“Profesora Cipariņa klubs” 2003./04.m.g.

1.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Profesors Cipariņš salasīja 25 sēnes – baravikas un gailenes. Lai kuras 12 sēnes izņemtu no groza, vismaz viena no tām ir gailene. Lai kuras 15 sēnes izņemtu no groza, vismaz viena no tām ir baravika. Cik baraviku un cik gaileņu salasīja profesors Cipariņš?
2. Pierādiet, ka skaitli $1^2+2^2+3^2+...+78^2+79^2$ var izsacīt kā 75 dažādu naturālu skaitļu kvadrātu summu.
3. Apskatām 2003 naturālus skaitļus 1, 11, 111, ..., $\underbrace{111...1}_{\text{2003 vieninieki}}$. Cik daudzi no tiem dalās ar 7?
4. Kvadrāts ar malas garumu 5 sadalīts vienādās kvadrātiskās rūtiņās ar malas garumu 1. Viena rūtiņa nokrāsota melna, bet nenokrāsotā kvadrāta daļa sagriezta taisnstūros ar izmēriem 1×3. Kura rūtiņa var būt nokrāsota melna?
5. Sešstūra virsotnes sadala riņķa līniju 6 vienādos lokos. Vai šo sešstūri var sagriezt
   a) sešos, b) piecos šaurleņķu trijstūros?
6. Pāri tērcītei pārkritusi smilga. Pa smilgu no kreisā krasta uz labo attālumā 1 cm viena aiz otras dodas 3 skudras; 3 citas skudras tāpat dodas no labā krasta uz kreiso. Visu skudru ātrumi ir vienādi. Divām skudrām satiekoties, tās apgriežas un ar tādu pašu ātrumu dodas pretējos virzienos. Cik reizes skudras satiksies uz smilgas?

B grupa

1. Saskaitot naturālu skaitli *n* ar tā ciparu summu, iegūst 2003. Kādas ir iespējamās *n* vērtības?
2. Dots, ka $a^3+3ab^2=14$ un $b^3+3a^2b=13$. Aprēķināt izteiksmes a^2-b^2 vērtību.
3. Četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums nedalās ar 5. Pierādiet, ka šo skaitļu summa noteikti dalās ar 5.
4. Kongresā satikās *m* zinātnieki. Katrs no tiem draudzējas ar tieši 3 citiem (ja A draudzējas ar B, tad B draudzējas ar A). No katriem trim zinātniekiem var atrast divus, kuri savā starpā nedraudzējas. Kāda ir mazākā iespējamā *m* vērtība?
5. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis *k*, ka taisnstūrī ar izmēriem 2×*k* var ievietot 2*k*+1 apaļas monētas ar diametru 1? Monētas nedrīkst savā starpā pārklāties.
6. Atrisiniet A grupas 6.uzdevumu, ja attālumi starp skudrām ir dažādi (bet ātrumi joprojām ir vienādi).

2.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Piecām vāverēm kopā ir 64 rieksti. Vienai no viņām ir 15 rieksti, citām – mazāk. Nekādām divām vāverēm nav vienāds riekstu skaits. Cik riekstu ir citām vāverēm?
2. Cik ir tādu piecciparu naturālu skaitļu, kuriem pirmais cipars vienāds ar piekto, bet otrais – ar ceturto?
3. Vai var katrai no 5 papīra lapām katrā pusē uzrakstīt pa vienam skaitlim tā, lai izpildītos sekojošais: katram veselam nenegatīvam n, kur $n \leq 31$, iespējams lapas novietot uz galda tā, lai uz augšu esošo skaitļu summa būtu n?
4. Trijstūris sadalīts divos vienādos trijstūros. Pierādīt, ka tie abi ir taisnleņķa.
5. Vai var ievietot izteiksmē
$$2:2-3:3-4:4-5:5$$
iekavas tā, lai izteiksmes vērtība būtu lielāka par 50?
6. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 64 (visi skaitļi dažādi), pie tam katri divi skaitļi, kuri atšķiras viens no otra par 1, ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu.
Parādiet, ka skaitļus var ierakstīt tā, lai vienā diagonālē to summa būtu 88.

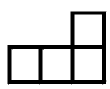
B grupa

1. Plaknē novilktas 10 taisnes. Kāds lielākais kvadrātu daudzums var izveidoties?
2. Naturāli skaitļi no 1 līdz 200 kaut kādā secībā izrakstīti rindā, katrs vienu reizi. Katriem trim pēc kārtas izrakstītiem skaitļiem atrodam to summu. Kāds lielākais daudzums šo summu var būt nepāra skaitļi?
3. Dotas 3 baltas, 3 zaļas, 3 dzeltenas un 3 sarkanas kartītes. Vai var uz katras kartītes uzrakstīt pa skaitlim, lai izpildītos sekojošais: katram veselam nenegatīvam n, kur $n \leq 80$, var atrast 4 dažādu krāsu kartītes, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir n?
4. Punkts D atrodas trijstūra ABC iekšpusē. Kur jāizvēlas punkts P, lai summa PA+PB+PC+PD būtu mazākā iespējamā?
5. Dots, ka a, b, c, d – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka
$$1 < \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < 2$$
6. Pierādīt: ierakstot skaitļus saskaņā ar A6 uzdevuma nosacījumiem, diagonālē ierakstīto skaitļu summa nevar būt mazāka par 88.

3.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Pa apli kaut kādā kārtībā stāv 2003 zēni un 2003 meitenes. Pierādīt, ka vismaz vienam bērnam abās pusēs blakus stāv meitenes.
2. Vai eksistē tāds deviņciparu naturāls skaitlis, kas satur vismaz vienu ciparu 1, vismaz vienu ciparu 5 un vismaz vienu ciparu 7 un kam piemīt īpašība:
   a) izsvītrojot visus ciparus 1, iegūtais skaitlis dalās ar 75,
   b) izsvītrojot visus ciparus 5, iegūtais skaitlis dalās ar 71,
   c) izsvītrojot visus ciparus 7, iegūtais skaitlis dalās ar 15?
3. a) Dots, ka $x^3+y^3>0$. Vai noteikti $x+y>0$?
   b) Dots, ka $a^3+b^3+c^3>0$. Vai noteikti $a+b+c>0$?
4. Katram skolēnam klasē ir vismaz viens draugs (draudzene). Pierādīt, ka skolēni var sadalīties divās komandās tā, ka katram skolēnam otrā komandā būs vismaz viens draugs (draudzene).
5. Vienpadsmit daļu skaitītājos un saucējos pa reizei izmantoti visi naturāli skaitļi no 1 līdz 22 ieskaitot. Kāds lielākais daudzums šo daļu var būt veseli skaitļi?
6. Vai kvadrātu, kas sastāv no a) 12×12 rūtiņām, b) 10×10 rūtiņām, var sagriezt tādās figūrās, kāda parādīta 1.zīmējumā?



1.zīmējums

B grupa

1. Skolā ir gan zēni, gan meitenes. Trešdaļai visu zēnu un sestdaļai visu meiteņu ir zilas acis. Vai var būt, ka zilas acis ir vismaz pusei visu skolēnu?
2. Četrciparu naturālu skaitli A pareizināja ar tā ciparu summu un ieguva četrciparu skaitli B. Pēc tam B pareizināja ar tā ciparu summu un ieguva četrciparu skaitli C. Noskaidrojiet iespējamās A vērtības.
3. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Dažas rūtiņas ir melnas. Visās rindiņās ir atšķirīgi melno rūtiņu daudzumi, un arī visās kolonnās ir atšķirīgi melno rūtiņu daudzumi. Cik melno rūtiņu var būt kvadrātā?
4. Vai var atzīmēt plaknē 9 punktus tā, lai vismaz 18 attālumi starp diviem no tiem būtu savā starpā vienādi?
5. Uz riņķa līnijas ar sarkanu krāsu atzīmēti 37 punkti; citu sarkanu punktu nav. Uzzīmēti 4 trijstūri ar sarkanām virsotnēm; nekādiem diviem trijstūriem nav kopīgu punktu (ne sarkanu, ne citādu). Pierādīt, ka var uzzīmēt vēl vienu trijstūri ar sarkanām virsotnēm atzīmētajos punktos, kuram nav kopīgu punktu ne ar vienu no jau uzzīmētajiem.
6. Andris iedomājies divciparu naturālu skaitli. Juris viņam var uzdot jautājumu formā “Vai Tavs skaitlis ir x?” Ja x vai nu sakrīt ar Andra iedomāto skaitli, vai arī atšķiras no tā tikai vienā ciparā, pie tam tikai par 1, tad Andris atbild “silts”; pretējā gadījumā Andris atbild “auksts”. Vai Juris var uzzināt Andra iedomāto skaitli, uzdodot a) 23 jautājumus, b) 18 jautājumus?

4.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Kurbads ar katru vāles sitienu sašķeļ vienu akmeni divās daļās. Cik sākumā bija akmeņu, ja pēc 17 sitieniem bija 31?
2. Vai var kubu bez slīdēšanas ripināt pa galda virsmu tā, lai tas, tieši vienu reizi pārvēlies katrai savai šķautnei, atgrieztos sākotnējā vietā?
3. Kvadrāts sastāv no 3×3 vienādām kvadrātiskām rūtiņām; katrā rūtiņā ierakstīts pa skaitlim. Kvadrātu sauc par maģisku, ja visās rindiņās, visās kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas ir savā starpā vienādas.

   a) Vai eksistē maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9?

   b) Vai eksistē maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti naturālie skaitļi 1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;10?
4. Vai kvadrātu var sagriezt trijstūros tā, lai katram trijstūrim būtu kopīga malas daļa – nogrieznis ar tieši trim citiem?
5. Kvadrāts sastāv no 1001×1001 rūtiņas; katras rūtiņas malas garums ir 1. Vai kvadrātu var sagriezt 2004 taisnstūros tā, lai visu taisnstūru diagonāļu garumi būtu vienādi savā starpā? Griezumus drīkst izdarīt tikai pa rūtiņu līnijām.
6. Andris apgalvo, ka var pasacīt, cik gadu ir jebkuram sarunu biedram, ja tas paziņos, kādus atlikumus dod meklējamais gadu skaits, dalot ar 2, ar 3 un ar 5. Kā Andris to var izdarīt?

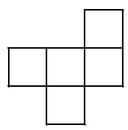
B grupa

1. Kādu ciparu var apzīmēt katrs burts, ja vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus un skaitlis $aabbbcdddd$ ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts?
2. Sienā iedzītas divas naglas. Uz tām jāuzkarina virves cilpa tā, lai, izvelkot **jebkuru** no abām naglām (otru neaiztiekot), cilpa nokristu. Vai to var izdarīt?
3. Pierādīt: maģiskā kvadrātā (skat. A3.uzdevumu) kreisās kolonnas skaitļu kvadrātu summa vienāda ar labējās kolonnas skaitļu kvadrātu summu.
4. Trijstūra iekšpusē ņemts punkts, kas ar taisnes nogriezni savienots ar visām virsotnēm un visu malu viduspunktiem. Apzīmēsim garāko nogriezni ar a, īsāko – ar b. Pierādīt, ka $a \geq 2b$.
5. Doti sviras svari bez atsvariem un 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka dažas monētas sver x gramus, dažas – y gramus un $x<y$. Kā ar 4 svēršanām noskaidrot, kuras monētas sver x gramus un kuras – y gramus?
6. Rindā izrakstīti 5 naturāli skaitļi. Ar vienu gājienu no diviem blakus esošiem skaitļiem var atņemt pa vieniniekam. Ir zināms, ka, atkārtojot šādus gājienus, var iegūt rindu 1,0,0,0,0, bet var iegūt arī rindu 0,0,0,0,1. Pierādīt, ka var iegūt arī rindu 0,0,1,0,0.

5.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Vāverīte noguldīja meža bankā kaut kādu daudzumu riekstu uz 3 gadiem. Katru gadu viņas riekstu skaits bankā saskaņā ar līgumu pieauga **precīzi** par 4 % (tātad par veselu skaitu riekstu). Tomēr pēc trim gadiem vāverītes riekstu skaits nebija sasniedzis 20000 vienības. Cik riekstu bija vāverītei sākumā?
2. Katrā kuba virsotnē ierakstīts naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 8 (visi ierakstītie skaitļi ir dažādi). Katrai šķautnei aprēķinām tās galos ierakstīto skaitļu starpību (no lielākā skaitļa atņemot mazāko). Cik daudzas dažādas starpības var iegūt? Uzrādiet visas iespējas un pierādiet, ka citu bez uzrādītajām nav.
3. Vai ar tādām figūrām, kāda parādīta 1.zīm. (tā sastāv no 5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām), var pārklāt visu plakni bez caurumiem un figūru savstarpējās pārklāšanās?



1. zīm.

4. Naturālu skaitli sauc par palindromu, ja tā decimālais pieraksts ir simetrisks. Piemēram, palindromi ir 22; 101; 4664 utt.
   Kāds ir lielākais iespējamais daudzums pēc kārtas sekojošu naturālu trīsciparu skaitļu, no kuriem neviens nav palindroms?
5. Kvadrāts sastāv no 2004×2004 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tā "augšupejošās" diagonāles aizpildītas ar cipariem 1; 2; 3; 4 šādā secībā: 1. diagonāle (stūra rūtiņa) – ar 1.; 2.diagonāle – ar 2, 3.diagonāle – ar 3, 4.diagonāle ar 4, 5.diagonāle – ar 1, 6.diagonāle – ar 2 utt. (skat. 2.zīm.). Kurš cipars kvadrātā sastopams visvairāk reižu?

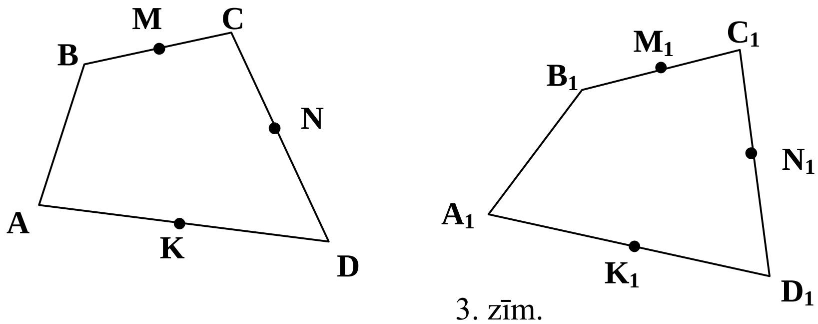
1	2	3	4	1	2	3	4	1	
2	3	4	1	2	3	4	1		
3	4	1	2	3	4	1			
4	1	2	3	4	1				
1	2	3	4	1					
2	3	4	1						
3	4	1							
4	1								
1									

2. zīm.

6. Dotas divas auklas. Zināms, ka, aizdedzinot no viena gala, katra aukla degs tieši 1 stundu, bet degšanas process var būt ļoti nevienmērīgs. Kā, izmantojot šīs auklas, izmērīt 45 minūšu garu laika intervālu?

B grupa

1. Naturāli skaitļi no 1 līdz 12 ieskaitot sadalīti divās daļās. Izrādījās, ka vienas daļas skaitļu reizinājums dalās ar otras daļas skaitļu reizinājumu. Kāda ir mazākā iespējamā dalījuma vērtība?
2. Ja n - naturāls skaitlis, tad ar n! saprotam visu naturālo skaitļu no 1 līdz n ieskaitot reizinājumu. Piemēram, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$; $1! = 1$. Pierādīt, ka katram naturālam n pastāv vienādība $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
3. Par četrstūriem ABCD un $A_1B_1C_1D_1$ zināms, ka tie abi ir izliekti un $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$ un $DA = D_1A_1$. Punkti M, N, K, M_1, N_1, K_1 ir atbilstošo malu viduspunkti (skat. 3.zīm.).



3. zīm.

   Vai var būt, ka $\angle MNK$ ir šaurs, bet $\angle M_1N_1K_1$ ir plats?
4. Dotas 8 monētas. Sešas no tām ir ar vienādām masām, viena – smagāka, bet viena – vieglāka. Vieglākās un smagākās monētas masa kopā vienāda ar divu "parasto" monētu masu.

   Vai ar 5 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast gan vieglāko, gan smagāko monētu?
5. Dots, ka $x>y>z$. Pierādīt, ka $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) > 0$.
6. Katram no diviem vienādiem regulāriem n-stūriem virsotnes kaut kādā kārtībā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz n (katrā n-stūrī visi numuri ir dažādi).

   Noskaidrojiet, vai noteikti katrā n-stūrī var izvēlēties 3 virsotnes tā, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas īpašības:
   - abos n-stūros izvēlētas virsotnes ar vieniem un tiem pašiem numuriem,
   - pirmajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris un otrajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris abi ir viena tipa: vai nu abi ir šaurleņķu, vai abi taisnleņķa, vai abi platleņķa.

6.nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Dots, ka a, b un c ir naturāli skaitļi, bet a + b, a + c un b + c ir pirmskaitļi. Cik no skaitļiem a, b, c, a + b, a + c, b + c var būt dažādi?
2. Skaitļus no 1 līdz 9 jāieraksta 3×3 rūtiņu kvadrātā pa vienam katrā rūtiņā tā, lai visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas visas būtu dažādas. Vai to var izdarīt?
3. Cik dažādu diagonāļu krustpunktu var būt piecstūrim?
4. Uz katras kuba skaldnes uzrakstīts pa skaitlim; tie visi ir dažādi. Katrai kuba šķautnei aprēķinām to skaitļu starpību, kas atrodas tai abās pusēs (no lielākā skaitļa atņemam mazāko). Pierādīt, ka iegūtās starpības var sadalīt divās grupās pa sešām tā, ka abu grupu summas vienādas savā starpā.
5. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Vai var 16 rūtiņu centrus nokrāsot baltus un 16 – melnus tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē būtu vienāds skaits melno un balto centru? (Apskatām tikai divas "garās" diagonāles.)
6. Skaitli sauc par simetrisku, ja tā pieraksts nemainās, izlasot to no otra gala. Piemēram, simetriski ir skaitļi 131; 88; 4 utt. Uz papīra lentas rindā uzrakstīti 250 cipari, no kuriem neviens nav 0. Pierādīt: lentu var sagriezt ne vairāk kā 100 gabalos tā, lai uz katra gabala būtu uzrakstīts simetrisks skaitlis.

B grupa

1. Vai divu naturālu skaitļu mazākais kopējais dalāmais var būt vienāds ar to summu?
2. Naturāls skaitlis dalās ar 99999. Pierādīt, ka vismaz 5 tā cipari nav nulles.
3. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 25 (katrā rūtiņā – cits skaitlis). Ja divu skaitļu starpība ir 1, tad tie ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu.
   Kāds lielākais pirmskaitļu daudzums var atrasties vienā rindā?
4. Regulārs 99-stūris sadalīts trijstūros, novelkot diagonāles, kas savā starpā nekrustojas. Pierādīt, ka starp šiem trijstūriem ir vismaz a) 2, b) 3 vienādsānu.
5. Plaknē novilktas 30 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. Pierādīt, ka no apgabaliem, kuros taisnes sadala plakni, vismaz a) 10, b) 20 ir trijstūri.
   (Piezīme: mēs apskatām tikai apgabalus, kas paši nesastāv no sīkākām daļām.)
6. Uz galda atrodas 100 konfektes. Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus. Ar vienu gājienu drīkst apēst 1, 2, 3, 4 vai 5 konfektes, bet nedrīkst ēst tik konfekšu, cik ar savu iepriekšējo gājienu apēdis pretinieks. Uzvar tas, kas apēd pēdējo konfekti. Kas uzvar, pareizi spēlējot – pirmais vai otrais spēlētājs?