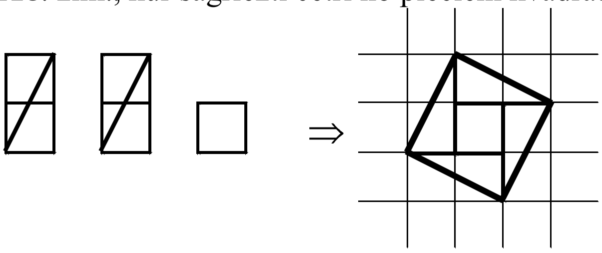
"Profesora Cipariņa klubs" 2002./03. m.g.

1. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Nobraucot 1 km, riepa uz priekšējā riteņa nolietojas par $\frac{1}{20000}$, bet uz aizmugurējā - par $\frac{1}{30000}$. Tātad pēc 1 km ir “iztērētas” $\frac{1}{20000}+\frac{1}{30000}=\frac{1}{12000}$ riepas. Tā kā pavisam ir divas riepas, tad var nobraukt ne vairāk par $2:\frac{1}{12000}=24000$ km.
Viegli pārbaudīt, ka 24000 km var nobraukt, ja, piemēram, riepas nomaina no viena riteņa uz otru ik pēc 100 km.

2. Jā, var. Skat. A118. zīm., kur sagriezti četri no pieciem kvadrātiem.



A118. zīm.

Precīzā pierādījumā jāpamato, ka iegūtā figūra ir kvadrāts, t.i., ka tās malas un leņķi vienādi savā starpā. Tas viegli seko no griežot iegūto taisnleņķa trijstūru vienādības.

3. Nē, nevar.

			C			
	A				**B**	
			D			

A119. zīm.

Tā kā kustība sākas vidējā rūtiņā un beidzas stūrī, tad rūtiņās A un B zirdziņš gan ieiet, gan no tām iziet. Vienīgās rūtiņas, ar kurām A un B ir saistītas ar zirdziņa gājieniem, ir C un D. Pieņemsim, ka zirdziņš apstaigā taisnstūri, kā prasīts uzdevumā. Rūtiņā A zirdziņš var nonākt vienīgi “ķēdītē” ...CAD... vai ...DAC...; līdzīgi rūtiņā B zirdziņš var nonākt vienīgi “ķēdītē ...CBD... vai ...DBC... . Tātad zirdziņa maršrutā ir sastopamas pēc kārtas apmeklētu rūtiņu virkne CADB, CBDA, DACB vai DBCA. Nevienā no šiem gadījumiem zirdziņš vairs nevar kustēties tālāk, lai beigās nonāktu stūrī.

4. Tā kā $99\cdot 28=2772>2676$, tad Jānītis nevarēja nopirkt vairāk par 27 rotaļlietām (rotaļlietas mazākā iespējamā cena ir 99 santīmi). Rotaļlietu skaits vienāds ar iztrūkstošo santīmu skaitu līdz pilniem latiem. Tātad šis skaits varētu būt 24, 124, 224, ...; ņemot vērā iepriekš atzīmēto, tas nevar būt citāds kā 24.
Tagad parādīsim, ka atbilde 24 ir iespējama.

Nopērkot 22 rotaļlietas par 99 santīmiem katru un 2 rotaļlietas par 2 latiem 99 santīmiem katru, Jānītis tiešām patērē Ls 27,76. Tātad uzdevuma atbilde ir "24 rotaļlietas".

5. Nē, nevar. Tā kā $3 \cdot 7 = 21 > 20$, tad visiem rūķīšiem neiznāk pa 3 kūkām; tātad kāds no rūķīšiem saņems ne vairāk kā 2 kūkas. Bet pat 2 smagāko kūku kopējais svars ir tikai 79 g.

6. Nē, tā nevar būt. Apskatīsim vispirms īso gadu (februārī 28 dienas). Viegli pārbaudīt, ka vienā un tai pašā nedēļas dienā ir 13. janvāris, 10. februāris (starp tiem ir tieši 4 nedēļas), 10. marts, 14. aprīlis, 12. maijs, 9. jūnijs, 14. jūlijs, 11. augusts, 8. septembris, 13. oktobris, 10. novembris, 15. decembris. No šejienes seko:

13. janvāris	Kurā mēnesī 13. datums ir piektdienā
pirmdiena	jūnijā
otrdiena	februārī
trešdiena	augustā
ceturtdiena	maijā
piektdiena	janvārī
sestdiena	aprīlī
svētdiena	decembrī

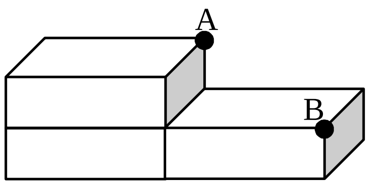
(katrai 13. janvāra nedēļas dienai norādīta tikai viena iespēja)
Garos gadus analīzē līdzīgi.

B grupa

1. Risinot līdzīgi kā A1 uzdevumu, redzam, ka nobrauktais attālums nevar pārsniegt $3 : \frac{1}{12000} = 36000$ km. Šo attālumu var nobraukt, ja, piemēram, riepas apzīmē ar A, B, C un tās maina cikliski ik pēc 100 km pēc sekojošas shēmas:

Priekšējā	Aizmugurējā
A	B
B	C
C	A
A	B
B	C
C	A
...	...

2. Skat. A120. zīm.; meklējamais attālums ir AB (tas ir iedomājamā ceturtā ķieģeļa diagonāles garums).



A120. zīm.

3. Nē, nevar. Katram rūķītim, kam ir 4 kaimiņi ar kopēju malu taisnstūrī A, jābūt arī 4 šādiem kaimiņiem arī taisnstūrī B. Bet taisnstūrī A ir 32 rūtiņas ar 4 kaimiņiem, kamēr taisnstūrī B šādu rūtiņu ir tikai 30.

4. Apzīmēsim mūsu skaitli ar S. Skaidrs, ka S var saturēt tikai ciparus 2; 3; 5; 7. Pie tam 2 un 5 var būt tikai S pirmais cipars, un S nesatur blakus esošus divus vienādus ciparus (lai to veidotais skaitlis nedalītos ar 11). Secinām:
ja S – trīsciparu skaitlis, tad tā pēdējais cipars ir 3 vai 7, priekšpēdējais attiecīgi 7 vai 3. No 6 iespējamiem skaitļiem 237, 273, 537, 573, 373, 737 der tikai 373, jo 737 dalās ar 11, bet četri pārējie skaitļi ar 3; skaitlis 373 turpretī apmierina visas uzdevuma prasības.
Ja S saturētu vismaz 4 ciparus, tad pēc iepriekšējā katri trīs pēc kārtas ņemti tā cipari veidotu skaitli 373; skaidrs, ka tas nav iespējams.
Tātad meklējamais skaitlis ir 373.

5. Atbilde: 9 punkti.
Vispirms pierādīsim, ka “Murmulīši” nevarēja iegūt vairāk par 9 punktiem.
Apzīmēsim viņu iegūtos punktus ar x. Tad 7 citas komandas katra ieguva vismaz x + 1 punktus. Tāpēc visu komandu iegūto punktu skaits ir vismaz x + 7(x + 1). Tā kā katrā spēlē abas komandas kopā iegūst augstākais 3 punktus un turnīrā izspēlēja 28 spēles, tad šis kopskaits nepārsniedz $3 \cdot 28 = 84$. Tāpēc

$$x + 7(x+1) \le 84$$

$$8x \le 77$$

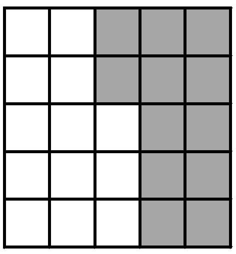
Tā kā x – vesels skaitlis, tad $x \le 9$, jo $8 \cdot 10 = 80 > 77$.
Tagad parādīsim, ka “Murmulīši” tiešām varēja iegūt 9 punktus.
Iedomāsimies vispirms, ka katra komanda izcīnījusi 3 uzvaras, cietusi 3 zaudējumus un vienreiz spēlējusi neizšķirti; tad katrai komandai ir 10 punkti. Šāda turnīra piemēru skat. A121. zīm.

	A	B	C	D	E	F	G	M
A		1	3	3	3	0	0	0
B	1		0	0	0	3	3	3
C	0	3		1	3	3	0	0
D	0	3	1		3	3	0	0
E	0	3	0	0		1	3	3
F	3	0	0	0	1		3	3
G	3	0	3	3	0	0		1
M	3	0	3	3	0	0	1	

A121. zīm.

Izmainīsim vienas spēles rezultātu: M (“Murmulīši”) nevis spēlē neizšķirti ar G, bet zaudē pret G. Tad “Murmulīšiem” ir 9 punkti, G – 12 punkti, bet citām komandām – pa 10 punktiem.

6. Jā, var. Skat., piem. A122. zīm.

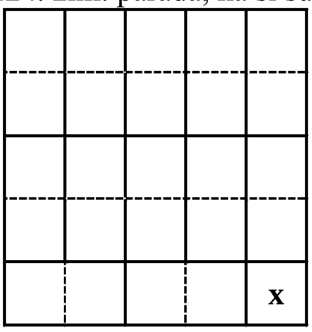


A122. zīm.

2. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. **a)** jā, var. Piemēram, var pēc kārtas izrakstīt skaitļus +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, -1
   b) nē, nevar. Jāsaskaita 7 saskaitāmie, katrs no kuriem ir "+1" vai "–1". To summa ir nepāra skaitlis, tātad nevar būt 0.
2. Jā, var. Piemēram, rīkosimies šādi. Sadalīsim kvadrātu 10000×10000 mazos kvadrātiņos; tad kvadrātiņu skaits ir 100000000. Katra kvadrātiņa malas garums ir $1\text{cm}:10000 = 0{,}0001\text{cm}$. Katrā kvadrātiņā ievilksim riņķi; tā rādiuss ir $\frac{1}{2}\cdot 0{,}0001\,\text{cm}$. Visu rādiusu summa tātad ir $\frac{1}{2}\cdot 0{,}0001\,\text{cm}\cdot 100000000 = 5000\,\text{cm} > 2002\,\text{cm}$. Tagad samazināsim visu riņķu rādiusus tiktāl, kamēr to summa kļūst tieši 2002cm.
3. Nē, nevar. No trim pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 3. Tāpēc to reizinājums dalās ar 3. Triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$ arī dalās ar 3. Bet 200...02 ar 3 nedalās.
4. Ievērosim, ka atverot iekavas izteiksmē (1 + a)(1 + b)(1 + c) (izdariet to patstāvīgi), iegūst summu 1+(a + b + c) + (ab + ac + bc) + abc, kas satur:
   1) vieninieku,
   2) visus skaitļus a, b, c,
   3) visus iespējamos skaitļu a, b, c reizinājumus pa divi,
   4) visu triju skaitļu a, b, c reizinājumu.
   Līdzīgi iegūstam (apzīmējot mūsu meklējamo summu ar X), ka
   $(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)(1+5)(1+6)(1+7)(1+8) = 1 + X + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8.$
   Tāpēc
   $X = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 - 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 - 1 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8(9-1) - 1 =$
   $= 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 8 - 1 = 322559.$
5. Katrā no A123. zīm. attēlotajiem 12 "domino kauliņiem" ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 10. Tā kā arī $x \geq 0$, tad visa summa nav mazāka par $12\cdot 10 = 120$. Piemērs A124. zīm. parāda, ka šī summa var būt 120.

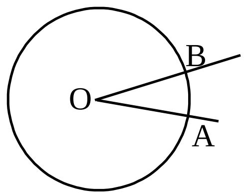


A123. zīm.

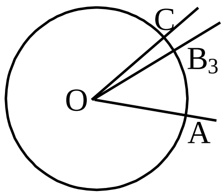
0	**10**	**0**	**10**	**0**
10	**0**	**10**	**0**	**10**
0	**10**	**0**	**10**	**0**
10	**0**	**10**	**0**	**10**
0	**10**	**0**	**10**	**0**

A124. zīm.

6. Vispirms novelkam riņķa līniju ar centru leņķa virsotnē (skat. A125. zīm.). Tad loka AB leņķiskais lielums ir 11°.



A125. zīm.



A126. zīm.

Atliekam uz riņķa līnijas punktus B_1, B_2, B_3 tā, ka $AB = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$. Tā kā vienādām hordām atbilst vienādi loki, tad loku BB_1, B_1B_2, B_2B_3 leņķiskie lielumi ir 11°; tāpēc loka AB_3 leņķiskais lielums ir $4 \cdot 11^o = 44^o$ un $\angle B_3OA = 44^o$. Novelkam staru OC, tā ka $\angle COA = 45^o$. Tad $\angle COB_3 = 45^o - 44^o = 1^o$ (skat. A126. zīm.). Tāpēc arī loka CB_3 leņķiskais lielums ir 1°. Atliekam uz loka AB punktus E_1, E_2, ..., E_{10} tā ka $AE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 = ... = E_9E_{10} = CB_3$. Tā kā vienādām hordām atbilst vienādi loki, tad loku AE_1, E_1E_2, ..., E_9E_{10} leņķiskie lielumi ir 1°; tad arī $E_{10}B$ leņķiskais lielums ir 1°. Tāpēc stari OE_1, OE_2, OE_3, ..., OE_{10} sadala leņķi AOB 11 vienādās daļās.

Iespējami arī daudzi citi risinājumi.

B grupa

1. Pirmkārt, n jābūt pāra skaitlim, lai apskatāmā summa būtu pāra skaitlis (skat. A grupas 1. uzdevuma risinājumu). Apzīmējam $n = 2k$. Tātad starp blakusesošo skaitļu reizinājumiem jābūt k skaitļiem "+1" un k skaitļiem "-1". Ja pierādīsim, ka k ir pāra skaitlis, tad uzdevums būs atrisināts.

Sareizināsim visus divu blakus esošo skaitļu reizinājumus un rezultātu apzīmēsim ar R. Reizinājums R satur katru pa apli uzrakstīto skaitli divas reizes, jo šis skaitlis ietilpst divos pāros. Tātad $R > 0$. No otras puses, R ir k pozitīvu un k negatīvu skaitļu reizinājums. Tāpēc, lai $R > 0$, k jābūt pāra skaitlim. Uzdevums atrisināts.

2. Katru naturālu skaitli, izņemot 1, var sadalīt pirmreizinātājos (t.i., vienā vai vairākos reizinātājos, katrs no kuriem ir pirmskaitlis), pie tam ja kāds reizinātājs atkārtojas vairākas reizes, to raksta kā pakāpi. Piemēram, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, $7 = 7^1$ utml. No skaitļa sadalījuma pirmreizinātājos ir atkarīgs arī skaitļa dalītāju skaits.

Piemēram, ja skaitlis $c = p^k$, tad visi tā dalītāji arī ir skaitļa p pakāpes, ne lielākas par k-to pakāpi, un skaitlis 1, tātad pavisam skaitlim c ir $k + 1$ dalītājs.

Ja skaitlis $b = p^n \cdot q^m$ (p un q ir pirmskaitļi, bet n un m – naturāli skaitļi), tad skaitļa b visus dalītājus var izveidot sekojoši. Skaitli p ņemam 1, 2, ..., n reizes vai nevienu reizi (tad ņem 1)- tātad kopā $n + 1$ iespēja, to katrā gadījumā pareizinām ar skaitli q 1, 2, ..., m reizes vai ar skaitli 1 – kopā $m + 1$ iespēja. Pavisam iegūstam $(n + 1)(m + 1)$ dažādus skaitļa b dalītājus (starp tiem ir arī 1 un b), pie tam citu dalītāju skaitlim b nav. Līdzīgi aprēķina dalītāju skaitu arī gadījumā, ja starp skaitļa pirmreizinātājiem ir vairāk nekā 2 dažādi pirmskaitļi.

Tātad skaitli a var uzrakstīt kā $a = 3^{1+k} \cdot 5^{1+n} \cdot Q$, kur $k = 0$ vai 1 (jo a nedalās ar 27, bet varbūt dalās ar 9), n var būt 0 vai jebkurš naturāls skaitlis, Q satur visus pārējos skaitļa a pirmreizinātājus; ja tādu nav, tad $Q = 1$. Tad skaitļa a dalītāju skaitu S var aprēķināt $S = (1 + k + 1)(1 + n + 1)q = (2 + k)(2 + n)q$ (kur q ir Q dalītāju skaits, tātad $q \geq 1$). Tātad S nav pirmskaitlis, jo dalās ar skaitļiem 2 + k un

2 + n, kas nav 1 vai S. Bet skaitlis 101 ir pirmskaitlis, tātad skaitlim a nevar būt tieši 101 dalītājs.

3. Jā, var. Iedomāsimies, ka lādes novietotas pa apli un sanumurētas ar skaitļiem 1, 2, .., 11. Pievienojot pa vienai monētai lāžu trijniekiem (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (10, 11, 1), monētu skaits 1.lādē audzis par 2, bet citās – par 1. Teiksim, ka 1.lādes stāvoklis ir uzlabots.

Apzīmēsim lielāko monētu skaitu, kas ir kādā lādē, ar m. Ja ir kāda lāde, kurā ir mazāk nekā m monētas, uzlabojam tās stāvokli. Atkārtojam šo procesu tik ilgi, kamēr nav lādes, kurā būtu mazāk monētu nekā lādē ar maksimālo monētu daudzumu (ievērojam, ka šis maksimālais monētu daudzums pakāpeniski palielinās). Tad mūsu mērķis ir sasniegts.

4. Turnīrā ar 6 dalībniekiem izspēlē 15 spēles (pārliecinieties par to patstāvīgi). Katrā spēlē izcīna 1 uzvaru. Tātad pavisam ir 15 uzvaras. Tā kā ir 6 spēlētāji, tad kādam spēlētājam ir vismaz 3 (t.i., 3, 4 vai 5) uzvaras. Tiešām, ja katram būtu augstākais 2 uzvaras, tad kopā būtu ne vairāk par $6 \cdot 2 = 12$ uzvarām – pretruna.

a) ja kādam spēlētājam ir 5 uzvaras, ņemam to par A, bet otru spēlētāju B izvēlamies patvaļīgi;

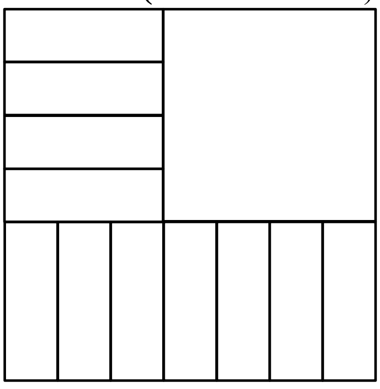
b) ja kādam spēlētājam ir tieši 4 uzvaras, tad ņemam to par A, bet par B ņemam to spēlētāju, kam A ir zaudējis;

c) ja kādam spēlētājam ir tieši 3 uzvaras, tad ņemam to par A. A ir zaudējis diviem spēlētājiem X un Y; par B ņemam to no X un Y, kas uzvarējis savstarpējā spēlē.

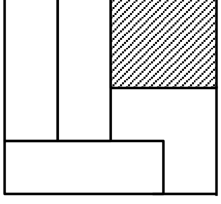
5. Ja uzdevumā aprakstīto procesu veic ar skaitļiem no 1 līdz 4, tad kā pēdējais paliek 1 (pārbaudiet patstāvīgi). Veicot šo procesu ar skaitļiem no 1 līdz 8, pēc 4 skaitļu izsvītrošanas pāri paliek 4 skaitļi un mēs sākam ar darbību "atstāj 1"; tātad arī tagad kā pēdējais paliks skaitlis 1. Pakāpeniski iegūstam, ka arī 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 skaitļu gadījumā kā pēdējais paliek tas skaitlis, ar kuru sāk (kuru "atstāj" kā pirmo).

Ievērosim, ka $2002 = 1024 + 978$. Pēc 978 skaitļu izsvītrošanas palikuši neizsvītroti 1024 skaitļi. Pēdējais izsvītrotais skaitlis ir $2 \cdot 978 = 1956$. Tātad šai brīdī pirmais skaitlis, kuru mēs atstāsim, būs 1957. Saskaņā ar iepriekšējo tas būs arī pēdējais neizsvītrotais skaitlis.

6. Vispirms novietojam 11 figūras 1×3 tā, lai izgrieztā rūtiņa atrastos atlikušajā kvadrātā ar izmēriem 4×4 (skat. A127. zīm.).



A127. zīm.



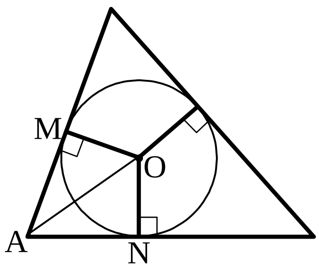
A128. zīm.

Pēc tam kvadrātā 4×4 ievietojam A128. zīm attēloto konfigurāciju tā, lai izgrieztā rūtiņa paliktu iesvītrotajā 2×2 kvadrātā. Ar atlikušo stūrīti pārklājam 3 neizgrieztās rūtiņas iesvītrotajā kvadrātā.

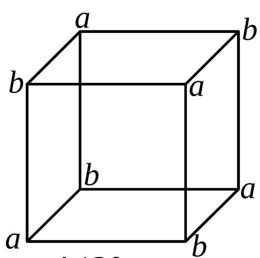
3. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. **a)** Jā. Piemēram, tādi ir skaitļi no 6 līdz 13 ieskaitot.
   b) Nē. No šiem 9 skaitļiem var atrast vismaz piecus, kam ir viens un tas pats desmitu cipars (tiem var būt augstākais divi dažādi desmitu cipari). Ņemam piecus pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus ar vienu un to pašu desmitu ciparu. To ciparu summas ir pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Bet no pieciem pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 5.
2. Aplūkosim cilvēku A, kuram ir visvairāk naudas (vai vienu no tādiem cilvēkiem, ja tādu ir vairāki). Pieņemsim, ka viņa naudas daudzums ir a, bet viņa kaimiņam pa labi B un pretī stāvošajam cilvēkam C ir attiecīgi naudas daudzumi b un c. Tad $2a = b + c$. Tā kā a nav mazāks par b un c, tad tas iespējams tikai, ja $a = b = c$. Tātad arī cilvēkiem B un C ir aplūkojamais maksimālais naudas daudzums. Ņemot A vietā viņa kaimiņu pa labi B, līdzīgi iegūstam, ka arī pa apli nākošajam cilvēkam ir tāds pats naudas daudzums, utt. Tātad visiem cilvēkiem naudas daudzumi ir vienādi; tātad visiem, arī Sprīdītim, ir pa vienam latam.
3. Daudzstūri vispirms sagriežam trijstūros. Trijstūrī atrodam ievilktās riņķa līnijas centru un novelkam rādiusus uz pieskaršanās punktiem (skat. A129. zīm.). Tad ON = OM kā rādiusi un AM = AN kā pieskares, kas vilktas no viena punkta. Mala AO abiem trijstūriem AOM un AON ir kopīga. Tātad trijstūri AOM un AON ir vienādi. Tātad četrstūrim ANOM ir simetrijas ass AO. Līdzīgi spriež par pārējiem četrstūriem.



A129. zīm.



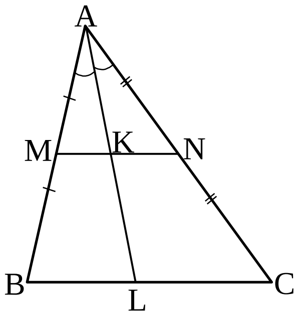
A130. zīm.

4. **a)** Jā. Piemēram, var ņemt 133 divniekus un 935 vieniniekus.
   b), c) Nē. Skaitlis un tā kubs vai nu abi ir pāra skaitļi, vai abi – nepāra. Tāpēc, ja skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tad to kubu summa nevar būt pāra skaitlis.
5. Nē. Skudra pārmaiņus nonāk ar a un b burtiem apzīmētās virsotnēs (skat. 130. zīm.). Tātad skudras apciemojumu skaits a virsotnēs var atšķirties no tās apciemojumu skaita b virsotnēs augstākais par 1. Bet septiņus skaitļus “10” un vienu skaitli “12” nevar sadalīt divās grupās, kuru summas būtu vienādas vai atšķirtos viena no otras par 1.
6. Dažus iesūtītos uzdevumus skatīt 6. nodarbībā.

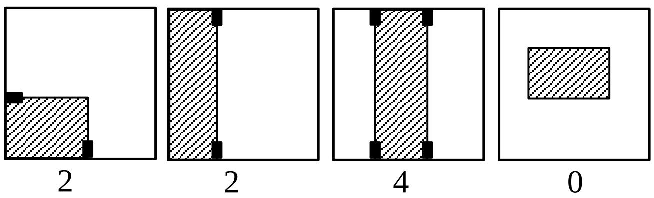
B grupa

1. **a)** Pasvītrojot visus pāra skaitļus, katriem diviem no tiem ir kopīgs dalītājs 2. Tātad var pasvītrot 1001 skaitli.
   b) sadalām visus skaitļus 1001 pārī: (1, 2), (3, 4), ..., (2001, 2002). Ja pasvītrosim vairāk nekā 1001 skaitli, tad divi pasvītrotie skaitļi būs vienā pārī, tātad atšķirsies par 1. Ja tie abi dalītos ar kādu skaitli x, tad arī to starpība (kas ir 1) dalītos ar x. Bet 1 dalās tikai ar “+1” un “-1”. Tātad vairāk par 1001 skaitli pasvītrot nevar.

2. Ar lielajiem burtiem apzīmēsim monētu masas. Salīdzinām savā starpā 2 monētas; pēc tam salīdzinām otras divas. Pieņemsim, ka svēršanu rezultāti ir A < B un C < D. Salīdzinām savā starpā B un D; varam pieņemt, ka B < D (otrs gadījums tiek apskatīts pilnīgi analoģiski).
Tagad mūsu rīcībā ir informācija
A < B < D; C < D
Tālāk salīdzinām piektās monētas masu E ar B. Ja B < E, tad salīdzinām E ar D; ja E < B, tad salīdzinām E ar A. Rezultātā monētu masu A, B, D, E secība mums ir pilnīgi zināma. Ievērosim, ka D šajā secībā ir vai nu smagākā, vai otrā smagākā monēta. Ir zināms arī, ka C < D. Iztērētas 5 svēršanas.
Ja D ir otrā smagākā monēta, tad ar atlikušajām divām svēršanām salīdzinām C ar tām divām monētām, kas vieglākas par D, un iegūstam pilnīgu informāciju.
Ja D ir smagākā monēta, tad apskatām trīs pārējās jau sakārtotajā secībā ietilpstošās monētas; ieviešam to masām apzīmējumus M < N < K. Tā kā C < D, tad jānoskaidro C "attiecības" ar M, N, K. Sestajā svēršanā salīdzinām C ar N. Ja C < N, tad salīdzinām C ar M; ja C > N, tad salīdzinām C ar K.
Vajadzīgais izpildīts.
3. Novelkam trijstūrī ABC viduslīniju MN (skat. A131. zīm.). Tad MN || BC, tātad MK || BL. Tātad MK ir nogrieznis, kas caur AB viduspunktu M vilkts paralēli trijstūra ABL pamatam BL; tātad tas ir trijstūra ABC viduslīnija. Tātad AK = KL. Esam pierādījuši, ka bisektrises viduspunkts atrodas uz trijstūra viduslīnijas.
Ja visu bisektrišu viduspunkti atrastos uz vienas taisnes, tad šī taisne krustotu visas trijstūra viduslīnijas. Bet viduslīnijas pašas veido trijstūri, un neviena taisne nevar krustot visas trijstūra malas. Tāpēc tādu trijstūru, par kādiem runā uzdevumā, nav.



A131. zīm.



A132. zīm.

4. Pieņemsim, ka visas rūtiņas tiek nokrāsotas baltas; otru gadījumu apskata līdzīgi.
a) Mainot krāsas 2., 4., 6., 8. rindiņās un 1., 3., 5., 7. kolonnās, mērķis sasniegts. Tātad pietiek ar 8 gājieniem.
b) Parādīsim, ka ar mazāk nekā 8 gājieniem nepietiek. Gar šaha galdiņa malu atrodas 28 rūtiņas, kas nokrāsotas pamīšus – balta, melna, balta, melna, ... Tātad tur ir 28 vietas, kur blakus atrodas atšķirīgu krāsu rūtiņas. Visas šīs 28 atšķirības ir jālikvidē. Apskatot visas iespējas, kā var izvēlēties taisnstūri, kurā maina rūtiņu krāsas, redzam: ar vienu maiņu var likvidēt augstākais 4 no šīm atšķirībām (skat. A132. zīm.). Tāpēc vajag vismaz 28 : 4 = 7 gājienus. Bet starp šiem gājieniem noteikti ir tādi gājieni, kuru rezultātā krāsu maina stūrī esošās melnās rūtiņas. Šādu gājienu rezultātā tiek likvidētas tikai 2 no minētajām atšķirībām (skat. pirmās divas figūras A132. zīm.). Tā kā $6 \cdot 4 + 2 = 26 < 28$, tad nepieciešami vismaz 8 gājieni, lai likvidētu visas 28 atšķirības.
5. Vispirms pierādīsim lemmu.

Lemma. Starp jebkuriem 6 cilvēkiem var atrast vai nu 3 tādus, kas visi pa pāriem draudzējas, vai arī 3 tādus, no kuriem nekādi divi nedraudzējas savā starpā.

Pierādījums. Izvēlamies vienu cilvēku A. No atlikušajiem 5 var atrast trīs tādus, kam ar A ir vienādas attiecības – vai nu tie visi draudzējas ar A, vai arī neviens no tiem nedraudzējas ar A. Tiešām, ja tādu 3 cilvēku nebūtu, tad atlikušo cilvēku skaits nepārsniegtu 2 + 2 = 4 – pretruna.

Pieņemsim, ka var atrast 3 cilvēkus B, C, D, kuri draudzējas ar A (otru gadījumu apskata līdzīgi). Ja kaut divi no cilvēkiem B, C, D draudzējas savā starpā, tad tie abi kopā ar A veido meklējamo trijnieku, kurā visi pa pāriem draudzējas. Ja tādu divu cilvēku nav, tad B, C, D veido trijnieku, kurā nekādi divi cilvēki nedraudzējas.

Lemma pierādīta.

Apskatām tagad vienu no 10 valstu vadītājiem; apzīmēsim to ar A. Pastāv viena no divām iespējām:

a) no atlikušajiem 9 vadītājiem var atrast 4 tādus, ar kuriem A draudzējas. Šķirojam divus apakšgadījumus:

a1) kaut divi no šiem 4 vadītājiem draudzējas savā starpā. Tad viņi kopā ar A veido meklējamo trijnieku;

a2) nekādi divi no šiem 4 vadītājiem nedraudzējas savā starpā. Tad viņi paši veido meklējamo četrinieku.

b) no atlikušajiem 9 cilvēkiem var atrast 6 tādus, ar kuriem A nedraudzējas. Pielietojam šiem 6 cilvēkiem lemmu un iegūstam vajadzīgo (ja starp tiem ir 3 tādi cilvēki, kas savā starpā nedraudzējas, tad apskatām tos kopā ar A).

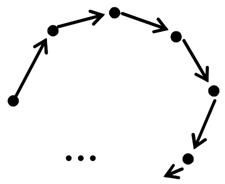
Viena no iespējām a) vai b) noteikti pastāv; pretējā gadījumā atlikušo vadītāju (bez A) kopskaits nepārsniegtu 3 + 5 = 8 – pretruna.

6. Dažus iesūtītos uzdevumus skatīt 6. nodarbībā.

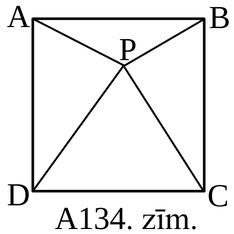
4. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Vajag uz katru valodu vismaz vienu tulkojošu vārdnīcu, jo no katras valodas ir jāvar tulkot uz jebkuru citu un katra vārdnīca ļauj tulkot tikai vienā virzienā. Tātad vārdnīcu skaitam jābūt vismaz 2003. A133. zīmējumā parādīts, ka ar 2003 vārdnīcām pietiek (zīmējumā valodas apzīmētas ar punktiem, vārdnīcas – ar bultiņām).



A133. zīm.



A134. zīm.

2. Doto izteiksmi sadalot reizinātājos, iegūst

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = =-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Šķirosim divus gadījumus:

1) ja a = b vai b = c, vai c = a, tad izteiksmes vērtība ir 0, kas nav pirmskaitlis.

2) ja visi skaitļi a, b, c ir dažādi naturāli skaitļi, tad to summa a + b + c ir vismaz 3, un vismaz viena no starpībām |a-b|, |a-c|, |b-c| ir lielāka vai vienāda ar 2. Bet divu naturālu skaitļu, lielāku par 1, reizinājums nav pirmskaitlis, vajadzīgais pierādīts.

3. Ievērosim, ka katram kvadrāta iekšējam punktam ir spēkā vienādība (skat. A134. zīm.):

P(APB) + P(CPD) = P(BPC) + P(DPA) **(*)**

Tiešām, $(AP+PB+AB)+(CP+PD+DC)=(PB+CP+BC)+(PD+AP+AD)$ jeb $AP+PB+CP+PD+2a=PB+CP+PD+AP+2a$, kur a – kvadrāta malas garums. Vienādībā (*) ievietojot dotos lielumus, iegūstam 99 cm + 101 cm = 100 cm+P(DPA)$\Rightarrow$P(DPA) = 100 cm.

4. Pavisam ir 10 skaitļi no 1 līdz 1000, kuru ciparu summa ir 3. Tie ir:
viencipara skaitlis 3
divciparu skaitļi 30, 21, 12
trīsciparu skaitļi 300, 210, 201, 102, 120, 111.

5. Veidosim minētās grupas tā, lai izpildītos uzdevuma prasības.
Skaitli 1 liksim I grupā.
Tā kā 1 + 3 = 4 = 2^2 un 1 + 8 = 9 = 3^2, tad skaitļi 3 un 8 jāliek II grupā.
3 + 6 = 9 = 3^2 un 3 + 13 = 16 = 4^2, tātad skaitļi 6 un 13 ir I grupā.
6 + 10 = 16 = 4^2 un 13 + 12 = 25 = 5^2, tātad skaitļi 10 un 12 jāliek II grupā.
12 + 4 = 16 = 4^2, tāpēc skaitlis 4 atrodas I grupā.
Savukārt 4 + 5 = 9 = 3^2, tātad skaitlim 5 jābūt II grupā.
5 + 11 = 16 = 4^2, tāpēc skaitlis 11 atrodas I grupā.
11 + 14 = 25 = 5^2, tātad skaitlim 14 jābūt II grupā.
14 + 2 = 16 = 4^2, tāpēc skaitlis 2 ir I grupā.
2 + 7 = 9 = 3^2, tātad skaitlis 7 ir II grupā.
Bet 7 + 9 = 16 = 4^2, tāpēc skaitlim 9 jābūt I grupā.

I grupa	1			6	13			4		11			2	9
II		3	8			10	12		5		14	7		

grupa

Esam parādījuši, ka skaitļus no 1 līdz 14 var sadalīt divās grupās tā, ka vienā grupā nekādu divu skaitļu summa nav naturāla skaitļa kvadrāts (pārbaude!). Pie tam, kā redzams no konstrukcijas gaitas, šāds sadalījums ir viennozīmīgs.

Ja skaitli 15 ievietotu I grupā, tad $15 + 1 = 16 = 4^2$, savukārt, ja 15 ievietotu II grupā, tad $15 + 10 = 25 = 5^2$. Tas nozīmē, ka naturālos skaitļus no 1 līdz 15 atbilstoši uzdevuma prasībām sadalīt nevar. Tātad lielākā n vērtība ir 14.

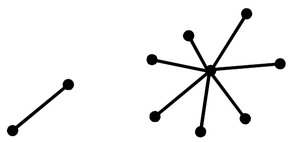
6. Pieņemsim, ka “Milži” bija uzvarējuši “Gigantus”. Tad jāeksistē tādai komandai X, ka X ir uzvarējusi “Milžus” un “Giganti” ir uzvarējuši X. Tiešām, ja tā nebūtu, tad “Milži” būtu uzvarējuši visas tās komandas, ko uzvarēja “Giganti”, un vēl “Gigantus”, tātad “Milžiem” būtu vairāk uzvaru nekā “Gigantiem”, bet tas ir pretrunā ar uzdevumā doto. Tātad tāda komanda X eksistē. Šīs minētās komandas arī ir meklētās trīs komandas.

B grupa

1. Atzīmēsim valodas ar punktiem, bet vārdnīcas – ar nogriežņiem. Ja ir tikai 2 valodas, tad pietiek ar 1 vārdnīcu (skat. A135.a) zīm.).

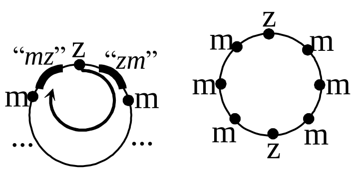
Pievienojot klāt pa vienai valodai, pievienojas arī vismaz viena vārdnīca (ar kuru var tulkot uz jauno valodu). Tātad starpība |valodu skaits| - |vārdnīcu skaits| nepieaug. Tā kā sākumā tā bija 2 – 1 = 1, tad arī beigās, kad valodu ir n, vārdnīcu ir vismaz (n-1).

A135.b) zīmējumā parādīts, ka ar 2002 vārdnīcām pietiek.



a) b)

A135.zīm.



a) b)

A136. zīm.

2. Izvēlēsimies vienu bērnu un “iesim” no tā pulksteņrādītāja kustības virzienā, skaitot “pāreju” skaitu, kad pēc zēna sēž meitene (“zm”) un kad pēc meitenes sēž zēns (“mz”) (skat. A136.a) zīm.). Ievērosim, ka “pāreju” “zm” ir tikpat cik “pāreju” “mz”. Tiešām, ja kādā vietā sēž viens vai vairāki zēni pēc kārtas, tad pēc tam pulksteņrādītāja virzienā sēž meitene, iegūstam vienu “pāreju” “zm”. Taču vēlāk atkal atgriežamies pie šiem zēniem, tātad būs arī viena “pāreja” “mz”. Tieši tāpat ir ar citām vietām, kur sēž viens vai vairāki zēni pēc kārtas. Tātad “zm”=“mz” jeb “zm”+“mz” ir pāra skaitlis. Tā kā šo vietu skaits, kur blakus sēž zēns un meitene, ir vienāds ar to vietu skaitu, kur blakus sēž “zēns – zēns” vai “meitene – meitene” (tātad arī to kopā ir pāra skaitlis), tad visu vietu skaits starp diviem bērniem dalās ar 4. Bet šo vietu ir tikpat, cik bērnu, jo bērni sēž pa apli.

A136.b) zīmējumā parādīts piemērs ar 6 meitenēm un 2 zēniem, tātad zēnu un meiteņu skaitiem nav obligāti jābūt vienādiem.

3. Jā, var, piemēram tā, kā parādīts A137. zīm. Zīmējumā parādīts, kā burti ir jāieraksta katrā kuba “slānī”.

a	c	b
b	a	c
c	b	a

c	b	a
a	c	b
b	a	c

b	a	c
c	b	a
a	c	b

A137. zīm.

4. $9+99+999+\ldots+\underbrace{999\ldots9}_{2003}=$

$=10+100+1000+\ldots+1\underbrace{00\ldots0}_{2003}-2003=$

$=\underbrace{11\ldots1}_{1999}11110-2003=\underbrace{11\ldots1}_{1999}9107.$

Kā redzam, summā ir 2000 vieninieki, viens cipars "9", viens cipars "0" un viens cipars "7".

5. **.** Pārveidosim doto izteiksmi:

$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 -$
$- (2xy)^2 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

Tā kā x un y ir naturāli skaitļi, tad
$x^2 + 2xy + 2y^2 > x^2 - 2xy + 2y^2$.

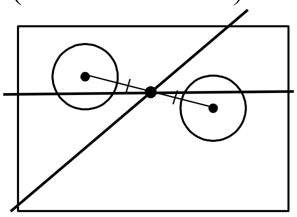
Tā kā $p = x^4 + 4y^4$ ir pirmskaitlis, tad arī $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$ jābūt pirmskaitlim. Tas nozīmē, ka $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$. Tātad
$(x - y)^2 + y^2 = 1$. Tātad vai nu
$y = 1$, $x = 1$ (tad $p = 5$ – der),
vai arī $y = 0$, $x - y = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow p = 1$ – nav pirmskaitlis.

Atbilde: $x^4+4y^4=5$.

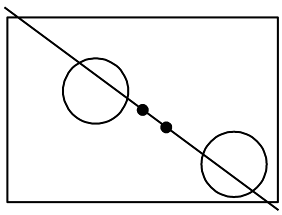
6. Mūsu risinājums balstās uz diviem faktiem:

1) Jebkura taisne, kas iet caur taisnstūra diagonāļu krustpunktu, sadala taisnstūra laukumu vienādās daļās. Tiešām, taisne, kas iet caur taisnstūra simetrijas centru (diagonāļu krustpunktu), vai nu ir diagonāle - tādā gadījumā tā taisnstūri sadala divos vienādos (un vienlielos) trijstūros, vai arī sadala taisnstūri divās vienlielās trapecēs. (Pamatojiet to patstāvīgi!)

2) Jebkura taisne, kas iet caur "caurumu" simetrijas centru (nogriežņa, kas savieno abu riņķu centrus, viduspunktu), sadala "tukšumus" vienādās daļās. Tiešām, ja taisne nekrusto riņķus, tad tā iet starp abiem riņķiem un taisnei abās pusēs paliek vienādi "tukšumi" – sākotnējie apaļie caurumi. Ja taisne krusto vienu apli, tad tā krusto arī otru apli, pie tam no abiem apļiem tā nošķeļ vienādas figūras (jo taisne iet caur simetrijas centru), tātad abu apļu summārais laukums tiek sadalīts vienādās daļās (skat. A138. zīm.).



A138. zīm.



A139. zīm.

Tātad, lai doto plāksnes daļu sadalītu divās daļās ar vienādiem laukumiem, var griezt pa taisni, kas iet caur taisnstūra centru un "caurumu" simetrijas centru (skat. A139. zīm.). Tādu taisni novilkt noteikti var, jo caur diviem punktiem var novilkt vienu un tikai vienu taisni. Ja abi minētie punkti sakrīt, tad der jebkura taisne, kas iet caur šo punktu.

5. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Atbilde: tāds ir tikai viens skaitlis 2178.

Risinājums. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – cipari). Tad no dotā seko, ka $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$ jeb $4(1000a + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a$

$$3999a + 390b = 60c + 996d \qquad \textbf{(1)}$$

Vienādības (1) labajā pusē summa ir pāra skaitlis, tātad arī kreisajā pusē jābūt pāra skaitlim. Tā kā saskaitāmais 390b ir pāra skaitlis, tad arī 3999a jābūt pāra skaitlim, tātad *a* ir pāra skaitlis. Ievērosim arī, ka $a < 3$ (pretējā gadījumā $\overline{abcd} \cdot 4 \geq 3000 \cdot 4 = 12000$ – nav četrciparu skaitlis) un $a \neq 0$ (jo *a* ir skaitļa pirmais cipars). Tātad a = 2.

No vienādības $\overline{2bcd} \cdot 4 = \overline{dcb2}$ redzam, ka reizinājuma $d \cdot 4$ pēdējais cipars ir 2, tātad d = 3 vai d = 8. Skaidrs, ka $\overline{2bcd} \cdot 4 > 8000$, t.i., $d \geq 8$, tātad d = 8.

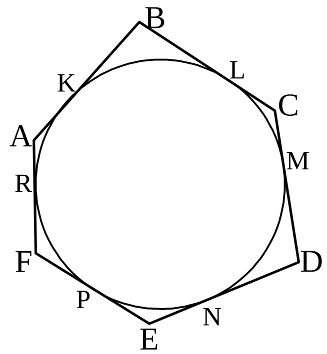
Atrastās vērtības ievietosim vienādībā (1) un vienkāršosim:

$$7998 + 390b = 60c + 7968$$
$$30 + 390b = 60c$$
$$1 + 13b = 2c \qquad \textbf{(2)}$$

Ja $b \geq 2$, tad vienādības (2) kreisā puse ≥ 27, bet tad *c* nav cipars. Tātad b = 1 un c = 7.

Pārbaude $2178 \cdot 4 = 8712$ parāda, ka šis skaitlis apmierina uzdevuma prasības. No sprieduma redzams, ka tas tāds ir vienīgais.

2. Apzīmēsim sešstūra malu pieskaršanās punktus riņķa līnijai ar K, L, M, N, P, R (skat. A140. zīm.).



A140. zīm.

No viena punkta pret riņķa līniju vilkto pieskaru nogriežņi līdz pieskaršanās punktiem ir vienādi, tātad:

AK = RA

KB = BL

CM = LC

MD = DN

EP = NE

PF = FR

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

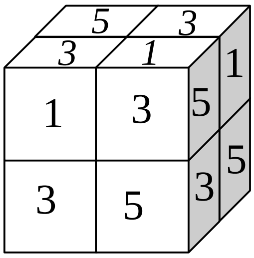
(AK + KB) + (CM + MD) + (EP + PF) = (BL + LC) + (DN + NE) + (FR + RA)

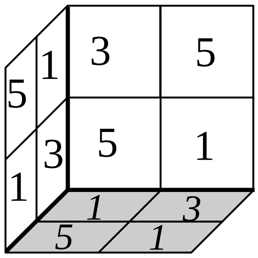
jeb

AB + CD + EF = BC + DE + FA, k.b.j.

3. Apskatīsim vienu mazo kubiņu. Tā trīs skaldnēs ar kopīgu virsotni ir ierakstīti dažādi skaitļi (jo vienādie skaitļi ir ierakstīti pretējās skaldnēs – tām nav kopīgu virsotņu). Sastādot lielo kubu, katrs mazais kubiņš nonāk vienā tā virsotnē un tam ir redzamas trīs skaldnes ar kopīgo virsotni. Tātad no katra mazā kubiņa ir redzami skaitļi 1, 3, 5, un visu redzamo skaitļu summa ir $(1+3+5)\cdot 8=72$.

A141. zīmējumā parādīts, ka var izveidot tādu kubu, kas apmierina uzdevuma nosacījumus (A141.a) zīm. parādīts skats no priekšas, A141. b) zīm. – “neredzamās” skaldnes). Piemērs ir obligāts, jo var gadīties, ka uzdevumā aprakstītais objekts nemaz neeksistē.





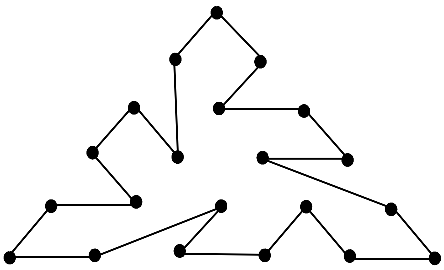
A141.a) zīm. A141.b) zīm.

4. Ievērosim, ka skaitļi x un x^{2003} ir ar vienādu paritāti (t.i., ja x ir pāra skaitlis, tad x^{2003} arī ir pāra skaitlis; ja x ir nepāra skaitlis, tad arī x^{2003} ir nepāra skaitlis).

Tātad summas $(a-1)^{2003}+(b-2)^{2003}+...+(h-8)^{2003}$ paritāte ir tāda pati kā summas $(a-1)+(b-2)+...+(h-8)$ paritāte.

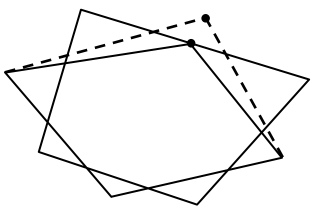
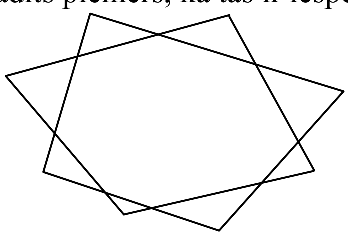
Bet $(a-1)+(b-2)+...+(h-8)=(a+b+...+h)-(1+2+...+8)=0$ – pāra skaitlis. Tātad arī dotā summa ir pāra skaitlis.

5. Skat., piemēram, A142. zīm.



A142. zīm.

6. Skaidrs, ka gadījumi, kad viena četrstūra virsotne atrodas uz otra četrstūra malas, nedos maksimālo rezultātu; šo virsotni mēs varētu “pavilkt” tā, ka veidotos vēl viena plaknes daļa (skat. A143. zīm.). Tātad apskatām tikai gadījumus, kad viena četrstūra malas krusto otra četrstūra malas. Tā kā doti izliekti četrstūri, tad otrs četrstūris var krustot pirmā četrstūra katru malu ne vairāk kā 2 punktos. Tātad četrstūra kontūra tiks sadalīta ne vairāk kā $2\cdot 4=8$ daļās, un katra no šīm daļām nosaka atsevišķu plaknes apgabalu. Vēl ir viena plaknes daļa iegūtās figūras iekšpusē un viena daļa tai apkārt, tātad divi četrstūri plakni var sadalīt ne vairāk kā $8+2=10$ daļās. A144. zīmējumā parādīts piemērs, ka tas ir iespējams.

A143. zīm. A144. zīm.

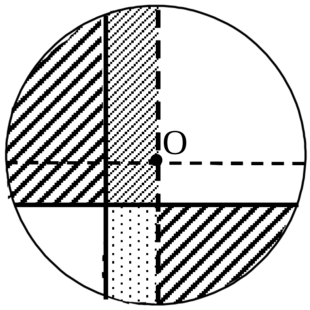
B grupa

1. Atbilde: nē, nedalīsies.

Risinājums. Atcerēsimies, ka naturāls skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad ja tā ciparu summa dalās ar 3. Tā kā doto triju skaitļu summa ir 2003 – nedalās ar 3, tad arī to ciparu summa ar 3 nedalās. Bet tas nozīmē, ka arī iegūtais skaitlis nedalās ar 3, tātad nedalās arī ar 21.

2. Atbilde: lielāka ir neiesvītroto daļu laukumu summa.

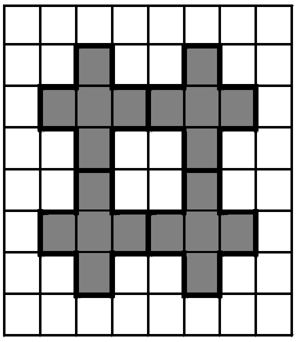
Risinājums. Pabīdīsim vienu hordu tā, lai tā ietu caur riņķa centru (skat. A145. zīm.).



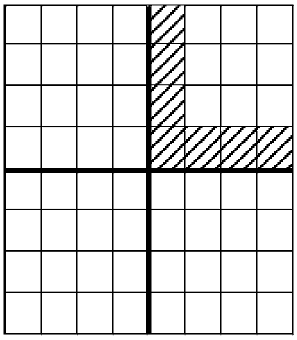
A145. zīm.

Tad simetrijas pēc iesvītroto un neiesvītroto daļu laukumu summas būtu vienādas. Taču pārbīdes rezultātā vienas iesvītrotās daļas laukums palielinājās (zīmējumā iesvītrots sīkākām līnijām) vairāk nekā otras iesvītrotās daļas laukums samazinājās (zīmējumā punktotais apgabals). Tiešām, ja arī otra horda ietu caur riņķa centru, tad šie laukumi būti vienādi, bet šajā gadījumā lielāks laukums ir tai daļai, kas "satur" riņķa centru. Tātad pārbīdes rezultātā iesvītroto daļu laukumu summa ir palielinājusies, bet tas nozīmē, ka pirms pārbīdes tā bija mazāka nekā neiesvītroto daļu laukumu summa.

3. A146. zīmējumā parādīts, kā ievietot 4 "krustus", lai nevienu "krustu" vairāk kvadrātā ievietot nevarētu.



A146. zīm.



A147. zīm.

Pierādīsim, ka ar trīs "krustiem nepietiek, lai vairāk nevienu šādu figūru ievietot nevarētu. Sadalīsim doto kvadrātu 4 daļās – kvadrātos 4×4 rūtiņas (skat. A147. zīm.). Tā kā ir tikai trīs "krusti", tad tikai, augstākais, trijās no minētajām daļām var atrasties kāda "krusta" centrālā rūtiņa. Tātad ceturtajā daļā var būt "aizņemtas" tikai dažas no iesvītrotajām rūtiņām. Bet tad paliek brīvs kvadrāts 3×3 rūtiņas, kurā var ievietot vēl vienu "krustu".

4. Atbilde: pietiek ar 2 svēršanām.

Skaidrs, ka ar vienu svēršanu nepietiek, jo nekādā gadījumā nevarēs iegūt viennozīmīgu rezultātu.

1. svēršana. Uz viena svaru kausa novietojam monētu ar uzrakstu “6g”, uz otra kausa monētas ar uzrakstiem “1g”, “2g” un “3g”. Tā kā no dotā monētu komplekta tikai vienā viedā var iegūt šādu vienādību 6 = 1 + 2 + 3 (triju monētu kopējais svars vienāds ar vienas citas monētas svaru), tad gadījumā, ja svari būs līdzsvarā, skaidrs, ka monēta ar uzrakstu “6g” patiešām sver 6g, un starp monētām ar uzrakstiem “1g”, “2g”, “3g” patiešām ir monētas ar svaru 1g, 2g, 3g (bet var būt, ka uzraksti nav pareizi!). Tāpat skaidrs, ka starp malā palikušajām monētām ar uzrakstiem “4g” un “5g” ir monētas ar svaru 4g un 5g, bet arī nav zināms, vai šie uzraksti ir patiesi. Tātad svēršanas jāturpina.

Ja svari nav līdzsvarā, tad, acīmredzot, kādai no monētām svars neatbilst uzrakstam un svēršanas vairs nav jāturpina (ir prasīts tikai noskaidrot, vai visi uzraksti ir patiesi; šajā gadījumā atbilde būs – “nē, nav patiesi”).

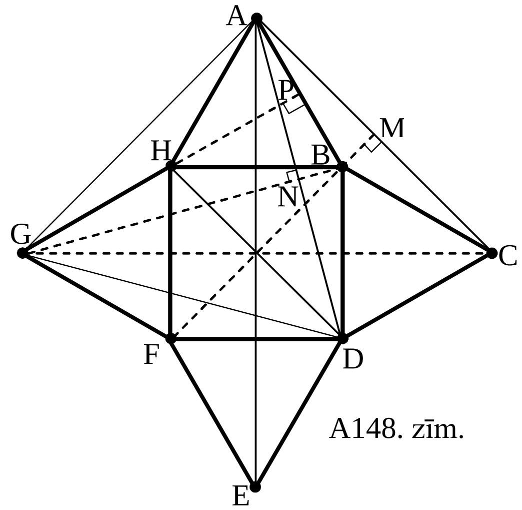
2.svēršana. Tagad uz viena kausa liksim monētas ar uzrakstiem “6g” (šī monēta tiešām sver 6g) un “1g” (šī monēta var svērt 1g, 2g vai 3g); uz otra svaru kausa liksim monētas ar uzrakstu “5g” (tā var svērt 5g vai arī 4g) un “3g” (tā var svērt 3g, 2g vai 1g). Malā paliek monētas ar uzrakstu “4g” un “2g”.

Tā kā 6 + 1 < 5 + 3, tad gadījumā, ja šie uzraksti pareizi, svaru kauss ar “5g” un “3g” monētām nosvērsies uz leju.

Ja kādai no monētām uzraksts būs nepareizs, tad vai nu svari būs līdzsvarā (piemēram, ja “1g” monēta sver 2g vai “5g” monēta sver 4g, vai “3g” monēta sver 2g) vai arī uz leju nosvērsies svaru kauss ar monētām “6g” un “1g” .

Tātad tikai vienā gadījumā smagāks būs svaru kauss ar monētām “5g” un “3g” – tad, kad uzraksti “1g”, “5g” un “3g” ir pareizi, pie tam arī malā palikušajām monētām tādā gadījumā uzraksti būs pareizi – “4g” monēta tiešām sver 4g (un nevis 5g) un “2g” monēta sver 2g (un nevis 1g vai 3g).

5. A148. zīmējumā uzzīmēts kvadrāts BDFH un uz katras tā malas konstruēts pa regulāram trijstūrim. Pierādīsim, ka visas šīs virsotnes A, B, C, D, E, F, G, H ir meklētie 8 punkti.



A148. zīm.

1) Nogriežņa AB vidusperpendikuls HP satur punktu H (regulāra trijstūra vidusperpendikuls ir arī tā augstums) un punktu G. Punkti G, H, P atrodas uz vienas taisnes, jo $\angle GHP = \angle GHF + \angle FHB + \angle BHP = 60^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$.

2) Nogriežņa AC vidusperpendikuls satur punktu B (ΔABC ir vienādsānu, AB = BC pēc konstrukcijas, tātad tā augstums ir arī vidusperpendikuls) un punktu F. Punkti F, B, M atrodas uz vienas taisnes, jo $\angle FBM = \angle FBD + \angle DBC + \angle CBM = 45^\circ + 60^\circ + \; + \left(50^\circ : 2\right) = 180^\circ$.

3) Nogriežņa AD vidusperpendikuls satur punktu B (ΔABD ir vienādsānu, tātad tā augstums ir arī vidusperpendikuls) un punktu G (ΔAGD vienādsānu: $AG = GD$, jo $\Delta AHG = \Delta GFD$ (pierādiet patstāvīgi!), tātad ΔAGD augstums ir arī vidusperpendikuls). Tā kā ΔABD un ΔAGD ir kopīga pamata mala, tad vidusperpendikuli sakrīt.

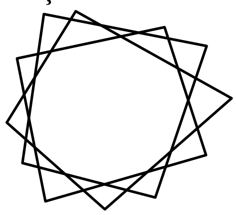
4) Nogriežņa AE vidusperpendikuls satur punktus G un C (pamatojiet patstāvīgi!)

5) Nogriežņa BD vidusperpendikuls satur punktus C (regulārā ΔBDC augstums ir arī vidusperpendikuls) un G (ΔBGD vienādsānu: $BG = GD$, jo $\Delta GHB = \Delta GFD$ (pierādiet patstāvīgi!), tātad ΔBGD augstums ir arī nogriežņa BD vidusperpendikuls). Tā kā ΔBDC un ΔBGD ir kopīga pamata mala, tad vidusperpendikuli sakrīt.

6) Nogriežņa BF vidusperpendikuls satur punktus H un D, jo kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras un krustpunktā dalās uz pusēm, tātad tās viena otrai ir vidusperpendikuls.

Ir apskatīti visi būtiski atšķirīgie divu punktu pāri (pārējie gadījumi ir analoģiski (simetriski) jau apskatītajiem), un katrā gadījumā izpildījās uzdevuma prasības.

6. Spriežam līdzīgi kā A grupas 6. uzdevumā. Ja mums jau ir divi četrstūri, tad, "uzliekot" virsū trešo četrstūri, tā katra mala var tikt krustota, augstākais, 4 punktos. Tātad visa kontūra tiek sadalīta $4 \cdot 4 = 16$ daļās, un divu četrstūru sadalītajām plaknes daļām klāt nāk vēl 16 jaunas daļas. Tātad trīs izliekti četrstūri plakni var sadalīt 10 + 16 = 26 daļās. A149. zīmējumā parādīts, kā to realizēt.



A149. zīm.

6. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: 2030.

Sastādīsim sekojošo tabulu, no kuras viegli iegūsim vajadzīgo rezultātu:

ciparu summa	datums	cik mēnešos ir tāds datums	datums	cik mēnešos ir tāds datums	datums	cik mēnešos ir tāds datums	datums	cik mēnešos ir tāds datums	cik reizes pavisam sastopama šī summa
1	1.	12	10.	12					24
2	2.	12	11.	12	20.	12			36
3	3.	12	12.	12	21.	12	30.	11	47
4	4.	12	13.	12	22.	12	31.	7	43
5	5.	12	14.	12	23.	12			36
6	6.	12	15.	12	24.	12			36
7	7.	12	16.	12	25.	12			36
8	8.	12	17.	12	26.	12			36
9	9.	12	18.	12	27.	12			36
10			19.	12	28.	12			24
11					29.	11			11

Tātad meklētā summa ir

$$3\cdot 47+4\cdot 43+11\cdot 11+(1+10)\cdot 24+(2+5+6+7+8+9)\cdot 36=2030.$$

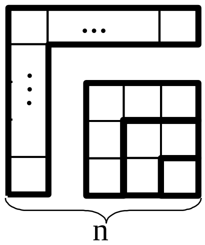
2. Atbilde: 75 skaitļi.

Tā kā nevienam no skaitļiem 2000, 2001, 2002, 2003 ciparu summa nav 14, tad mums jāapskata četrciparu skaitļi, kuru pirmais cipars ir 1. Tātad meklējamo skaitļu pārējo trīs ciparu summai jābūt 14 – 1 = 13. Izteiksim skaitli 13 kā trīs ciparu summu un uzrakstīsim visas būtiski atšķirīgās iespējas (tās summas, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo secību, nerakstīsim; saskaitāmos sakārtosim augošā kārtībā).

13 = 0 + 4 + 9
13 = 0 + 5 + 8
13 = 0 + 6 + 7
13 = 1 + 3 + 9
13 = 1 + 4 + 8
13 = 1 + 5 + 7
13 = 2 + 3 + 8
13 = 2 + 4 + 7
13 = 2 + 5 + 6
13 = 3 + 4 + 6
13 = 1 + 6 + 6
13 = 2 + 2 + 9
13 = 3 + 3 + 7
13 = 3 + 5 + 5
13 = 4 + 4 + 5

3. Atbilde: 11 un 18, 101 un 102.

Pierādīsim, ka katra naturāla skaitļa n kvadrātu var izteikt kā pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summu: $n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$. Tiešām, ievērosim, ka n^2 ir rūtiņu skaits kvadrātā ar malas garumu n rūtiņas. Šo kvadrātu varam aizpildīt arī ar "stūrīšiem", kā parādīts A150. zīmējumā:



A150. zīm.

Katrā "stūrītī" tik tiešām ir 2·n-1 rūtiņas, jo tas sastāv no 2 kvadrāta ar malas garumu n "malām", taču stūra rūtiņa tādā gadījumā tiek ieskatīta divreiz, tāpēc 1 ir jāatņem. Kā redzam zīmējumā, kvadrāta labajā apakšējā stūrī ir 1 rūtiņa, tad ir "stūrītis" no $3 = 2 \cdot 2 - 1$ rūtiņām, tad "stūrītis" no 5 rūtiņām utt., un pats pēdējais stūrītis satur 2n-1 rūtiņu. Tātad tiešām $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

Tagad šo faktu pielietosim uzdevuma risināšanā. Tā kā 203 ir nepāra skaitlis, tad noteikti eksistē vismaz viens tādu naturālu skaitļu pāris, kuru kvadrātu starpība ir tieši 203. Tie varētu būt skaitļi n un n + 1, kur $2 \cdot (n + 1) - 1 = 203$ (ja atkal to iztēlojamies kā A150. zīm., tad lielāko kvadrātu iegūsim, mazākajam pievienojot stūrīti, kas satur 203 rūtiņas). Tātad der skaitļi n = 101 un n + 1 = 102.

Tā kā katrā stūrītī ir nepāra skaits rūtiņu un 203 arī ir nepāra skaitlis, tad jāmeklē tādi kvadrāti, kur lielāko no mazākā var iegūt, pievienojot tam nepāra skaitu "stūrīšu". Apskatīsim pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summas pa 3, pa 5, pa 7, pa 9, pa 11, pa 13 utt. (izvēlēsimies skaitļus tā, lai to summa būtu aptuveni 203). Tie gadījumi, kad summa būs tieši 203, dos vēl citas uzdevuma atbildes.

<u>Summas pa 3</u>: 65 + 67 + 69 = 201 < 203, bet 67 + 69 + 71 = 207 > 203, tātad nekādu trīs pēc kārtas ņemtu nepāra skaitļu summa nav 203.

<u>Summas pa 5</u>:
35 + 37 + 39 + 41 + 43 = 195 < 203, bet 37 + 39 + 41 + 43 + 45 = 205 > 203.

<u>Summas pa 7</u>: 23+25+27+29+31+33+35 = 203. Tātad 2n – 1 = 21, no kurienes n = 11. Tātad skaitļi 11 un 18 arī apmierina uzdevuma nosacījumus.

<u>Summas pa 9</u>:
13 + 15 + 17 + 19 + 21 +23 + 25 +27+29 = 189 < 203
un 15+17+19+21+23+25+27+29+31 = 207 > 203.

<u>Summas pa 11</u>:
7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 = 187 < 203
un 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 209 > 203.

<u>Summas pa 13</u>:
3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 = 195 < 203
un 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 221 > 203.

<u>Summas pa 15</u>:
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 225 > 203.

Tātad uzdevuma nosacījumus apmierina tikai skaitļu pāri 11 un 18, kā arī 101 un 102.

4. <u>Atbilde:</u> var salikt 14 pilnas rindas, un pāri paliks 408 klucīši.
Sastādīsim tabulu, kurā aprēķināsim, cik klucīšus Juris lika katrā rindā un cik klucīši kopā būs izmantoti katras rindas beigās.

rindas numurs	klucīši vienā rindā	cik klucīši jau ir izmantoti
1.	1	1
2.	2	3

3.	3	6
4.	5	11
5.	8	19
6.	13	32
7.	21	53
8.	34	87
9.	55	142
10.	89	231
11.	144	375
12.	233	608
13.	377	985
14.	610	1595

Tātad pēc 14 rindu salikšanas Jurim paliks $2003 - 1595 = 408$ klucīši, ar ko nepietiks 15. rindas salikšanai, jo tajā jābūt 610 + 377 = 987 klucīšiem.

5. <u>Atbilde:</u> 3. decembrī.

Meklēsim mazāko kopīgo dalāmo skaitļiem 4, 8, 12 un 16; pēc tik nedēļām atkal visi četri tvaikoņi būs Rīgas ostā. Tā kā 16 dalās gan ar 8, gan ar 4, tad mums pietiek atrast skaitļu 16 un 12 mazāko kopīgo dalāmo. Tā kā 16 = 2^4; $12 = 2^2 \cdot 3$, tad MKD$(6,12) = 2^4 \cdot 3 = 48$. Tātad visi tvaikoņi ostā atkal būs kopā tieši pēc 48 nedēļām jeb pēc $48 \cdot 7 = 336$ dienām, t.i., 337. šī gada dienā. Atliek noskaidrot, kurš datums tas būs. Ievērosim, ka 336 = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 2, tātad visi tvaikoņi Rīgas ostā satiksies 3. decembrī.

6. Procesa laikā mēs dalīsim attiecīgajā brīdī apskatāmās monētas trīs „līdzīgās” kaudzītēs (kaudzītes veidosim tā, lai divās būtu vienāds skaits monētu, bet trešajā monētu skaits vai nu lai ir tāds pats, kā pirmajās kaudzītēs, vai atšķiras no tā par 1 vai 2, ja kopējais monētu skaits nedalās ar 3).

2003 monētas sadalām trīs kaudzītēs pa 668, 668 un 667 monētām.

<u>1.svēršana.</u> Uz katra svaru kausa uzliekam pa 668 monētām; 667 monētas paliek malā. Ja svari nav līdzsvarā, tad vieglākā monēta ir starp tām 668 monētām, kuras ir uz vieglākā svaru kausa; ja svari ir līdzsvarā, tad vieglākā monēta ir starp tām 667 monētām, kuras netika svērtas. Turpināsim svēršanu tikai ar to kaudzīti (668 vai 667 monētām), kurā ir vieglākā monēta.

<u>2.svēršana.</u> Uz katra svaru kausa uzliekam pa 223 monētām; malā paliek 222 vai 221 monētas (atkarībā no tā, kurā kaudzītē pēc 1.svēršanas atradās vieglākā monēta). Spriežam līdzīgi kā 1.svēršanā un noskaidrojam kaudzīti, kurā ir vieglākā monēta.

<u>3.svēršana.</u> Uz katra svaru kausa uzliekam pa 74 monētām; atkarībā no otrās svēršanas rezultāta trešajā kaudzītē paliek 75, 74 vai 73 monētas. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, atrodam vieglāko kaudzīti.

<u>4.svēršana.</u> Uz katras svaru kausa uzliekam pa 25 monētām no vieglākās kaudzītes; malā paliek attiecīgi 25, 24 vai 23 monētas. Svēršanas rezultātā noskaidrosim, kuru kaudzīti būs jādala un jāsver tālāk.

<u>5.svēršana.</u> Uz katra svaru kausa uzliekam pa 8 monētām; malā atliekam attiecīgi 9, 8 vai 7 monētas. Spriežam līdzīgi kā iepriekš.

<u>6.svēršana.</u> Uz katra svaru kausa liekam pa 3 monētām no vieglākās kaudzītes; trešajā kaudzītē paliek attiecīgi 3, 2 vai 1 monēta. Ja svari ir līdzsvarā un trešajā kaudzītē palika 1 monēta, tad tā arī ir meklētā; citos gadījumos turpinām svēršanu.

7.svēršana. Tagad zinām starp kurām 3 vai starp kurām 2 (atkarībā no iepriekšējo svēršanu rezultāta) monētām ir vieglākā.
Ja palikušas tikai 2 monētas, tad uz katra svaru kausa uzliekam pa vienai monētai. Meklētā monēta ir uz vieglākā kausa, jo svari noteikti nebūs līdzsvarā.
Ja palikušas 3 monētas, tad arī uz katra svaru kausa liekam pa vienai monētai un viena paliek malā. Ja svari ir līdzsvarā, tad meklētā monētā ir trešā – malā atliktā monēta; ja svari nav līdzsvarā, tad meklētā monētā ir uz vieglākā svaru kausa.