + y). Šāda starpība 9 var rasties arī dažās nākošajās šķirās. Tātad S(x + y) atšķiras no S(x) + S(y) par skaitļa 9 daudzkārtni. No šejienes seko 2. lemmas pareizība.

Tagad pielietosim abas lemmas uzdevumā minētajiem n, a un b:

$$a + b \overset{(1)}{\equiv_9} S(a + b) \overset{(2)}{\equiv_9} S(a) + S(b) \overset{(3)}{=} S(n) \overset{(4)}{\equiv_9} n$$

(1) seko no 1. lemmas, (2) – no 2. lemmas, (3) – no uzdevuma nosacījumiem, (4) – no 1. lemmas.

Tātad a + b dod tādu pašu atlikumu kā n, dalot ar 9. Tā kā a + b dalās ar 9 (t.i., dod atlikumu 0, dalot ar 9), tad arī n dalās ar 9.

5. Palūgsim katram politiķim uzrakstīt uz atsevišķām kartītēm to kolēģu vārdus, kurus viņš apņēmies apvainot. Pavisam iegūsim 40 kartītes. Vismaz viena politiķa vārds uzrakstīts ≤ 4 reizes. Tiešām, ja katrs vārds būtu uzrakstīts vismaz piecas reizes, tad kartīšu būtu vismaz 50 – pretruna.

Pieņemsim, ka A vārds uzrakstīts uz augstākais 4 kartītēm. Tad A norīkosim uzstāties kā pēdējo. Saskaņā ar A izvēli viņš dzirdēs ≤ 4 apvainojumus. Savukārt viņa izteiktos apvainojumus nedzirdēs neviens.
Apskatīsim tagad atlikušos 9 politiķus un līdzīgā veidā atradīsim no tiem tādu politiķi B, kuru apņēmušies apvainot ne vairāk kā 4 politiķi no šiem 9. Norīkosim B uzstāties kā priekšpēdējo.
Līdzīgi turpinot, iegūstam vajadzīgo.

6. Atbilde: a) nē, b) nē.
Atrisinājums. **a)** starp 5 naturālajiem skaitļiem nevar būt 1, jo $\frac{1}{1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}>1$. Tāpēc mazākie skaitļi, kurus var izmantot vieninieka izteikšanā, ir 3; 5; 7; 9. Bet $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{315+189+135+105}{945}=\frac{744}{945}<1.$
Ņemot lielākus naturālos skaitļus, to apgriezto lielumu summa būs vēl mazāka, tātad noteikti nebūs 1.
b) Pieņemsim, ka izdevies atrast tādus 2002 nepāra naturālus skaitļus n_1, n_2,..., n_{2002} (pat vienalga – dažādus vai vienādus), ka $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+...+\frac{1}{n_{2001}}+\frac{1}{n_{2002}}=1.$
Pārveidosim kreiso pusi, novedot to pie kopsaucēja $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{2001} \cdot n_{2002}$. Tad skaitītājā būs 2002 nepāra naturālu skaitļu summa (katrs šis skaitlis būs iegūts, sareizinot 2001 no skaitļiem n_1, n_2,..., n_{2002}), tātad – pāra skaitlis. Saucējā būs reizinājums $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{2001} \cdot n_{2002}$ – nepāra skaitlis. Tā kā pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli, tad daļas vērtība nevar būt 1.

B grupa

1. Ievērosim, ka
$1+2+3+\ldots+62=(1+62)+(2+61)+\ldots+(30+33)+(31+32)=$
$=31\cdot 63=1953<2002$. Tātad vislielākā izteiksmes vērtība, kuru var iegūt uzdevumā minētajā veidā , ja izmanto skaitļus no 1 līdz 62, ir mazāka par 2002. Tāpēc jābūt n > 62.
Savukārt $1+2+3+\ldots+62+63=(1+\ldots+62)+63=1953+63=2016$. Skaitlis 2016 pārsniedz 2002 par $2016-2002=14=2\cdot 7$.
Aizstājot summā 1 + 2 + ... + 62 + 63 saskaitāmo "+7" ar "-7", mēs summas vērtību samazināsim par 14. Tāpēc skaidrs, ka, ja mēs skaitlim 7 priekšā pievienosim "-" zīmi, bet citiem skaitļiem no 1 līdz 63 ieskaitot "+" zīmi, tad iegūtās izteiksmes vērtība būs $(1+\ldots+63)-2\cdot 7=2016-14=2002$.
Tātad mazākā iespējamā n vērtība ir 63.

2. Atbilde: m = 1717.
Risinājums. Palielināt četrciparu skaitlī katru ciparu par 1 vai 5 nozīmē pieskaitīt tam tādu četrciparu skaitli x, kam katrs cipars ir 1 vai 5. Tā kā šīs pieskaitīšanas rezultātā m kļuva par 4m, tad x = 3m. Redzam, ka x dalās ar 3; tātad arī x ciparu summa dalās ar 3. Pārbaudīsim visas iespējas:
ja x satur 4 vieniniekus, tad x ciparu summa 4 nedalās ar 3;
ja x satur 3 vieniniekus un 1 pieciniek u , tad x ciparu summa 8 nedalās ar 3;
ja x satur 2 vieniniekus un 2 pieciniekus, tad x ciparu summa 12 dalās ar 3;
ja x satur 1 vieninieku un 3 pieciniekus, tad x ciparu summa 16 nedalās ar 3;
ja x satur 4 pieciniekus, tad x ciparu summa 20 nedalās ar 3.

Tātad x noteikti satur 2 vieniniekus un 2 pieciniekus. Tāpēc tālāk jāpēta 6 iespējas:

x	$m = \frac{x}{3}$	4m
1155	385	1540
1515	505	2020
1551	517	2068
5115	1705	6820
5151	1717	6868
5511	1837	7348

Redzam, ka uzdevuma nosacījumus apmierina vienīgi skaitlis 1717.

3. Mēs varam ignorēt skaitļus, kas savā pierakstā satur gan ciparu grupu 13, gan ciparu grupu 31, jo tos savā summā ietver gan Jānis, gan Andris. Tāpēc varam pieņemt, ka Jānis saskaita skaitļus, kas satur ciparu grupu 13 un nesatur ciparu grupu 31, bet Andris saskaita skaitļus, kas satur ciparu grupu 31 un nesatur ciparu grupu 13.

Izdarīsim ar Jāņa saskaitāmajiem šādu operāciju: katrā Jāņa saskaitāmajā katru ciparu grupu 13 aizstāsim ar ciparu grupu 31.

Skaidrs, ka:

1) mēs iegūsim tikai skaitļus, kas ir Andra saskaitāmie;

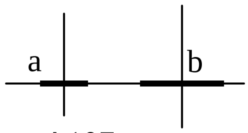
2) mēs iegūsim katru Andra saskaitāmo tieši vienu reizi.

Tātad šādas aizstāšanas rezultātā Jāņa summa pārveidosies par Andra summu. Tā kā katrs saskaitāmais aizstāšanas rezultātā palielinās, tad Andra summa ir lielāka par Jāņa summu.

4. <u>Atbilde:</u> nē, tā gadīties nevar.

<u>Risinājums.</u> Horizontāls nogrieznis nevar krustot citu horizontālu vai vertikāls - citu vertikālu. Pieņemsim no pretējā, ka uzdevumā minētais ir iespējams. Tad katrs horizontālais nogrieznis krusto 7 vertikālos un katrs vertikālais – 7 horizontālos. Tātad katram horizontālam nogrieznim nav kopīgu punktu ar tieši vienu vertikālu un katram vertikālam nogrieznim nav kopīgu punktu tieši ar vienu horizontālu.

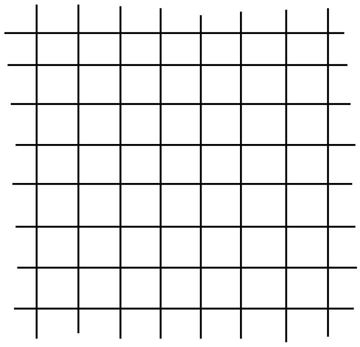
Pieņemsim, ka divi horizontāli nogriežņi a un b atrodas uz vienas taisnes. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem tie nesaskaras un nepārklājas. Tad neviens vertikāls nogrieznis, kas krusto a, nevar krustot b un otrādi (skat A107. zīm.)



A107. zīm.

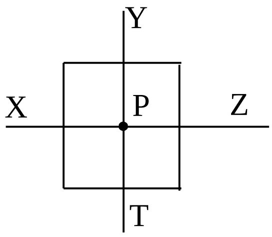
Bet tā ir pretruna, jo saskaņā ar augstāk izspriesto ir 6 vertikālie nogriežņi, kam jākrusto gan a, gan b. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un a un b neatrodas uz vienas taisnes. Līdzīgi pierāda, ka nekādi divi vertikāli nogriežņi neatrodas uz vienas taisnes.

Uzzīmēsim 8 vertikālās un 8 horizontālās taisnes, uz kurām atrodas mūsu nogriežņi (skat. A108. zīm.). Tās krustojas 64 punktos.



A108. zīm.

Uz katras taisnes atrodas 8 no šiem punktiem. Saskaņā ar iepriekš pierādīto tieši viens no tiem nav divu nogriežņu krustpunkts. Sauksim tādu punktu par īpašu punktu. Skaidrs, ka eksistē īpašs punkts, kas neatrodas ne uz vienas no 4 malējām taisnēm (jo uz katras no tām ir tikai viens īpašs punkts). Aplūkosim vienu šādu īpašu punktu P (skat A109. zīm.)



A109. zīm.

Gan uz taisnes XZ, gan uz taisnes YT atrodas pa vienam nogrieznim. Vismaz viens no tiem neiet caur punktu P; varam pieņemt, ka tas ir nogrieznis a, kas atrodas uz taisnes XZ pa kreisi no punkta P. Tad tās vertikālās taisnes, kas iet caur P vai pa labi no P (tādu ir vismaz 2), nogriezni a nekrusto; tātad nogriezni a nekrusto arī tie (vismaz 2) vertikālie nogriežņi, kas atrodas uz šīm taisnēm. Tā ir pretruna ar faktu, ka a nekrusto tikai viens vertikālais nogrieznis. Citus nogriežņa a novietojumus analizē līdzīgi.

Līdz ar to mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs, un uzdevums ir atrisināts.

5. <u>Atbilde:</u> nē, tas nav iespējams.

<u>Risinājums.</u> Pieņemsim pretējo: rīkojoties aprakstītajā veidā, izdevies nokrāsot visu kvadrātu melnu. Apskatīsim šajā procesā to brīdi, kad pirmo reizi pilnībā ir melnas vai nu 10 rindiņas, vai 10 kolonnas; varam pieņemt, ka šajā brīdī ir melnas 10 rindiņas un x kolonnas, bet pavisam izdarīti n gājieni ($n \le 10 + x$, jo dažas kolonnas un rindiņas varēja būt melnas jau pašā sākumā vai arī kļūt melnas reizē). Sākot no šī brīža, procesu var pabeigt, nokrāsojot melnas atlikušās 19-x kolonnas, jo katrā no tām vairums (vismaz 10) rūtiņu jau ir melnas. Tātad kvadrātu varētu nokrāsot melnu, izdarot $n + (19 - x) \le 10 + x + 19 - x = 29$ gājienus. Katrā gājienā nokrāso melnas ≤ 9 rūtiņas; tātad pavisam procesa gaitā melnas tiktu nokrāsotas $\le 29 \cdot 9 = 261$ rūtiņas. Bet sākotnēji balto rūtiņu ir $19 \cdot 19 - 99 = 361 - 99 = 262$. Tātad vismaz viena rūtiņa nav melna. Iegūta pretruna. tātad mūsu sākotnējais pieņēmums nav pareizs, un visu kvadrātu melnu nokrāsot nevar.

6. <u>Atbilde:</u> a) nevar, b) var.

<u>Risinājums.</u> a) pierādījums ir tāds pats kā A grupas 6. uzdevuma b) daļā.

b) viegli pārbaudīt, ka $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693}=1$

(atbilde atrasta ar datora palīdzību).