“Profesora Cipariņa klubs” 2002./03.m.g.

1.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Profesora Cipariņa motocikla abi riteņi ir vienāda izmēra. Priekšējā riteņa riepa nolietojas pēc 20 000 km; aizmugurējā riteņa riepa nolietojas pēc 30 000 km. Braukšanas procesā riepas nolietojas vienmērīgi. Kādu lielāko attālumu Cipariņš var nobraukt ar divām riepām?
2. Doti 5 papīra kvadrāti, katrs ar laukumu 1 cm^2. Vai var dažus no tiem ar taisnu griezienu sagriezt 2 gabalos tā, lai varētu salikt vienu kvadrātu ar laukumu 5 cm^2?
3. Taisnstūris sastāv no 3x7 rūtiņām. Vai šaha zirdziņš var apstaigāt visas rūtiņas, katru vienu reizi, sākot kustību vidējā rūtiņā un beidzot to kādā no stūriem?
4. Jānītis nopirka vairākas rotaļlietas. Katra no tām maksāja veselu skaitu latu un 99 santīmus. Kopā Jānītis samaksāja Ls 26,76. Cik rotaļlietu Jānītis nopirka?
5. Sniegbaltīte izcepa 20 kūkas, kas svēra 21g, 22g, ..., 40g. Katrs no septiņiem rūķīšiem vēlas apēst vismaz 80 gramus saldumu. Vai to var izdarīt, nedalot kūkas gabalos?
6. Vai kādā gadā var nebūt nevienas piektdienas 13. datumā?

B grupa

1. Atrisināt A grupas 1. uzdevumu, ja Cipariņam ir 3 riepas.
2. Pēterītim ir 3 vienādi ķieģeļi un mērlenta. Kā uzzināt ķieģeļa diagonāles garumu, veicot tikai vienu mērījumu un neizdarot nekādus aprēķinus?
3. Taisnstūris A sastāv no 6x10 rūtiņām; katrā dzīvoja tieši viens rūķītis. Kādu dienu tie visi pārcēlās uz taisnstūri B, kas sastāv no 5x12 rūtiņām, pie tam atkal katrā rūtiņā apmetās tieši viens rūķītis. Vai var gadīties, ka katri divi rūķīši, kas dzīvoja A rūtiņās ar kopēju malu, ir pārcēlušies uz B rūtiņām ar kopēju malu?
4. Atrast lielāko naturālo skaitli ar īpašību: tas pats ir pirmskaitlis, visi tā cipari ir pirmskaitļi un jebkuri pēc kārtas ņemti tā cipari (vienalga kādā skaitā) arī veido pirmskaitli.
5. Turnīrā piedalījās 8 komandas. Katra ar katru spēlēja vienu reizi. Par uzvaru komanda iegūst 3 punktus, par neizšķirtu – 1 punktu, par zaudējumu - 0 punktus. “Murmulīši” kopā ieguva mazāk punktu nekā jebkura cita komanda. Kāds varēja būt lielākais “Murmulīšu” iegūto punktu skaits?
6. Kvadrāts sastāv no 5x5 rūtiņām. Vai dažas rūtiņas var nokrāsot melnas tā, lai visos 9 rūtiņu kvadrātos būtu dažāds melno rūtiņu skaits?

2.nodarbība

A grupa

1. Pa apli uzrakstīti n skaitļi. Daži no tiem ir “+1”, bet pārējie “-1”. Sareizinot katrus divus blakus esošus skaitļus un iegūtos reizinājumus saskaitot, summā iegūst 0. Vai var būt, ka a) n=8, b) n=7?
2. Vai kvadrātā, kura malas garums ir 1 cm, var ievilkt vairākus riņķus bez kopīgiem punktiem tā, lai to rādiusu summa būtu 2002?
3. Vai skaitli 200...02 (2002 nulles) var iegūt, saskaitot triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu un citu triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājumu?
4. Apskatām veselus pozitīvus skaitļus no 1 līdz 8. Kādu rezultātu iegūst, ja saskaita visus šos skaitļus un visus to reizinājumus pa 2, pa 3,..., pa 7?
5. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis vai 0. Zināms, ka katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 10. Kāda var būt mazākā visu 25 ierakstīto skaitļu summa?
6. Dots 11^0 liels leņķis. Kā ar cirkuli un lineālu sadalīt to 11 vienādās daļās?

B grupa

1. Skat. A grupas 1. uzdevumu, kurā jāpierāda, ka n noteikti dalās ar 4.
2. Naturāls skaitlis a dalās ar 15, bet nedalās ar 27. Vai tam var būt tieši 101 dalītājs? (Apskatām tikai pozitīvus dalītājus, ieskaitot 1 un a.)
3. Dotas 11 lādes. Tajās atrodas kaut kāds daudzums monētu. Ar vienu gājienu var izvēlēties jebkuras 3 lādes un pievienot tām pa vienai monētai. Vai noteikti var panākt, lai visās lādēs monētu skaits kļūtu vienāds?
4. Tenisa turnīrā piedalās 6 spēlētāji. Katrs spēlē ar katru vienu reizi (neizšķirtu nav). Pierādīt, ka pēc turnīra beigām var atrast 2 tādus spēlētājus A un B, ka katrs no pārējiem zaudējis vai nu pret A, vai pret B.
5. Pa apli pēc kārtas uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2002 ieskaitot. Jānis, sākot ar 1, izsvītro pēc kārtas katru otro no vēl neizsvītrotajiem (sākumā 1 atstāj, 2 izsvītro, 3 atstāj,...), kamēr paliek tikai viens neizsvītrots skaitlis. Kurš tas ir?
6. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Viena rūtiņa no tā izgriezta. Pierādīt, ka atlikušo kvadrāta daļu var sagriezt 14 taisnstūros ar izmēriem 1×3 un divos no trim rūtiņām sastāvošos “stūrīšos”.

3.nodarbība

A grupa

1. Vai eksistē 8 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, kuriem nevienam ciparu summa nedalās ar 5? Vai eksistē 9 šādi naturāli skaitļi?
2. Pa apli stāv 100 cilvēki; viens no tiem ir Sprīdītis. Visiem kopā ir 100 latu. Katram cilvēkam ir divas reizes mazāk naudas nekā viņa kaimiņam pa labi un pretī stāvošajam cilvēkam kopā. Cik naudas ir Sprīdītim?
3. Pierādiet: katru daudzstūri var sagriezt tādos četrstūros, kam ir simetrijas ass.
4. Vai eksistē tādi veseli skaitļi, kuru summa ir 1201, bet kubu summa ir a) 1999, b) 2000, c) 2002?
5. No stieples izveidots kuba karkass. Pa to rāpo skudra, kas savu kustības virzienu maina tikai virsotnēs. Vai var gadīties, ka skudra 7 kuba virsotnēs nonāk pa 10 reizēm katrā, bet viena virsotnē – 12 reizes?
6. Sastādiet paši savu oriģinālu uzdevumu ar jaunā, 2003. gada tematiku, un atsūtiet mums to!

B grupa

1. Rindā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 2002 ieskaitot. Kādu lielāko daudzumu no tiem var pasvītrot tā, lai katriem diviem pasvītrotajiem skaitļiem būtu kopīgs dalītājs, kas lielāks par 1?
2. Dotas 5 pēc ārējā izskata vienādas monētas; to masas visas ir dažādas. Kā ar 7 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem sakārtot tās masu pieaugšanas secībā?
3. Kādiem trijstūriem bisektrišu viduspunkti atrodas uz vienas taisnes?
4. Ar vienu gājienu atļauts šaha galdiņā izvēlēties jebkuru taisnstūri, kas sastāv no veselām rūtiņām, un pārkrāsot tā iekšpusē esošās rūtiņas pretēji (melnas – par baltām, baltas – par melnām). Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visas rūtiņas būtu vienā krāsā?
5. Konferencē satikās 10 valstu vadītāji. Pierādīt: vai nu starp tiem ir 3 tādi, kas visi pa pāriem savā starpā draudzējas, vai arī 4 tādi, no kuriem nekādi divi nedraudzējas savā starpā.
6. Skat. A grupas 6. uzdevumu.

4.nodarbība

A grupa.

1. Uz kādas planētas lieto 2003 valodas. Kāds ir mazākais vārdnīcu skaits, ar kuru palīdzību no katras valodas var tulkot uz katru citu?
(Pieļaujamas vairākkārtējas tulkošanas; katra vārdnīca ļauj tulkot tikai vienā virzienā).

2. Dots, ka *a, b* un *c* - naturāli skaitļi. Pierādiet, ka $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ nav pirmskaitlis.

3. Kvadrāta ABCD iekšpusē atrodas punkts P. Zināms, ka trijstūru APB, BPC un CPD perimetri ir attiecīgi 99 cm, 100 cm un 101 cm. Aprēķiniet DPA perimetru.

4. Cik no 1 līdz 1000 ieskaitot ir naturālu skaitļu, kuru ciparu summa ir 3?

5. Kāds ir lielākais naturālais skaitlis n ar īpašību: naturālos skaitļus no 1 līdz n ieskaitot var sadalīt 2 grupās tā, ka nekādu divu vienas grupas skaitļu summa nav naturāla skaitļa kvadrāts?

6. Volejbola turnīrā katra komanda spēlē ar katru citu tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Turnīru nobeidzot, "Milžiem" un "Gigantiem" bija vienāds uzvaru skaits. Pierādiet, ka var atrast tādas trīs komandas A, B, C, ka A uzvarēja spēlējot pret B, B - pret C un C- pret A.

B grupa.

1. Atrisiniet A grupas pirmo uzdevumu, ja katra vārdnīca ļauj tulkot divos virzienos (piemēram, no latviešu valodas uz angļu un no angļu valodas uz latviešu).

2. Ap galdu sēž vairāki zēni un meitenes. To vietu skaits, kur blakus sēž zēns un meitene, vienāds ar blakus sēdošo pāru "zēns - zēns" un "meitene - meitene" skaitu. (Brīvu vietu pie galda nav.)
Pierādiet, ka kopējais bērnu skaits pie galda dalās ar 4. Vai zēnu un meiteņu skaitiem noteikti jābūt vienādiem?

3. Kubs sastāv no 3×3×3 vienādiem kubiņiem. Vai var katrā kubiņā ierakstīt burtu a, b vai c tā, lai katrā triju kubiņu veidotā "klucītī" ar izmēriem 1×1×3 būtu ierakstīti visi 3 burti?

4. No cik un kādiem cipariem sastāv summa $9+99+999+\ldots+\underbrace{999...9}_{2003}$, ja to pieraksta kā vienu skaitli?

5. Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi un x^4+4y^4 ir pirmskaitlis. Atrast šo pirmskaitli.

6. Taisnstūra plāksnē izzāģēti 2 vienādi apaļi caurumi. Kā atlikušo plāksnes daļu ar vienu taisnu griezienu sadalīt divās daļās ar vienādiem laukumiem?

5.nodarbība

A grupa.

1. Kādiem četrciparu naturāliem skaitļiem piemīt īpašība: reizinot tos ar 4, iegūst skaitli, kas uzrakstīts ar tiem pašiem cipariem kā x, tikai pretējā secībā?

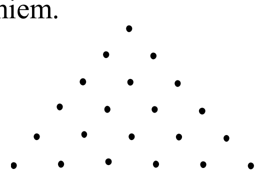
2. Sešstūra ABCDEF visas malas pieskaras vienai un tai pašai riņķa līnijai. Pierādīt, ka

$$AB + CD + EF = BC + DE + FA$$

3. Doti 8 vienādi kubiņi. Katram no tiem uz divām pretējām skaldnēm uzrakstīts 1, uz divām pretējām skaldnēm – 3 un uz divām pretējām skaldnēm – 5. No kubiņiem izveidots viens liels kubs tā, ka uz lielā kuba virsmas nekādos divos kvadrātiņos ar kopīgu malu nav uzrakstīti vienādi skaitļi. Kāda var būt visu uz lielā kuba virsmas redzamo skaitļu summa?

4. Pierādīt, ka $(a-1)^{2003} + (b-2)^{2003} + \ldots + (h-8)^{2003}$ ir pāra skaitlis, ja a, b, c, ..., h ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 8.

5. Uzzīmējiet slēgtu lauztu līniju, kuras virsotnes ir tieši 1. zīm. redzamie punkti. Dažādiem līnijas posmiem nedrīkst būt citu kopīgu punktu kā šīs virsotnes, un katra virsotne drīkst būt tikai 2 posmiem.



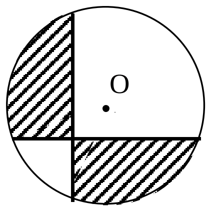
1. zīm.

6. Kādā lielākajā skaitā daļu plakni var sadalīt 2 izliektu četrstūru kontūras?

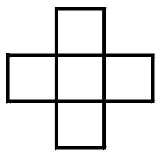
B grupa.

1. Triju naturālu skaitļu summa ir 2003. Vai skaitlis, ko iegūst, uzrakstot šos trīs skaitļus vienu otram galā, var dalīties ar 21?

2. Riņķis, kura centrs ir O, ar divām perpendikulārām hordām sadalīts 4 daļās (sk. 2. zīm.). Vai lielāka ir iesvītroto vai neiesvītroto daļu laukumu summa?



2. zīm.



3. zīm.

3. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu 3. zīm. parādīto figūru tajā jāiezīmē, lai nevienai citai tādai figūrai tur vairs nebūtu vietas?

4. Sešas monētas sver attiecīgi 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g. Uz vienas no tām uzrakstīts "1 g", uz vienas "2 g", ..., uz vienas "6 g". Kāds ir mazākais svēršanu skaits uz sviras svariem, ar kuru var noskaidrot, vai visi uzraksti ir pareizi?

5. Uzzīmējiet 8 punktus ar īpašību: katru divu punktu veidotā nogriežņa vidusperpendikuls satur tieši 2 citus no šiem 8 punktiem. Neaizmirstiet **pamatot**, ka jūsu zīmējums apmierina uzdevuma prasības.

6. Kādā lielākajā skaitā daļu plakni var sadalīt 3 izliektu četrstūru kontūras?

6.nodarbība

Šī nodarbība tika veidota mazliet savādāka nekā iepriekšējās kārtas.

Šoreiz **gan A, gan B grupas** risinātājiem tiek piedāvāts mēģināt atrisināt pašu PCK dalībnieku iesūtītos uzdevumus. (Aiz katra uzdevuma iekavās norādīts uzdevuma autors.)

1. Kāda ir 2003.gada visu datumu ciparu summa? (*Vecpiebalgas lauku reģionālās ģimnāzijas 6.kl. pulciņš*)
2. Cik ir tādu naturālu skaitļu starp 1003 un 2003, kuru ciparu summa ir 14? (*Vecpiebalgas lauku reģionālās ģimnāzijas 6.kl. pulciņš*)
3. Atrast visus naturālo skaitļu pārus, kuru kvadrātu starpība ir 203. (*Antra Blauberga, Usmas pamatskola, 8.kl.*)
4. Juris spēlējās – lika klucīšus. Pirmajā rindā vienu, otrajā rindā – 2, trešajā 3, ceturtajā 5 utt. – katrā nākamajā rindā liek tik klucīšus, cik ir iepriekšējās divās rindās kopā. Cik pilnas rindas saliks Juris no 2003 klucīšiem un cik klucīšu paliks pāri? (*Andris Mednis, Gulbīša vidusskola, 6.kl.*)
5. Rīgas ostā atrodas 4 tvaikoņi. 2003. gada 1.janvārī plkst. 0:00 visi kuģi reizē devās jūrā. Pirmais tvaikonis ostā iegriežas ik pēc 4 nedēļām, otrais – pēc 8 nedēļām, trešais – pēc 12 nedēļām, ceturtais – 16 nedēļām. Kurā datumā pirmoreiz visi četri tvaikoņi ostā atkal atradīsies kopā? (*Nataļja Semjonova, Daugavpils 10.vidusskola, 9.kl.*)
6. Lādē ir 2003 monētas. 2002 no tām ir vienādas masas, bet viena ir vieglāka par tām. Kāds ir mazākais svēršanu skaits, lai noteiktu, kura ir vieglā monēta? Svēršanas var veikt ar sviras svariem bez atsvariem. (*Jurģis Brauers, Vecpiebalgas lauku reģionālā ģimnāzija, 9.kl.*)