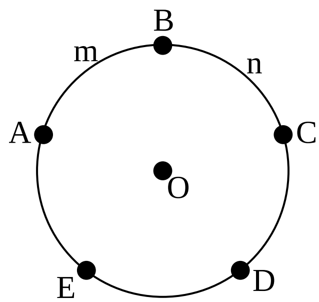
"Profesora Cipariņa klubs" 2005./06. m.g.

1. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Viegli pārbaudīt, ka $22 \cdot 23 \cdot 24=12144$. Tātad meklējamie skaitļi **var būt** 22; 23; 24. Pierādīsim, ka tie nevar būt citādi. Tiešām, izvēloties mazākus pēc kārtas ņemtus skaitļus, to reizinājums būs mazāks par 12144, bet, izvēloties lielākus pēc kārtas ņemtus reizinātājus (naturālus skaitļus), to reizinājums būs lielāks par 12144. Tātad reizinājums 12144 iegūstams tikai vienā gadījumā.

2. Jā, var. Uzzīmēsim riņķa līniju, atzīmēsim 5 punktus, kas to dala 5 vienādās daļās, un atzīmēsim arī centru (skat. 1. zīm.). Pierādīsim, ka šī 6 punktu sistēma apmierina uzdevuma nosacījumus.



1. zīm.

Trīs punktus no atzīmētajiem sešiem var izvēlēties 3 būtiski dažādos veidos.

1. Viens no izvēlētajiem punktiem ir O. Tad abi pārējie atrodas no tā vienādos attālumos (jo visi riņķa līnijas punkti atrodas vienādos attālumos no tās centra saskaņā ar riņķa līnijas definīciju).

2. Visi trīs izvēlētie punkti atrodas uz riņķa līnijas cits aiz cita (piemēram, A; B; C). Tad vidējais no tiem ir vienādos attālumos no abiem pārējiem (piemēram, BA=BC), jo vienādiem riņķa līnijas lokiem (mūsu gadījumā lokiem AmB un BnC) atbilst vienādas hordas.

3. Visi trīs izvēlētie punkti atrodas uz riņķa līnijas, bet ne pēc kārtas (piemēram, A; B; D). Tad tie divi punkti, kas ir blakus, atrodas vienādos attālumos no trešā (piemēram, AD=BD), jo vienādiem riņķa līnijas lokiem (mūsu gadījumā lokiem AED un BCD) atbilst vienādas hordas.

Visi gadījumi apskatīti, uzdevums atrisināts.

3. Apzīmēsim skaitļus uzrakstīšanas secībā ar a; b; c; d; e; f; g. Atradīsim tādu skaitli x, ka $b=a+x$. Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $c=b+x=(a+x)+x=a+2x$; $d=c+x=(a+2x)+x=a+3x$; $e=a+4x$; $f=a+5x$; $g=a+6x$. Saskaņā ar doto arī $a+c+e+g=b+d+e$, tātad

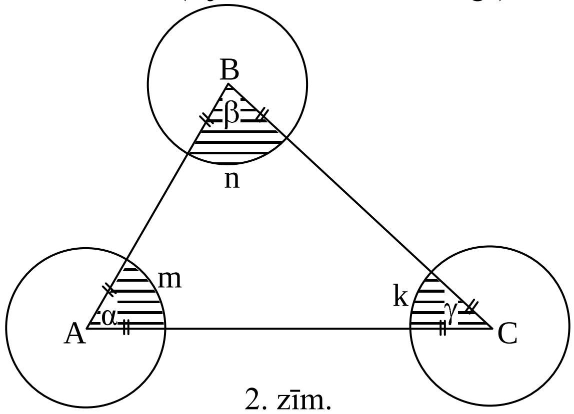
$$a+(a+2x)+(a+4x)+(a+6x)=(a+x)+(a+3x)+(a+5x)$$
$$4a+12x=3a+9x$$

No kurienes seko $\boldsymbol{a+3x=0}$. Tāpēc

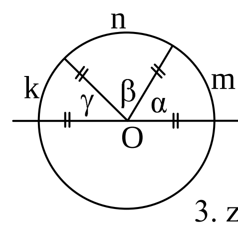
$a+b+c+d+e+f+g=$
$=a+(a+x)+(a+2x)+(a+3x)+(a+4x)+(a+5x)+(a+6x)=7a+21x=7(a+3x)=7\cdot 0=0$,

Ko arī vajadzēja aprēķināt.

4. Aplūkosim 2. zīm. (tajā nav ievērots mērogs).



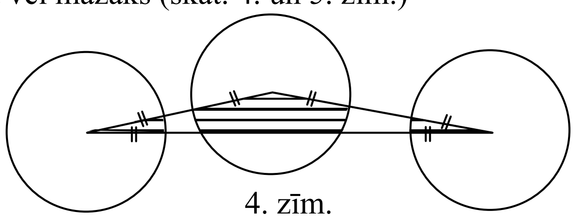
2. zīm.



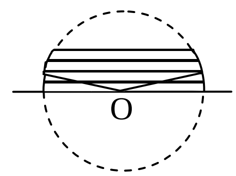
3. zīm.

Atcerēsimies, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180º. Tā kā visu riņķu laukumi ir vienādi, tad arī to rādiusi ir vienādi. Tāpēc, saliekot iesvītrotos sektorus vienu otram blakus ar kopīgu virsotni O, iegūsim pusriņķi (skat. 3. zīm.). Tā kā pilna riņķa laukums ir 1 cm^2, tad šī pusriņķa laukums ir **½ cm^2**.

Ja riņķi daļēji iziet ārpus trijstūra robežām, tad trijstūra iekrāsotās daļas laukums būtu vēl mazāks (skat. 4. un 5. zīm.)



4. zīm.



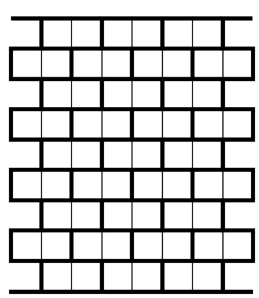
5. zīm.

Piezīme. Skaidrs, ka trim melnajiem riņķiem nav kopīgu punktu. Tomēr, pat ja tādi būtu, trijstūra nokrāsotās daļas laukums no tā tikai samazinātos.

5. Atbilde: ja abi pretinieki spēlē pareizi, tad neviens nevar uzvarēt.

Parādīsim, kā otrais spēlētājs var panākt, lai pirmais neuzvarētu.

Otrais spēlētājs domās sadala visu lapu „ķieģelīšos" tā, kā parādīts 6. zīm. (pie lapas malas daži ķieģelīši varbūt ir nepilni). Ja pirmais spēlētājs nokrāso baltu kādu rūtiņu x, tad otrais spēlētājs ar savu atbildes gājienu nokrāso sarkanu to rūtiņu y, kura kopā ar x veido vienu ķieģelīti.



6. zīm.

Skaidrs, ka katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā viens ķieģelītis ietilpst pilnībā. Tāpēc otrais spēlētājs ar šādu stratēģiju panāk, ka katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā ir vismaz viena sarkana rūtiņa. Tātad pirmais spēlētājs uzvarēt nevar.

Tā kā pirmais spēlētājs var lietot līdzīgu stratēģiju, tad uzvarēt nevar arī otrais spēlētājs. (Pirmā spēlētāja stratēģija: viņš iedomājas lapas sadalījumu ķieģelīšos. Pirmo rūtiņu viņš nokrāso baltu vienalga kurā vietā. Ja otrais spēlētājs ar savu kārtējo gājienu krāso sarkanu rūtiņu „jaunā” ķieģelīti, tad pirmais spēlētājs ar nākošo gājienu krāso baltu rūtiņu v, kura kopā ar u veido ķieģelīti; ja otrais spēlētājs krāso rūtiņu ķieģelītī, kurā viena rūtiņa jau nokrāsota (tad tā noteikti ir balta), tad pirmais spēlētājs ar nākošo gājienu krāso baltu rūtiņu vienalga kurā jaunā ķieģelītī.)

6. Atbilde: jā, var.

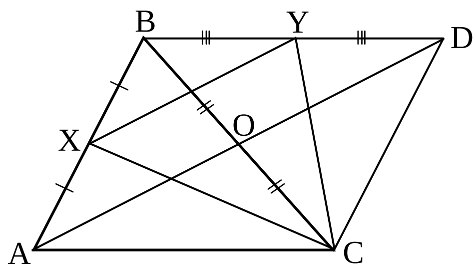
Risinājums. Uz kausa A uzliksim 10 monētas no pirmā maisa. Uz kausa B liksim 1 monētu no otrā maisa, 2 monētas no trešā maisa, 3 monētas no ceturtā maisa un 4 monētas no piektā maisa; ievērosim, ka 1+2+3+4=10.
Atzīmēsim visas iespējas.
Ja vieglākās monētas ir 1.maisā, tad kauss A ir vieglāks nekā kauss B.
Ja vieglākās monētas ir 2.maisā, tad kauss A ir par 1 g smagāks nekā B.
Ja vieglākās monētas ir 3.maisā, tad kauss A ir par 2 g smagāks nekā B.
Ja vieglākās monētas ir 4.maisā, tad kauss A ir par 3 g smagāks nekā B.
Ja vieglākās monētas ir 5.maisā, tad kauss A ir par 4 g smagāks nekā B.
Atkarībā no tā, kuru no minētajiem rezultātiem novērojam, secinām ,kurā maisā ir vieglākās monētas.

B grupa

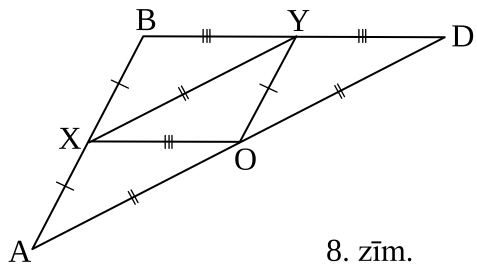
1. Ja visi pirmskaitļi *a, b, c* būtu nepāra, tad nevarētu būt $a+b+c=38$. Tāpēc **vismaz viens** no tiem ir 2.
Skaidrs, ka nevar būt $a=b=c=2$ vai $a=b=2$ ($b=c=2$, $a=c=2$). Tāpēc **tieši viens** no skaitļiem *a, b, c* ir 2. Pieņemsim, ka $a=2$. Tad iegūstam $\boldsymbol{b+c=36}$ un $2(b+c)+bc=395$, no kurienes $\boldsymbol{bc=323}$. No abām izceltajām vienādībām dažādos veidos (skat. tālāk) iegūstam, ka vai nu $b=17$, $c=19$, vai arī $b=19$, $c=17$. Tā kā 17 un 19 ir pirmskaitļi (par to noteikti jāpārliecinās), tad iegūtā atbilde 2; 17; 19 der. Gadījumus, kad $b=2$ vai $c=2$ apskata līdzīgi.
Parādīsim dažādus paņēmienus, kā no $b+c=36$ un $bc=323$ varēja atrast *b* un *c* vērtības.
1. sadalot 323 pirmskaitļu reizinājumā, iegūstam $323=17\cdot19$. Tāpēc vienīgās iespējas ir abas augšminētās.
2. \sadalot 36 divu pirmskaitļu summā, iegūstam iespējas 5+31; 7+29; 13+23; 17+19. Tikai pēdējā gadījumā abu saskaitāmo reizinājums ir 323.
Abos šādos risinājumos pārbaude, vai 17 un 19 ir pirmskaitļi, vairs nav nepieciešama, jo šīs *b* un *c* vērtības jau **tika atrastas** kā pirmskaitļi.
3. Izsakot $b=36-c$ un ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstam $c(36-c)=323$, $c^2-36c+323=0$, $c=18\mp\sqrt{18^2-323}=18\mp\sqrt{1}$, $c_1=17$, $c_2 19$; atbilstoši $b_1=36-17=19$, $b_2=36-19=17$.
Šajā risinājumā **jāpārbauda**, vai iegūtās vērtības ir pirmskaitļi, jo tās tika atrastas, par šo faktu nerūpējoties.
Tātad meklējamie pirmskaitļi ir 2; 17; 19.

2. Pieņemsim, ka ABC ir trijstūris, par kuru runā uzdevumā. Papildināsim to līdz paralelogramam ABDC.
Apzīmēsim ΔABC mediānu garumus no virsotnēm A, B, C attiecīgi ar m_a, m_b, m_c. Paralelograma diagonāles krustojoties dalās uz pusēm; tāpēc, ja šo diagonāļu krustpunktu apzīmē ar O, tad $AO=m_a$ un $AD=2\cdot AO=2m_a$. Ja X un Y ir attiecīgi malu

AB un BD viduspunkti, tad XY ir ΔABD viduslīnija; tāpēc $XY = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 2m_a = m_a$. Labi zināms, ka $\Delta ABC=\Delta DCB$ (to viegli pierādīt pēc pazīmes *mmm* vai *mlm*, vai *lml*). Vienādos trijstūros **visi** atbilstošie elementi ir vienādi, tāpēc $CY=m_b$. Redzam, ka trijstūrī CXY malu garumi $XY=m_a$, $YC=m_b$, $CX=m_c$; tātad ΔCXY malu garumi ir 3; 4; 5. Tā kā $3^2+4^2=5^2$, tad ΔCXY ir taisnleņķa un tā katetes ir 3 un 4; tāpēc tā laukums ir $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6\ (cm^2)$.



7. zīm.



8. zīm.

Ja F – kaut kāda figūra, tad turpmākajā risinājuma gaitā L(F) apzīmēs figūras F laukumu. Mēs tagad atradīsim sakarību starp L(XYC) un L(ABDC) **patvaļīgam** paralelogramam, ne tikai tādam, kuram CY, CX un XY ir ar skaitliskajām vērtībām 3; 4; 5.

Ievērosim, ka

$$L(ACX) = \frac{1}{2}AX \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB)\right) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB \cdot h\right) = \frac{1}{2}L(ABC) = \frac{1}{4}L(ABCD);$$

šeit h – augstums, kas ΔACB (un arī ΔACX) no virsotnes C vilkts pret malu AB (un arī AX). Līdzīgi iegūstam $L(DCY) = \frac{1}{4}L(ABCD)$. Tā kā O ir AD viduspunkts, tad (8.zīm.) OY un OX arī, tāpat kā XY, ir ΔABD viduslīnijas; tāpēc OY=AX=XB, OX=BY=YD un XY=AO=OD. Tātad visi trijstūri AXO, XBY, YOX, OYD ir vienādi savā starpā pēc pazīmes *mmm*. Tāpēc to visu laukumi ir $\frac{1}{4}L(ABD) = \frac{1}{8}L(ABDC)$.

Ņemot to visu vērā,

$$L(CXY) = L(ABDC) - L(ACX) - L(DCY) - L(BXY) =$$

$$= \frac{3}{8}L(ABDC) = \frac{3}{8} \cdot 2L(ABC) = \frac{3}{4}L(ABC)$$

Tā kā $L(CXY)=6\ cm^2$, tad no šejienes seko, ka $L(ABC) = 6\ cm^2 \cdot \frac{4}{3} = 8\ cm^2$.

3. No vienādības $xy+z=xz+y$ pakāpeniski iegūstam

$$xy-xz=y-z$$
$$x(y-z)=y-z$$

$y=z$

Tad skaidrs, ka

$(x-y)(x-z)(y-z)=(x-y)(x-z)\cdot 0=0$

$x=1$

Tad dotās vienādības pārvēršas par

$y+z=z+y=yz+1$

Pakāpeniski iegūstam

$z+y=yz+1$

$yz-z-y+1=0$

$(y-1)(z-1)=0$

$y=1$

Tad $(x-y)(x-z)(y-z)=$
$0\cdot(x-z)(y-z)=0$

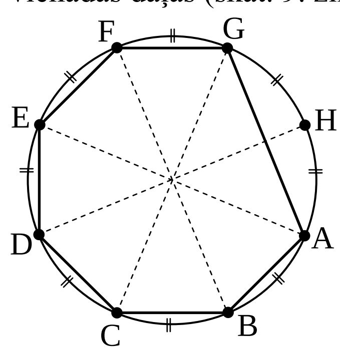
$z=1$

$(x-y)(x-z)(y-z)=$
$=(x-y)\cdot 0\cdot(y-z)=0$

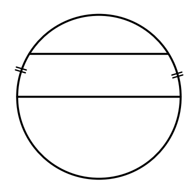
Visas iespējas aplūkotas, uzdevums atrisināts.

4. Atbilde: jā, eksistē.

Aplūkosim izliektu septiņstūri, kura virsotnes ir 7 no astoņiem punktiem, kas dala riņķa līniju astoņās vienādās daļās (skat. 9. zīm.).



9. zīm.


10. zīm.

Sekojošā tabulā redzams, ka uzdevums prasības izpildītas.

Savstarpēji paralēlas diagonāles	Tām perpendikulāras savstarpēji paralēlas diagonāles
AE, BD	FD, GC
AD	BG, FC
GE, AC	FB, EC
GD	FA, EB

Viegli redzēt, ka katra diagonāle sastopama šajā tabulā.

Par tabulas pareizību pārliecināmies, pamatojoties uz sekojošiem labi pazīstamiem ģeometrijas faktiem:

(1) Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru, ir taisns

(2) Ja loku MN un KL lielumi ir vienādi, tad NK||ML (skat. 10. zīm.)

Parādīsim ar piemēru, kā tas tiek darīts.

Saskaņā ar (2) GD||FE. Saskaņā ar (1) FE⊥EB. Tāpēc GD⊥EB.

Lasītājs pats var pārbaudīt visas citas norādītās perpendikularitātes.

Piezīme. Iespējami arī citi pamatojumi, piemēram tādi, kas izmanto faktu: ja punkti X un X_1 ir simetriski viens otram attiecībā pret taisni t, tad $XX_1 \perp t$.

5. Skaidrs, ka katrā mucā vienmēr ir **vesels skaits** litru ūdens. Ievērosim, ka 1+2+...+10=55. Ja viss ūdens tiktu saliets vienā mucā, tad pirms pēdējās liešanas katrā mucā būtu bijis $27\frac{1}{2}$; skaidrs, ka tas nav iespējams. Tātad vienā mucā nevar būt vairāk par 54 litriem. Parādīsim, kā panākt, lai vienā mucā būtu 54 litri ūdens. (Mēs pieņemam, ka katra muca ir pietiekami liela, lai uzņemtu sevī 54 litrus.)

Vispirms panāksim, lai ūdens būtu tikai 3 mucās: 3*l*, 32*l* un 20*l*. Sekojošā tabulā parādītas secīgās pārliešanas. Ar aplīšiem attēlotas tās mucas, kuras izmanto attiecīgā pārliešanā.

Mucas numurs ➔

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	4	5	6	7	8	9	10
4	2	2	4	3	6	7	8	9	10
4	4	2	4	3	4	7	8	9	10
4	4	4	4	3	4	5	8	9	10
4	4	4	4	3	4	10	8	4	10
4	4	4	4	3	4	20	8	4	0
0	4	4	4	3	8	20	8	4	0
0	0	4	8	3	8	20	8	4	0
0	0	0	8	3	8	20	8	8	0
0	0	0	0	3	8	20	16	8	0
0	0	0	0	3	16	20	16	0	0
0	0	0	0	3	32	20	0	0	0

Tālāk darbosimies tikai ar tām mucām, kurās vēl ir ūdens.

3	32	20
3	12	40
3	24	28
6	24	25
12	24	19
24	24	7
0	48	7
0	41	14
0	27	28
0	54	1

Lasītājs var patstāvīgi mēģināt sasniegt mērķi ar mazāku pārliešanu skaitu.

6. Atbilde: jā, noteikti.

Risinājums. Garausītis liek kaudzītē 10 s monētas. Ja viņš ar tām spēj izveidot summā 3 latus, viss kārtībā. Ja 10 s monētas izbeidzas ātrāk, nekā sasniegta summa Ls 3,00, Garausītis sāk pievienot kaudzītei pa vienai 5 s monētai. Ja viņš ar tām spēj sasniegt summā 3 latus, viss kārtībā. Pieņemsim, ka garausītim 5 s monētas izbeidzas ātrāk, nekā summā sasniegti Ls 3,00. Tad pastāv 2 iespējas.

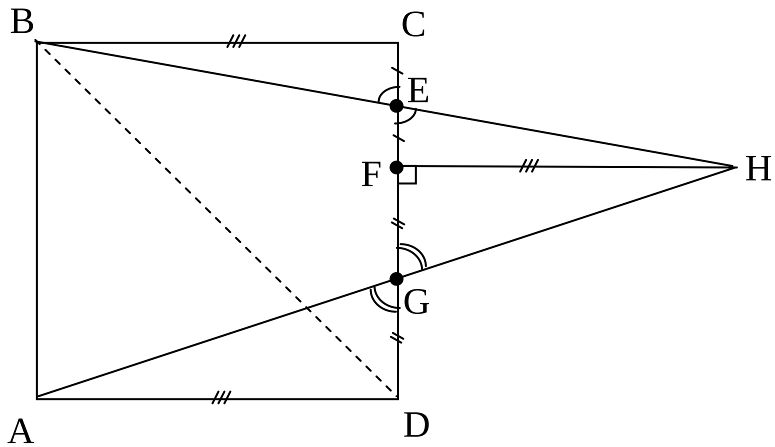
1. Garausītis kaudzītē salicis naudu **pāra skaita santīmu** vērtībā (tā notiks tad, ja viņam bijis pāra skaits 5 s monētu). Tad Garausītis sāk kaudzītei pievienot pa vienai 2 s monētai. Ja ar tām tiek sasniegta summa Ls 3,00, viss kārtībā. Ja Garausītim 2 s monētas izbeidzas ātrāk, nekā summā sasniegti 3 lati, tad atlikusī nauda (līdz 4 latiem) Garausītim ir 1 s monētās. Skaidrs, ka viņš var papildināt kaudzīti tā, lai tajā būtu tieši 3 lati.

2. Garausītis kaudzītē salicis naudu **nepāra santīmu** vērtībā (tā notiks tad, ja viņam bijis nepāra skaits 5 s monētu). Tā kā Garausītim kopā 400 santīmu, tad starp atlikušajām monētām (kas var būt tikai 1 s un 2 s monētas) vismaz viena ir 1 s monēta. Pievienojot to kaudzītei, tajā ir nauda pāra skaita santīmu vērtībā. Tagad Garausītis mērķi sasniedz tāpat kā 1.gadījumā (vispirms pievienojot pa vienai 2 s monētai un tālāk, ja nepieciešams, pa vienai 1 s monētai).

2. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Skat. 1. zīm.



1. zīm.

Izvēlamies uz kvadrāta ABCD malas CD punktus E, F un G tā, ka CE=EF≠FG=GD un atliekam ārpus kvadrāta tādu punktu H, ka FH⊥CD un FH=CD. Tad arī FH=CB un FH=DA. Tāpēc ΔEFH=ΔECB un ΔGFH=ΔGDA (pazīme kk). Tāpēc ∠BEC=∠HEF, tātad punkti B,E,H atrodas uz vienas taisnes; līdzīgi pierāda, ka punkti A,G,H atrodas uz vienas taisnes. Tāpēc, novietojot ΔBCE stāvoklī HFE un ΔADG- stāvoklī HFG, iegūstam trijstūri AHB. Pārbaudīsim, vai tas apmierina uzdevuma prasības.

1) tā kā ∠EBA atrodas ∠CBA iekšpusē, tad ∠HBA=∠EBA ir šaurs; līdzīgi pierāda, ka ∠HAB=∠GAB ir šaurs. Tā kā ∠HBA>∠DBA=45° un līdzīgi ∠HAB>45°, tad ∠AHB=180°-∠HBA-∠HAB<180°-45°-45°=90°; tātad ΔHAB ir šaurleņķu trijstūris.

2) BH>BE>BC=AB, tātad BH≠AB; līdzīgi pierāda, ka AH≠AB.

Pieņemsim uz brīdi, ka AH=BH. No augstāk minētajiem trijstūru vienādībām seko, ka AH=2AG un BH=2BE, tātad AG=BE. Tad ΔBCE=ΔADG (hk) , tāpēc EC=DG. Bet tā ir pretruna ar punktu E,F,G izvēli. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un AH≠BH. Tāpēc ΔAHB visas malas ir dažāda garuma.

2. Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. Aprēķināsim dažas pirmās n! vērtības: 1!=1, 2!=2, 3!=6, 4!=24, 5!=120, 6!=720. Skaidrs, ka arī visas tālākās n! vērtības beigsies ar ciparu 0. Aplūkojot iespējamos n! pēdējos ciparus 0;1;2;4;6, redzam, ka x!+y! var beigties ar ciparu 5 tad un tikai tad, ja viens saskaitāmais beidzas ar ciparu 1, bet otrs- ar ciparu 4. Bet tad šiem saskaitāmiem jābūt 1 un 24; to summa ir 25, un tā neapmierina uzdevuma nosacījumus.

3. Lai cik arī no ābola būtu apēsts, no palikušās daļas vienmēr $\frac{1}{4}$ atradīsies virs ūdens un būs pieejama putniņam; savukārt $\frac{3}{4}$ atlikušā ābola atradīsies zem ūdens un būs pieejama zivtiņai. Tātad, kamēr vien viss ābols vēl nebūs apēsts, ko ēst būs gan vienam, gan otram. Tāpēc putniņš apēdīs 2 reizes vairāk nekā zivtiņa, t.i., putniņš apēdīs $\frac{2}{3}$ no ābola.

4. Apzīmēsim uzdevumā minētos skaitļus augošā secībā ar x, y un z. Tad x+y+z=100 un apskatāmās starpības ir y-x, z-y un z-x, bet to summa ir (y-x)+(z-y)+(z-x)=2(z-x). Tā kā x≥1 un y>x, tad y≥2; tāpēc z=100-(x+y)≤100-(1+2)=97. No sakarībām x≥1 un z≤97 iegūstam, ka apskatāmā summa 2(z-x) nevar būt lielāka par 2(97-1)=2·96=192. Ja x=1; y=2; z=97, tad tā <u>ir</u> 192.
Tātad meklējamā vērtība ir 192.

5. Nē, tā nevar gadīties. Pieņemsim pretējo. Ja kādam rūķītim ir x gadu, tad viņš saņem 11·x ķirbjus, tāpēc viņa saņemto ķirbju skaits dalās ar 11. Bet 123456 ar 11 nedalās: 123456:11=11223 atl.3. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

6. Apzīmēsim traukus ar A, B, C, bet krāsas- ar a, b, c. Vispirms pārliesim krāsu a traukos B un C, piepildot tos līdz malām. Rodas situācija:
A- tukšs
B- $\frac{2}{3}$ krāsa b, $\frac{1}{3}$ krāsa a
C- $\frac{2}{3}$ krāsa c, $\frac{1}{3}$ krāsa a.
Traukos B un C krāsas sajaucām vienmērīgi un no katra no tiem pusi pārlejam traukā A. Tagad traukā A ir $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}a\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}c+\frac{1}{3}a\right)=\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}a$ krāsas, tātad tur visu krāsu ir vienāds daudzums. Salejot visu atlikušo krāsu traukā B, arī tur iegūstam vienādus krāsu a, b, c daudzumus. Šo maisījumu patvaļīgi sadalot starp traukiem B un C, iegūstam vajadzīgo.

B grupa

1. Skat. 2.zīm., kur parādīti 3 kuba slāņi.

z	s	**d**
d	z	s
s	**d**	z

Apakšējais

s	**d**	z
z	s	**d**
d	z	s

Vidējais

d	z	s
s	**d**	z
z	s	**d**

Augšējais

2.zīm.

2. Atbilde: a) nē, b) jā.

Risinājums. Atgādināsim svarīgu aritmētikas faktu: **naturāls skaitlis un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus, dalot ar 3.** Tiešām, ja naturāla skaitļa S cipari, sākot no kreisās puses, ir a_0, a_1, a_2, ..., a_n, tad S=$\overline{a_0 a_1 ... a_n} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n =$

$$= a_0\left(\underbrace{99...9}_{n}+1\right) + a_1\left(\underbrace{99...9}_{n-1}+1\right) + ... + a_{n-1}(9+1) + a_n =$$

$$= \left(a_0 \cdot \underbrace{99...9}_{n} + a_1 \cdot \underbrace{99...9}_{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot 9\right) + (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} + a_n).$$

Pirmajā iekavā katrs saskaitāmais dalās ar 3, tātad arī visa iekavas vērtība dalās ar 3. Tātad skaitļa S atlikums, dalot S ar 3, ir tāds, kāds rodas, dalot ar 3 otro iekavu, t.i., skaitļa S ciparu summu.

3. Pieņemsim, ka $n=x^2+y^2+z^2$, kur x, y, z- naturālie skaitļi, pie tam $x \ge y \ge z$. Tad

$$n^2 = (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2) = (x^2+y^2-z^2+2z^2)(x^2+y^2-z^2+2z^2) =$$

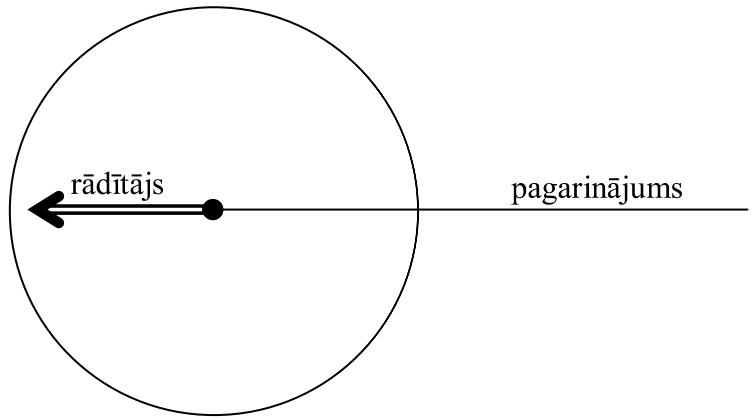
$$= (x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2) + (x^2+y^2-z^2) \cdot 2z^2 + 2z^2(x^2+y^2-z^2) + (2z^2)(2z^2) =$$

$$= (x^2+y^2-z^2)^2 + 2z^2(x^2+y^2-z^2+x^2+y^2-z^2+2z^2) =$$

$$= (x^2+y^2-z^2)^2 + 2z^2(2x^2+2y^2) = (x^2+y^2-z^2)^2 + (2xz)^2 + (2yz)^2.$$

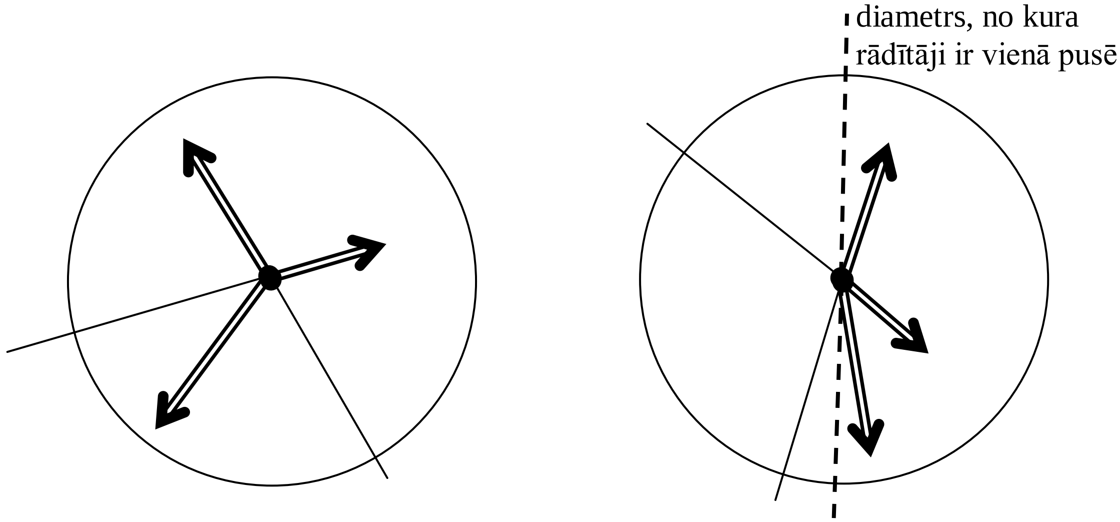
Ja x, y, z- naturāli skaitļi, tad 2xz un 2yz arī ir naturāli skaitļi, bet $x^2+y^2-z^2$ ir vesels skaitlis; ja pie tam $x \ge y \ge z$, tad $x^2+y^2-z^2>0$, tātad ir naturāls skaitlis. Līdz ar to uzdevums atrisināts.

4. Sauksim par rādītāja pagarinājumu staru, kas iziet no ciparnīcas centra pretēji rādītāja virzienam (skat. 3. zīm.)



3. zīm.

Viegli saprast: laika moments ir **slikts** tad un tikai tad, ja kāds rādītājs atrodas leņķī (mazākā par 180°), ko veido abu pāreju rādītāju pagarinājumi (skat. 4.zīm.)



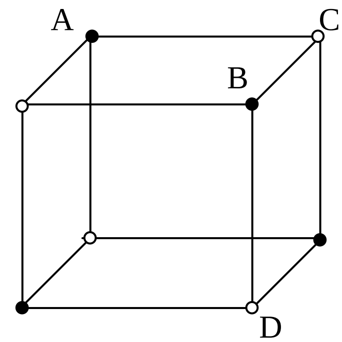
4. zīm.

Ievērosim: ik pēc 6 stundām minūšu un sekunžu rādītāju atkārtojas, bet stundu rādītāja virziens mainās uz pretējo. Tāpēc **6 stundas pēc slikta momenta noteikti ir labs moments.**

Bet ir arī labi momenti, 6 stundas pēc kuriem ir labs moments, piem., laika intervāls no 3 st. 0 min. 0 sek. līdz 3 st. 0 min. 15 sek. un tam atbilstošais intervāls no 9 st. 0 min. 0 sek. līdz 9 st. 0 min. 15 sek. No tā seko, ka diennaktī labā laika ir vairāk nekā sliktā.

5. Principā uzdevumu varētu atrisināt, pārbaudot visas iespējas, kā skaitļi uzrakstāmi kuba virsotnēs. Tomēr šādu iespēju ir ļoti daudz, un tāds risināšanas ceļš aizņemtu daudz laika. Tālāk dotajā risinājumā visi daudzi gadījumi apvienoti dažos „tipiskajos”, tādējādi samazinot veicamā darba apjomu.

Izkrāsojam kuba virsotnes baltā un melnā krāsā, ka parādīts 5. zīm. Katra šķautne savieno vienu baltu un vienu melnu virsotni.



5. zīm.

Lauztu līniju, kas savieno kuba divas pretējas virsotnes un sastāv no 3 šķautnēm, sauksim par ceļu. Skaidrs, ka katrs ceļš satur 2 melnas un 2 baltas virsotnes. Tālākajam svarīgs būs šāds apgalvojums:

*** ja mēs izvēlamies 3 virsotnes, kas visas nav vienā krāsā, tad eksistē 2 ceļi, katrs no kuriem satur šīs 3 virsotnes.**

Apgalvojumu (*) viegli pārbaudīt, ja 3 tajā minētās virsotnes ir A, B, C vai A, B, D; visi citi gadījumi ir līdzvērtīgi vienam no šiem diviem.

Tagad apskatīsim dažādus „lielo skaitļu” izvietojumus.

a) 6;7;8 nav vienā un tai pašā krāsā. Saskaņā ar (*) tie ietilpst vienā ceļā. Šis ceļš der par minēto, jo 6+7+8=21.

b) 5;7;8 nav vienā krāsā. Saskaņā ar (*) tie ietilpst vienā ceļā. Šī ceļa ceturtajā virsotnē ir skaitlis x, kur $x \geq 1$. Tāpēc šajā ceļa skaitļu summa ir $5+7+8+x=20+x \geq 21$.

c) ja neizpildās ne a), ne b), tad visi „lielie” skaitļi 5;6;7;8 ir vienā krāsā (varam pieņemt, ka melnā). Tad 4 ir baltā krāsā. Apskatīsim tos 2 ceļus, kas satur 4;7;8. Vienā no tiem ceturto skaitli apzīmēsim ar x, otrā- ar y. Tad šajos ceļos skaitļu summas ir 19+x un 19+y. Vai nu x, vai y ir lielāks par 1, tātad vismaz 2. Atbilstošais ceļš der par meklēto.

6. Sanumurēsim figūriņas sākuma pozīcijā no kreisās uz labo pusi ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 9 (skat. 6. zīm.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

6. zīm.

Pieņemsim, ka figūriņas nostājušas tā, kā prasīts uzdevumā. Pastāv divas iespējas:

a) figūriņa Nr.9 nav pārbīdījusies,

b) figūriņa Nr.9 ir pārbīdījusies.

Parādīsim, ka iespēja a) patiesībā nevar būt. Tiešām, ja figūriņa Nr.9 palikusi uz vietas, tad vienīgais sākuma pozīcijā iespējamais gājiens ir lēciens ar figūriņu Nr.8, iegūstot 7. zīm. parādīto situāciju.

1	2	3	4	5	6	7		9	8	...

7. zīm.

Tā kā beigās figūriņām jāstāv pēc kārtas, tad gan Nr.9, gan Nr.8 atrodas savās beigu pozīcijās. Tāpēc tās vairs nepārvietosies; ja tās pārvietotos, tad vairs nevarētu atgriezties šajās pozīcijās, jo kustība notiek tikai vienā virzienā.

Bet tādā gadījumā Nr.9 un Nr.8 veido „mūri”, kuram pāri nevar tikt citas figūriņas, un tātad beigās figūriņas nevar novietoties vajadzīgajā secībā. Tātad a) tiešām nav iespējama.

Tāpēc realizējas b), un Nr.9 ir pārbīdījusies vismaz 1 vietu pa labi. Pa labi no Nr.9 beigu pozīcijas jābūt vietai pārējām 8 figūriņām; tāpēc kopīgais rūtiņu skaits uz lentas ir vismaz n=9+1+8=18.

Parādīsim, ka pie n=18 uzdevuma prasības ir izpildāmas. Izdarām šādus pārvietojumus:

1) pārbīdām Nr.9 vienu vietu pa labi; iegūstam 8. zīm. attēloto stāvokli.

1	2	3	4	5	6	7	8		9								

8. zīm.

2) ar 2 lēcieniem un 1 pārbīdīšanu novietojam īstajā vietā Nr.7; iegūstam 9. zīm. attēloto stāvokli.

1	2	3	4	5	6		8		9		7						

9. zīm.

3) līdzīgā ceļā pēc kārtas novietojam beigu pozīcijās Nr.5, Nr.3, Nr.1, iegūstot 10. zīm. attēloto situāciju.

	2		4		6		8		9		7		5		3		1

10. zīm.

4) ar vienu pārbīdīšanu un 7 lēcieniem nogādājam īstajā vietā Nr.2, iegūstot 11. zīm. attēloto situāciju.

			4		6		8		9		7		5		3	2	1

11. zīm.

5) līdzīgā ceļā pēc kārtas nogādājam īstajās vietās Nr.4, Nr.6, Nr.8.

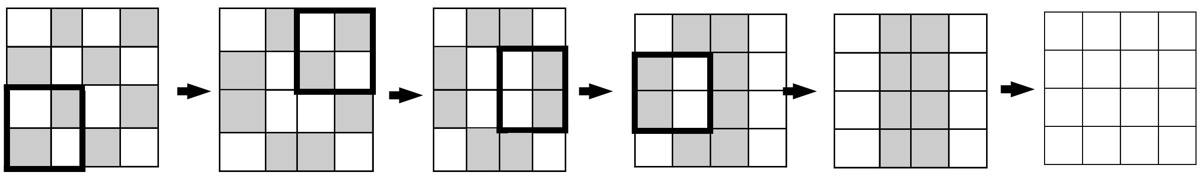
Tātad uzdevuma atbilde ir „18”.

3. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Atbilde: jā, var.

Vispirms parādīsim, kā var panākt, lai kvadrātā ar izmēriem 4×4 rūtiņas visas rūtiņas būtu baltas (skat. 1. zīm.)



1. zīm.

Sadalot šaha galdiņu četros kvadrātos ar izmēriem 4×4 rūtiņas katrs un katru no tiem pārkrāsojot atsevišķi, iegūstam vajadzīgo.

2. Atbilde: 6 akmeņi.

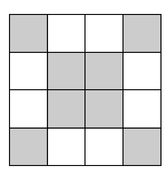
Skaidrs, ka akmeņus, kuru masas ir 30 kg; 30 kg; 30 kg; 10 kg; 10 kg; 10 kg, var sadalīt prasītāja veidā, jo 30+10=30+10=30+10 un 30=30=30=10+10+10.

Parādīsim, ka mazāk par 6 akmeņiem nevar būt.

Paņemsim, ka kaudzē ir ne vairāk kā 5 akmeņi. Dalot tos 3 daļās, vismaz vienā kaudzē būs viens akmens (ja katrā kaudzē būtu vismaz 2 akmeņi, tad akmeņu kopīgais skaits būtu vismaz 3·2=6- pretruna). Tātad šī akmens masa ir $\frac{1}{3}M$, kur M - kopējā kaudzes masa. Bet tādā gadījumā, dalot kaudzi 4 daļās, vismaz vienas daļas masa būs ne mazāka par $\frac{1}{3}M$ (tās daļas masa, kas satur iepriekš minēto akmeni). Tā nevar būt, jo, dalot kaudzi 4 daļās, katrai daļas masai jābūt $\frac{1}{4}M$, un $\frac{1}{4}M < \frac{1}{3}M$.

Iegūta pretruna.

3. Jā, var. Skat. 2. zīm., kur „lielais” kvadrāts sadalīts 4×4 vienādās kvadrātiskās rūtiņās.



2. zīm.

4. Naturālo skaitļu virknē nepāra un pāra skaitļi izvietoti pamīšus. Tāpēc no 18 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem 9 ir pāra skaitļi, bet 9 - nepāra skaitļi. Skaidrs, ka to visu summa ir nepāra skaitlis. Sešu skaitļu summa, kas ir pirmskaitlis, ir lielāka par 2; tāpēc tā ir nepāra skaitlis. Tātad atlikušo 12 skaitļu summa ir pāra skaitlis (nepāra sk. mīnus pāra sk. = nepāra sk.). Tā kā tā ir lielāka par 2, tad tā nevar būt pirmskaitlis.

5. Uzrakstīsim dotos iespējamus skaitļa n dalītājus sekojošā formā :

7; 2·5; 3·9; 5·7; 5·9; 7·9.

Ja n nedalītos ar 5, tad tikai trīs no tiem būtu n dalītāji; tā būtu pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad n dalās ar 5. Līdzīgi iegūstam, ka n dalās ar 7 un ar 9. Tā kā skaitļiem 5, 7 un 9 pa pāriem nav lielāka kopīga dalītāja kā 1, tad no tā, ka n dalās ar 5, 7 un 9, seko: n dalās ar 5·7·9=315. Vienīgie trīsciparu skaitļi, kas dalās ar 315, ir 315; 630; 945. Skaitlis 315 dalās ar 7; 5·7; 5·9 un 7·9, bet nedalās ar 2·5 un ar 3·9; tātad tas apmierina uzdevuma nosacījumus. Skaitlis 630 dalās ar 5 skaitļiem 7; 2·5; 5·7; 5·9; 7·9, tātad neapmierina uzdevuma nosacījumus. Skaitlis 945 dalās ar 5 skaitļiem 7; 3·9; 5·7; 5·9; 7·9, tātad neapmierina uzdevuma nosacījumus.

Tātad uzdevuma atbilde ir n=315.

6. Apskatām kvadrāta četras stūra rūtiņas. Tā kā krāsošanā izmantotas tikai trīs krāsas, tad divas no šīm stūra rūtiņām nokrāsotas vienādi. Apskatam divas iespējas:

a) vienādi nokrāsotās stūra rūtiņas atrodas pie vienas kvadrāta malas (piem., x un y 3.zīm.) Novelkam kvadrāta viduslīniju, kas dala šo malu uz pusēm (pārtrauktā līnija 3.zīm.).

x	1		1	y
9	2		2	9
8	3		3	8
7	4		4	7
6	5		5	6

3. zīm.

Pārlokot kvadrātu pa šo viduslīniju, vienādi nokrāsotās rūtiņas x un y sakritīs; sakritīs arī vienādi nokrāsotās to rūtiņu puses, kuras šī viduslīnija krusto. Pat ja katrā ar vienādiem numuriem apzīmēto rūtiņu pārī abu rūtiņu krāsas ir dažādas, katrā pārī pietiek pārkrāsot vienu rūtiņu tā, lai uzdevuma nosacījumi izpildītos. Tātad nav jāpārkrāso vairāk par 9 rūtiņām.

b) vienādi nokrāsotās stūra rūtiņas atrodas vienas kvadrāta diagonāles galos (piem., u un v 4. zīm.).

u	3	2	1	
4	9	8		1
5	7		8	2
6		7	9	3
	6	5	4	v

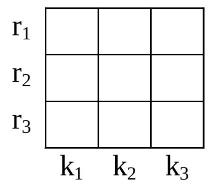
4. zīm.

Pārlokām kvadrātu pa diagonāli, kas neskar šis rūtiņas. To, ka uzdevuma nosacījumi izpildīti, izsprież tāpat kā a) gadījumā.

B grupa

1. Atbilde: nē, to izdarīt nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Apzīmēsim rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas, kā parādīts 5. zīm.



5. zīm.

Katrs no skaitļiem k_1; k_2; k_3; r_1; r_2; r_3 var pieņemt vērtības 0;1;2;3;4;5;6. Ievērosim, ka gan summa $k_1+ k_2 +k_3$, gan summa $r_1+ r_2 +r_3$ ir vienāda ar visu tabulā ierakstīto skaitļu summu; tāpēc $r_1+ r_2 +r_3+ k_1+ k_2 +k_3$ ir **pāra skaitlis** (divkāršota visu tabulā ierakstīto skaitļu summa). Ievērosim, ka 0+1+2+3+4+5+6=21 – **nepāra skaitlis**. Tā kā summa $k_1+k_2+k_3+r_1+r_2+r_3$ satur **sešus** no saskaitāmajiem 0;1;2;3;4;5;6, tad iztrūkstošais saskaitāmais ir nepāra skaitlis. Tātad starp skaitļiem r_1; r_2; r_3; k_1; k_2; k_3 sastopami visi skaitļi 0;2;4;6 un divi no skaitļiem 1;3;5.

Ievērosim, ka summa 0 var rasties tikai kā 0+0+0, bet summa 6 – tikai kā 2+2+2. Nevar būt reizē rindiņa, kas sastāv tikai no nullēm, un kolonna, kas sastāv tikai no divniekiem (kas ierakstīts to kopējā rūtiņā?), vai otrādi - rindiņa, kas sastāv tikai no divniekiem, un kolonna, kas sastāv tikai no nullēm. Tāpēc varam pieņemt, ka ir kolonna, kas sastāv tikai no nullēm, un cita kolonna, kas sastāv tikai no divniekiem (otrs gadījums ir analoģisks). Lai visās rindiņās skaitļu summas būtu atšķirīgas, trešajā kolonnā visiem skaitļiem jābūt dažādiem; tātad tie ir $0;1;2$, un šīs kolonnas skaitļu summa ir 3. Bet tad tā ir vienāda ar tās rindas skaitļu summu, kurā atrodas „apvilktais” vieninieks. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

2. Vieglajos maisos var būt 20kg cukura. Tāda situācija rodas, ja, piemēram, 50 maisos ir pa 400g cukura, bet 50 maisos – pa 1600g cukura. Tad visi maisi, kas satur 400g cukura, ir vieglie, un tajos kopā ir 50·0,4kg=20kg cukura.

Samazinot šajā piemērā vieglajos maisos esošā cukura daudzumus un attiecīgi palielinot smagajos maisos esošā cukura daudzumus, redzam, ka vieglajos maisos var būt arī jebkurš (pozitīvs) cukura daudzums, kas mazāks par 20kg.

Tagad pierādīsim, ka vieglajos maisos nevar būt vairāk cukura kā 20kg.

Skaidrs, ka vieglo maisu nav vairāk kā 50 (pretējā gadījumā nebūtu tādu 50 maisu, kas ir smagāki par smagāko no vieglajiem). Apzīmēsim vieglo maisu skaitu ar x. Pieņemsim no pretējā, ka vieglajos maisos kopā ir **vairāk** par 20kg cukura. Tad smagākajā no vieglajiem maisiem (apzīmēsim to ar S) ir vismaz $\frac{20}{x}$ kg cukura.

Katrā no 50 maisiem, kas smagāki par S, ir vairāk nekā $\frac{20}{x}\cdot 4=\frac{80}{x}$ kg cukura. Šajos 50 maisos kopā tāpēc ir vairāk nekā $50\cdot\frac{80}{x}$ kg cukura.

Tā kā $x\le 50$, tad šis daudzums nav mazāks par 80kg. Tā ir pretruna: mēs pieņēmām, ka vieglajos maisos ir vairāk nekā 20kg cukura, tātad kopā ir vairāk nekā 80kg+20kg=100kg cukura, bet tā nevar būt.

Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un vieglajos maisos nevar būt vairāk par 20kg cukura.

3. Atbilde: 4.

Risinājums. Jebkuri trīs no skaitļiem 1; 3; 7; 9 summā dod pirmskaitli: 1+3+7=11, 1+3+9=13, 1+7+9=17, 3+7+9=19.

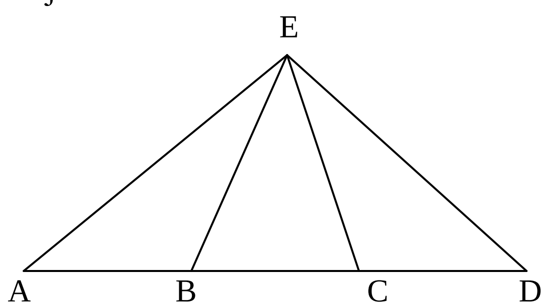
Pieņemsim, ka mums ir 5 dažādi naturāli skaitļi, un parādīsim, ka no tiem noteikti var izvēlēties tādus trīs skaitļus, kuru summa dalās ar 3. Tā kā šo trīs skaitļu summa noteikti nav mazāka par 1+2+3=6, tad tā nav pirmskaitlis.

Apskatīsim minēto 5 skaitļu atlikumus, kādus tie dod, dalot ar 3. Katrs atlikums var būt vai nu 0, vai 1, vai 2. Ja sastopami visi trīs atlikumi, tad ņemam vienu skaitli ar atlikumu 0, vienu skaitli ar atlikumu 1 un vienu skaitli ar atlikumu 2. Atbilstošo skaitļu summa dalās ar 3, jo 0+1+2=3 dalās ar 3.

Ja turpretī sastopami tikai divi dažādi atlikumi vai arī visi 5 atlikumi ir vienādi, tad var atrast 3 skaitļus ar vienādiem atlikumiem. Šo skaitļu summa dalās ar 3, jo gan 0+0+0=0, gan 1+1+1=3, gan 2+2+2=6 dalās ar 3.

Skaidrs: ja dažādo naturālo skaitļu ir vairāk nekā 5, tad no tiem vispirms var izvēlēties piecus un tālāk no tiem – trīs, kuru summa dalās ar 3. Tātad 4 tiešām ir lielākā vērtība, kas apmierina uzdevuma prasības.

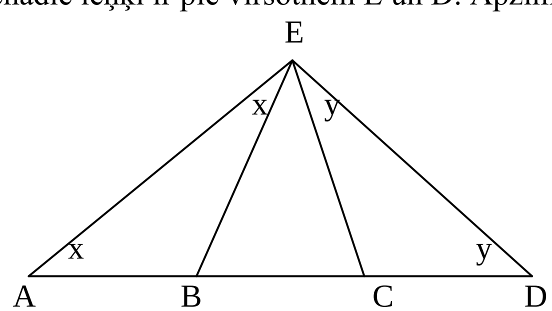
4. Uzdevumā galvenās grūtības rada vēlēšanās noskaidrot, kuri divi no leņķiem katrā vienādsānu trijstūrī var būt vienādie.



6.zīm.

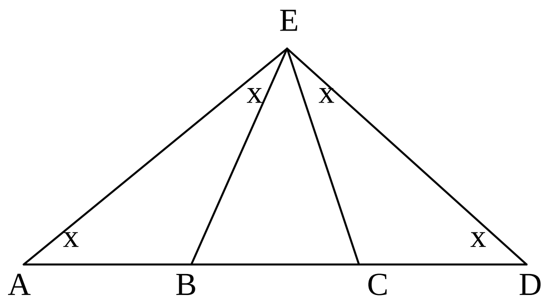
Ievērosim, ka vismaz viens no leņķiem $\angle EBC$ un $\angle ECB$ ir šaurs (jo ΔBEC nevar būt divi plati / taisni leņķi).

Pieņemsim, ka $\angle EBC$ ir šaurs (otru gadījumu analizē līdzīgi). Tad $\angle ABE$ ir plats; tāpēc ΔABE vienādi leņķi ir pie virsotnēm A un E. Apzīmēsim to lielumus ar x. Ja $\angle ACE$ būtu plats, tad ΔACE vienādi būtu leņķi pie virsotnēm A un E, bet tā nevar būt, jo $\angle EAC = \angle AEB < \angle AEC$. Tāpēc $\angle ACE$ ir šaurs; tad $\angle ECD$ ir plats un ΔECD vienādie leņķi ir pie virsotnēm E un D. Apzīmēsim to lielumu ar y (7. zīm.).



7.zīm.

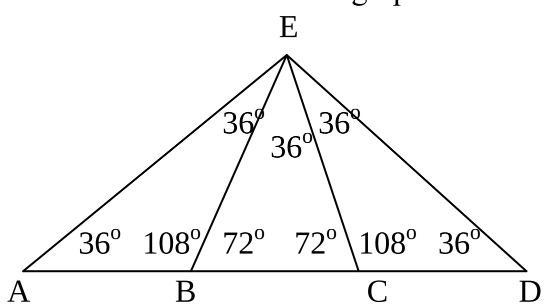
Acīmredzami, ka $\angle AED > \angle EAD$ un $\angle AED > \angle EDA$. Tāpēc vienādsānu trijstūrī AED vienādie leņķi ir pie virsotnēm A un D, t.i., x=y (8. zīm.).



8.zīm.

Tagad pakāpeniski iegūstam $\angle ECD = 180^o - 2x$ (no ΔECD), $\angle ECD = 180^o - (180^o - 2x) = 2x$. Tā kā $\angle ECA = 2x > x = \angle EAC$ un $\angle AEC > \angle EAC$, tad ΔACE vienādie leņķi ir $2x = \angle ACE = \angle AEC$. Tāpēc $\angle BEC = 2x - x = x$ un $\angle AED = 3x$. Tagad no ΔAED iekšējo leņķu summas iegūstam $x+3x+x=180^o$, $5x=180^o$, $x=36^o$. Tātad ΔAED leņķu lielumi ir 36^o; 36^o; 108^o.

Vēl jāpārbauda, vai atrastā punktu sistēma apmierina uzdevuma nosacījumus, t.i., vai **visi** trijstūri ir vienādsānu. Par to viegli pārliecināties 9.zīm.



9.zīm.

5. Aplūkosim atlikumus, kādus ieguva, dalot doto **nepāra** skaitli n ar pāra skaitļiem 2; 4; 6; ... ; 2006. (Šo skaitļu skaits ir 1003.) Atlikumiem jābūt nepāra skaitļiem, un neviens no tiem nevar būt lielāks par 2006. Tātad iespējami nepāra atlikumi ir 1; 3; 5; ... ; 2005 (to skaits ir 1003). Tā kā visi iegūtie 1003 atlikumi ir dažādi, tad visām minētajām 1003 vērtībām jāparādās kā atlikumiem. Dalot ar 2, no tām iespējams tikai atlikums 1. Dalot ar 4, iespējami atlikumi 1 un 3; tā kā 1 jau ir „aizņemts", tad, dalot ar 4, iegūst atlikumu 3. Līdzīgi, dalot ar 6, iegūst atlikumu 5; dalot ar 8, iegūst atlikumu 7; ... ; dalot ar 2006, iegūst atlikumu 2005.

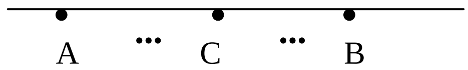
Pieņemsim, ka n izdalās bez atlikuma ar k un $k \le 1003$. Tad $n = k \cdot m_1$, m_1 - kaut kāds vesels skaitlis. Tā kā $k \le 1003$, tad $2k \le 2006$. No augstāk pierādītā seko, ka, dalot n ar 2k, iegūst atlikumu 2k-1. Tad $n = 2k \cdot m_2 + (2k-1)$. No vienādībām $n = k \cdot m_1$ un $n = 2k \cdot m_2 + (2k-1)$ pakāpeniski iegūstam

$k \cdot m_1 = 2k \cdot m_2 + 2k - 1$

$k \cdot (m_1 - 2m_2) = 2k - 1$

Kreisā puse šajā vienādībā dalās ar k, bet labā – nedalās. Tātad iegūta pretruna, un mūsu izdarītais pieņēmums ir nepareizs.

6. Pieņemsim, ka izveidojusies situācija, kurā maiņas vairs nav iespējams izdarīt. Tas nozīmē, ka visi blakus stāvošo bērnu pāri jau ir mainījušies vietām. Ja tomēr ir kādi bērni, kas vēl nav mainījušies vietām, tad tie nestāvēs blakus. Atradīsim divus šādus vistuvāk stāvošos bērnus (t.i., tādus, starp kuriem stāv vismazākais daudzums citu bērnu). Pieņemsim, ka tie ir A un B. Izvēlēsimies vienu no bērniem, kas stāv starp A un B, un apzīmēsim to ar C.



10.zīm.

Varam pieņemt, ka A, C, B stāv virzienā no kreisās uz labo pusi (skat. 10.zīm.). Tā kā C un A ir tuvāk viens otram nekā C un B, tad C un A jau ir mainījušies; līdzīgi iegūstam, ka C un B ir jau mainījušies.

Tā kā A un B nav mainījušies, tad A arī sākumā stāvēja pa kreisi no B. Tā kā A un C ir mainījušies, tad A sākumā stāvēja pa labi no C. Tā kā B un C ir mainījušies, tad B sākumā stāvēja pa kreisi no C. Esam ieguvuši, ka sākumā

- C stāvēja pa kreisi no A
- A stāvēja pa kreisi no B
- B stāvēja pa kreisi no C.

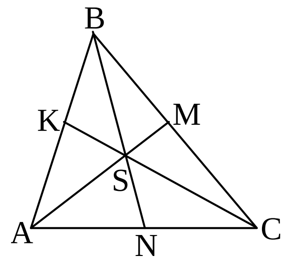
Tas vienlaicīgi nevar notikt. Tātad mūsu pieņēmums ir bijis nepareizs.

4. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tātad mēs pieņemam, ka katrā kolonnā ir mazāk par 10 pāra skaitļiem. Tad visā tabulā ir **mazāk par 30·10=300** pāra skaitļiem, jo tabulā ir 30 kolonnas. Bet no uzdevumā dotā seko, ka tabulā ir **vismaz 20·15=300** pāra skaitli (jo tajā ir 20 rindiņas un katrā no tām – vismaz 15 pāra skaitļi). Esam ieguvuši pretrunu, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

2. Kā zināms, trijstūra mediānas krustojas vienā punktā. Apzīmēsim ΔABC mediānu krustpunktu ar S.



1. zīm.

Ja X – patvaļīgs punkts, tad no trijstūra nevienādības seko, ka AX+XM≥AM, BX+XN≥BN un CX+XK≥CK, turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, kad X atrodas uz nogriežņa AM (resp. uz BN vai CK). Tātad

AX+BX+CX+MX+NX+KX=(AX+XM)+(BX+XN)+(CX+XK)≥AM+BN+CK,

un vērtība AM+BN+CK tiek sasniegta tad un tikai tad, ja X vienlaicīgi pieder visiem nogriežņiem AM, BN, CK, resp., ja X ir ΔABC mediānu krustpunkts.

3. Tā kā 10000:5=2000 un 10000:7=1428 atl. 4, tad no 1 līdz 10000 ieskaitot ir 2000 skaitļi, kas dalās ar 5, un 1428 skaitļi, kas dalās ar 7. Tā kā 5·7=35 un 10000:35=285 atl. 25, tad 285 no šiem skaitļiem dalās gan ar 5, gan ar 7. Tāpēc neizsvītroti paliek 2000+1428-285=3143 skaitļi.

Lai atrastu, kurš skaitlis no neizsvītrotajiem atrodas 2006-ajā vietā, lietosim mēģinājumu un kļūdu metodi. Acīmredzot izsvītrotie skaitļi sadalās vairāk vai mazāk vienmērīgi. Tā kā 2006:3143=0,638..., tad mūsu meklējamais skaitlis varētu būt apmēram 10000·0,638=6380. Atradīsim, cik neizsvītrotu skaitļu paliek robežās no 1 līdz 6380:

6380:5=1276;

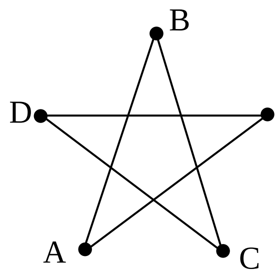
6380:7=911 atl. 3;

6380:35=182 atl. 10,

tātad no 1 līdz 6380 ieskaitot paliek neizsvītroti 1276+911-182=2005 skaitļi. Tātad mums jāatrod nākošais neizsvītrotais skaitlis aiz 6380. Viegli pārbaudīt, ka 6381; 6382; 6383 tiks izsvītroti, bet 6384 – nē, jo dalās ar 7.

Atbilde: 3143 skaitļi; 6384.

4. Tā kā pārbīdīšana notiek tikai pa diagonālēm, apskatīsim diagonāļu veidoto noslēgto maršrutu ABCDEA (2.zīm.).



2. zīm.

Pieņemsim, ka sākumā monētas m_1, m_2, m_3 novietotas attiecīgi virsotnēs A, D, B; tad to secība minētajā maršrutā, neņemot vērā tukšās vietas starp monētām **vienmēr** paliks $<m_1;m_3;m_2>$ vai, līdzvērtīgi, $<m_3;m_2;m_1>$ resp. $<m_2;m_1;m_3>$. Ja vairāku pārbīžu rezultātā samainītos vietām m_1 un m_3, tad monētu secība **minētajā maršrutā** būtu kļuvusi par $<m_3;m_1;m_2>$. Kā redzam, neviena no šīm secībām nav starp tām, kuras mēs atzīmējām kā saglabājošās. Tāpēc uzdevumā minētā monētu pārkārtošana nav iespējama.

5. Jā, var.

Vispirms sadalām 3 daļās ar vienādām summām skaitļus no 1 līdz 8 ieskaitot:

A: 4; 8

B: 5; 7

C: 1; 2; 3; 6

Atliek 2006-8=1998 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi (no 9 līdz 2006 ieskaitot). Tā kā 1998:6=333, tad tos var sadalīt 333 grupās, katrā no kurām ietilpst 6 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi.

Ņemam jebkuru no šīm grupām un apzīmējam tajā ietilpstošos skaitļus ar n; n+1; n+2; n+3; n+4; n+5. Pievienojam daļai A skaitļus n un n+5, daļai B – skaitļus n+1 un n+4, daļai C – skaitļus n+2 un n+3. Tā rezultātā A, B, C ietilpstošo skaitļu summas visas palielinājušās par 2n+5, tātad joprojām ir vienādas. Pēc tam, kad esam šādu operāciju veikuši ar visām 333 grupām, uzdevuma prasības ir izpildītas.

6. Atbilde: skaitlis var beigties ar jebkuru ciparu no 1 līdz 9 ieskaitot.

Tiešām, piemērs

123456789123456789123456789123456789

parāda, ka skaitlis var beigties ar ciparu 9. Pārceļot pēdējo devītnieku uz skaitļa sākumu, iegūstam skaitli

912345678912345678912345678912345678,

kas beidzas ar 8 un arī apmierina uzdevuma prasības. Pakāpeniski šajā skaitlī pārceļot uz sākumu pēdējo astotnieku, pēdējo septītnieku, ..., pēdējo divnieku, iegūstam skaitļus, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un beidzas ar 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1.

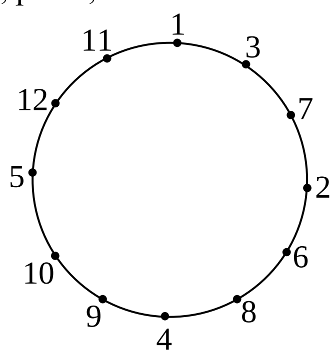
B grupa

1. Olimpiādē pieņemtā punktu piešķiršanas sistēma ir līdzvērtīga sekojošai:

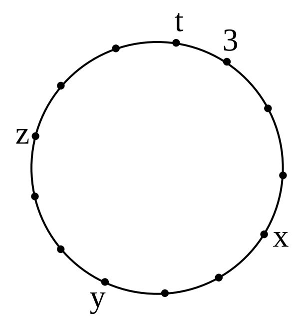
- par **katru atrisinātu** uzdevumu (vienalga, grūtu vai vieglu) piešķir 4 punktus;
- par **katru vieglu** uzdevumu (vienalga, atrisinātu vai neatrisinātu) atskaita 1 punktu.

Pēc šīs sistēmas Jānītis ir saņēmis 12·4=48 punktus, un viņam atskaitīti 48-18=30 punkti. Tātad vieglo uzdevumu olimpiādē bija 30.

2. a) jā var. Skat., piem., 3. zīm.



3. zīm.



4. zīm.

b) nē, nevar. Pieņemsim, ka izdevies to izdarīt. Kaut kur jābūt uzrakstītam skaitlim 3. Pakāpeniski iegūstam, ka ar 3 jādalās arī skaitļiem x; y; z; t (skat. 4. zīm.). Bet no 1 līdz 13 ieskaitot ir tikai 4 skaitļi, kas dalās ar 3. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

3. a) acīmredzot, **katras** trīs taisnes veido trijstūri. Ja taisnes apzīmēsim ar a; b; c; d; e, tad trīs no tām var izvēlēties 10 veidos:

bcd; bce; bde; cde; abc; abd; abe; acd; ace; ade.

Tātad pavisam būs 10 trijstūri.

b) pieņemsim, ka mums ir kāda 5 taišņu sistēma, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Pieņemsim vispirms, ka tajā ir 2 savstarpēji perpendikulāras taisnes l_1 un l_2. „Mazliet” pagriezīsim taisni l_2, citas taisnes nekustinot. Pagriešanas leņķi izvēlamies tik mazu, lai

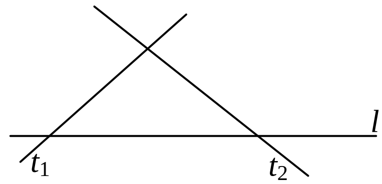
1) neviens šaurs leņķis starp taisnēm nekļūst taisns vai plats,

2) ne griešanas procesā, ne rezultātā nekādas trīs taisnes nevienu brīdi neiet caur vienu punktu un nekļūst paralēlas vai perpendikulāras.

Atkārtojot šādas pagriešanas vairākkārt (ja nepieciešamas), „likvidējam” visus savstarpēji perpendikulāro taišņu pārus. rezultātā esam ieguvuši jaunu 5 taišņu sistēmu, kas joprojām apmierina visus uzdevuma nosacījumus, kurā nekādas trīs taisnes neveido taisnleņķa trijstūri un kurā šaurleņķu trijstūru ir tikpat cik sākotnējā sistēmā; pārējie trijstūri tātad ir platleņķa.

Apzīmēsim šaurleņķa trijstūru skaitu ar x, bet platleņķa trijstūru skaitu ar y. No iepriekšējā zināms, ka **x+y=10**.

Skaidrs, ka katrs šaurleņķu trijstūris pieskaras trim taisnēm ar diviem šauriem leņķiem, bet katrs platleņķa trijstūris šādi pieskaras tikai vienai taisnei. Tātad šādu pieskāršanos pavisam ir 3x+y.



5. zīm.

Noskaidrosim, cik šādu pieskāršanos var būt vienai taisnei l. Pārējās četras taisnes attiecībā pret l noliektas vai nu pa labi (kā t_1 5. zīm.), vai pa kreisi (kā t_2 5. zīm.). Acīmredzot, l; t_1; t_2 veido trijstūri, kas pieskaras l ar diviem šauriem leņķiem, tad un tikai tad, ja viena no taisnēm t_1; t_2 attiecībā pret l noliekta pa kreisi, bet otra – pa labi.

Apskatām visas iespējas, kā attiecībā pret l var būt noliektas pārējās 4 taisnes:

pa kreisi	pa labi	meklējamo trijstūru skaits
0	4	$0\cdot4=0$
1	3	$1\cdot3=3$
2	2	$2\cdot2=4$
3	1	$3\cdot1=3$
4	0	$4\cdot0=0$

Redzam, ka nevienai no 5 taisnēm apskatāmajā veidā nepieskaras vairāk par 4 trijstūriem. Tāpēc šādu pieskāršanos nav vairāk par 20, un iegūstam

$3x+y\le20$

Ievietojot $y=10-x$, iegūstam $3x+(10-x)\le20$, $2x\le10$ un $x\le5$, ko arī vajadzēja pierādīt.

4. Apzīmēsim ar p jebkuru pirmskaitli, ar kuru dalās n. pieņemsim, ka, sadalot n pirmskaitļu reizinājumā, pirmskaitlis p parādās a reizes; tad, sadalot n^3 pirmskaitļu reizinājumā, pirmskaitlis p tur parādīsies 3a reizes.

Apzīmēsim ar d_1, d_2, d_3, d_4 tos skaitļa n dalītājus, par kuriem runā uzdevumā. Iedomāsimies uz brīdi, ka mēs protam pierādīt: **reizinājums $d_1d_2d_3d_4$ satur pirmskaitli p ne vairāk kā 3a reizes.** No tā sekotu, ka n^3 jebkuru pirmskaitli satur vismaz tikpat daudz reižu, cik to satur reizinājums $d_1d_2d_3d_4$; tātad n^3 dalās ar $d_1d_2d_3d_4$ un tātad $n^3\ge d_1d_2d_3d_4$.

Atliek pierādīt izcelto apgalvojumu.

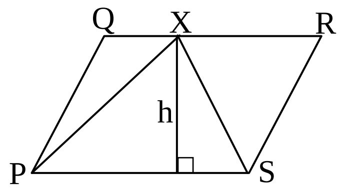
Tā kā d_1 ir n dalītājs, tad d_1 nevar saturēt pirmskaitli p vairāk nekā a reizes. Tas pats attiecas arī uz d_2; d_3; d_4. Turklāt vismaz viens no skaitļiem vispār nedalās ar p; pretējā gadījumā summa $d_1+d_2+d_3+d_4$ dalītos ar p un nevarētu būt pirmskaitlis. Tātad p satur ne vairāk kā 3 no dalītajiem d_1; d_2; d_3; d_4, un neviens to nesatur vairāk nekā a reizes. No tā seko izceltais apgalvojums.

5. No kvadrātiem 8×8 varam salikt 2 taisnstūrus ar izmēriem 8×24; to laukumu starpība ir 0, tātad tie apmierina uzdevuma nosacījumus.

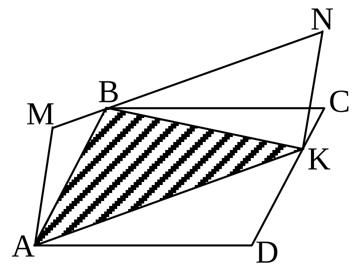
6. Uzdevuma risinājums balstīts uz šādu vienkāršu lemmu.

Lemma. Ja PQRS – paralelograms un punkts X atrodas uz malas QR, tad ΔPXS laukums ir divas reizes mazāks par paralelograma PQRS laukumu.

Lemmas pierādījums: $L(PQRS)=PS\cdot h$ un $L(PXS)=\frac{1}{2}PS\cdot h$, tāpēc $L(PXS)=\frac{1}{2}L(PQRS)$.



6. zīm.



7. zīm.

Tagad atrisināsim doto uzdevumu. Saskaņā ar lemmu $L(ABK) = \frac{1}{2} L(ABCD)$ un $L(ABK) = \frac{1}{2} L(AMNK)$, tāpēc $\frac{1}{2} L(ABCD) = \frac{1}{2} L(AMNK)$, tātad $L(ABCD)=L(AMNK)$.

5. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Aplūkosim 1.zīm. rūtiņās ierakstītos skaitļus.

	e	f	i	j	k	...
a	b	c	d	x	y	

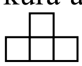
1.zīm.

Saskaņā ar pieņēmumu jāizpildās sakarībām

$a+b+c+e > 0$

$a+b+c+f < 0$

No tām seko, ka $e > f$. Līdzīgi iegūstam, ka $e>f>i>j>k> \ldots$ un $a>b>c>d>x>y> \ldots$.

Tā kā visi ierakstītie skaitļi ir veseli, tad, virzoties uz labo pusi, nonāksim apgabalā, kurā abās apskatāmajās horizontālēs ir tikai negatīvi skaitļi. Bet šajā apgabalā figūrā  ierakstīto skaitļu summa nevar būt pozitīva. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs un prasītā ierakstīšana nav iespējama.

2. Uzzīmēsim tik lielu riņķi, lai tā iekšpusē atrastos visi novilkto 10 taišņu krustpunkti. Tad katram bezgalīgajam apgabalam ir daļa ārpus riņķa, bet visi galīgie apgabali atrodas riņķa iekšpusē (tur atrodas arī bezgalīgo apgabalu daļas). Tāpēc bezgalīgo apgabalu ir tikpat, cik ir plaknes daļu ārpus riņķa. Ārpus riņķa ir 20 stari (pa diviem uz katras taisnes), kas savā starpā nekrustojas; tātad ārpus riņķa ir 20 plaknes daļas. Tas arī ir bezgalīgo apgabalu skaits.

3. Apzīmēsim meklējamos skaitļus ar x un y. Tad

$$x \cdot y = x+y$$
$$xy - x - y = 0$$
$$xy - x - y + 1 = 1$$
$$(x-1)(y-1) = 1$$

Tā kā x un y – naturāli skaitļi, tad $x-1 \geq 0$ un $y-1 \geq 0$. Skaitli 1 var sadalīt divu nenegatīvu veselu skaitļu reizinājumā tikai vienā veidā: $1=1\cdot1$. Tāpēc $x-1=1$ un $y-1=1$, no kurienes $x=2$ un $y=2$.

4. Apzīmēsim apskatāmā skaitļa A pirmo divu ciparu veidoto skaitli ar x, bet pēdējo divu ciparu veidoto skaitli - ar y. Tad $A=100\cdot x+y$. Tā kā A dalās ar x, tad arī y dalās ar x. Varam apzīmēt $y=x\cdot n$, n – naturāls skaitlis; tā kā $y\neq x$ (jo skaitlī A visi cipari ir dažādi), tad **n>1.** Tā kā $A=100\cdot x+y$ dalās ar y, tad iegūstam, ka

$$\frac{A}{y} = \frac{100\cdot x + y}{y} = \frac{100\cdot x}{n\cdot x} + 1 = \frac{100}{n} + 1 \text{ - vesels skaitlis;}$$

tātad **100 dalās ar n.** Tā kā neviens no skaitļa A cipariem nav 0, tad $x>10$; tāpēc **n<10** (ja būtu $n\geq10$, tad $y=x\cdot n>100$ – pretruna ar to, ka y – divciparu skaitlis). No trim izceltajiem apgalvojumiem seko, ka n=2, n=4 vai n=5.

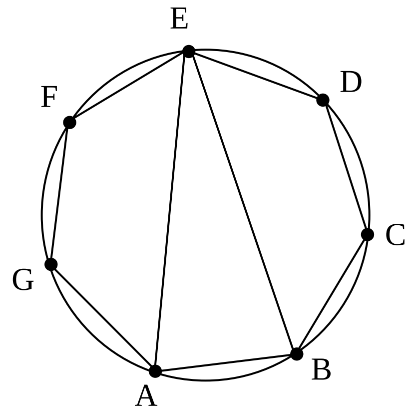
- Ja n=2, tad y=2x un $A=102x=17\cdot6\cdot x$ dalās ar 17.
- Ja n=4, tad y=4x un $A=104x=13\cdot8\cdot x$ dalās ar 13.

- Ja n=5, tad y=5x un A=105x=7·15·x dalās ar 7.

5. Apskatīsim risinājumu, kas pārbauda visus iespējamos sadalījumus. Cits ceļš aplūkots B5 uzdevuma atrisinājumā.

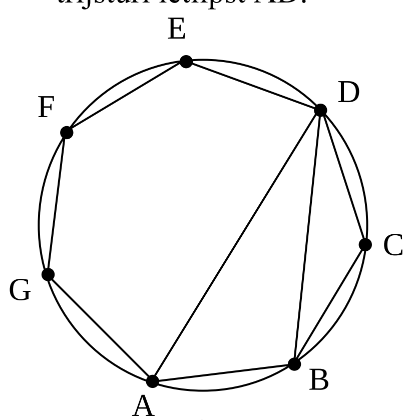
Apzīmēsim regulāro septiņstūri ar ABCDEFG. Šķirosim gadījumus atkarībā no tā, kuram trijstūrim pieder mala AB.

I. Mala AB ietilpst trijstūrī ABE (skat. 2.zīm.). Tad pats trijstūris ABE ir vienādsānu (AE=BE). Neatkarīgi no tā, kura diagonāle novilkta 4-stūrī AEFG resp. BEDC, viens no radušamies trijstūriem ir vienādsānu.

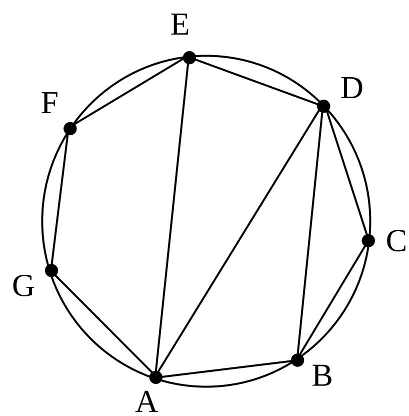


2.zīm.

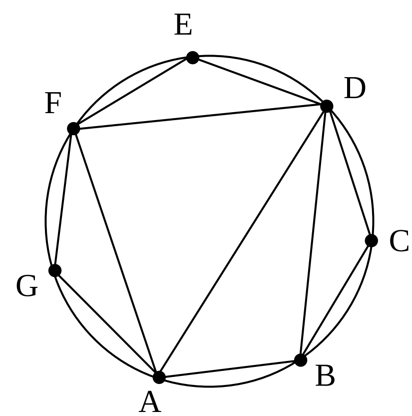
II. Mala AB ietilpst trijstūrī ABD (skat. 3.zīm.) Tad ΔBCD ir vienādsānu (CB=CD). Domājam, kā sadalīts piecstūris ADEFG. Šķirojam gadījumus atkarībā no tā, kurā trijstūrī ietilpst AD.



3.zīm.



4.zīm.



5.zīm.

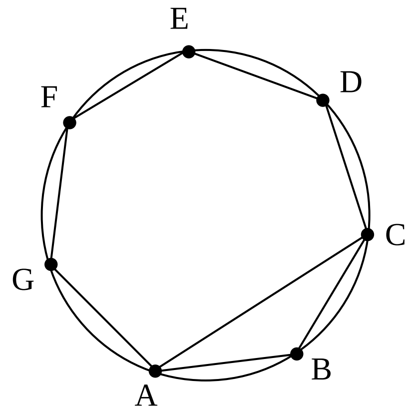
II$_1$. AD ietilpst trijstūrī AED; tas ir vienādsānu (AE=AD, skat. 4.zīm.). Lai kuru diagonāli novilktu četrstūrī AGFE, viens no radušamies trijstūriem būs vienādsānu.

II$_2$. AD ietilpst trijstūrī AFD (skat. 5.zīm.). Tad visi trijstūri AFD, AGF, DEF ir vienādsānu (AF=FD, AG=GF, FE=ED).

II$_3$. AD ietilpst trijstūrī AGD; spriežam analogi II$_1$ apakšgadījumam.

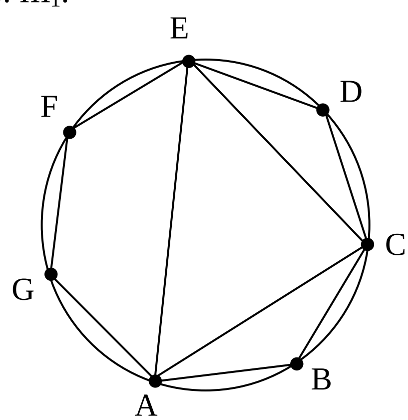
Gadījumu, kad mala AB ietilpst trijstūrī ABF, apskata analogi nupat aplūkotajam.

III. Mala AB ietilpst trijstūrī ABC (skat. 6.zīm.). Ievērosim, ka ΔABC ir vienādsānu (AB=BC). Tālāk šķirojam apakšgadījumus.



6.zīm.

III$_1$. AC ietilpst trijstūrī ACD. Izveidojas 3.zīm. attēlotajai līdzīga aina, kas jau izanalizēta II gadījumā.
III$_2$. AC ietilpst trijstūrī AEC (7.zīm.). Tad ΔEDC ir vienādsānu (ED=DC). Lai kuru diagonāli novilktu četrstūrī AEFG, viens no radušamies trijstūriem būs vienādsānu.
Apakšgadījumi, kad AC ietilpst trijstūrī AFC resp. AGC, līdzīgi apskatītajiem apakšgadījumiem III$_2$ resp. III$_1$.



7.zīm.

IV. Gadījums, kad mala AB ietilpst trijstūrī ABG, līdzīgs apskatītajam III gadījumam.

6. Vispirms uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām. Ir 2 iespējas:

1) svari atrodas līdzsvarā. Tādu stāvokli uz svaru kausiem izsaka tikai vienādība 1+4=2+3. Ar divām svēršanām nosakām abas smagākās monētas pāros (1; 4) un (2; 3). Salīdzinot tās savā starpā 4.svēršanā, noskaidrojam, kura no monētām ir 3g, kura – 4g monēta. Tad monēta, kas atradās uz viena kausa ar 4g smago monētu, sver 1g, bet tā monēta, kas atradās uz viena svaru kausa ar 3g smago monētu, attiecīgi sver 2g;
2) svari nav līdzsvarā. Ir divas iespējas: a) 1+2<3+4 un b) 1+3<2+4. Otrajā svēršanā salīdzina abas monētas no smagākā pāra. Smagākā no tām sver 4g. Trešajā svēršanā salīdzina vieglākā pāra monētas. Vieglākā no tām ir 1g monēta. Ceturtajā svēršanā salīdzina atlikušās divas vēl „neidentificētās” monētas: vieglākā no tām ir 2g smagā monēta, bet smagākā, attiecīgi, ir 3g smagā monēta.

B grupa

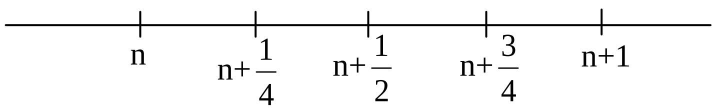
1. Ja a ir vesels skaitlis, tad arī 4a ir vesels skaitlis. Tad

$[4a] = 4a$, $[a] = [a+\frac{1}{4}] = [a+\frac{1}{2}] = [a+\frac{3}{4}] = a$

un vienādība ir pareiza, jo 4a = a+a+a+a.

Ja a nav vesels skaitlis, tad a atrodas starp diviem viens otram sekojošiem veseliem skaitļiem n un n+1, t.i., $n<a<n+1$.

Šķirosim gadījumus atkarībā no tā, kurai intervāla [n; n+1) ceturtdaļai pieder a (8.zīm.):



8.zīm.

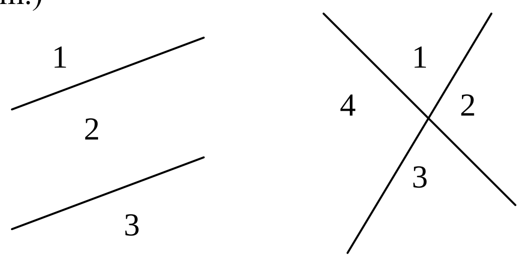
- Skaitlis a pieder intervāla pirmajai ceturtdaļai, t.i., $n<a<n+\frac{1}{4}$. Tad $4n<4a<4n+1$, $n+\frac{1}{4} < a+\frac{1}{4} < n+\frac{1}{2}$, $n+\frac{1}{2} < a+\frac{1}{2} < n+\frac{3}{4}$, $n+\frac{3}{4} < a+\frac{3}{4} <n+1$.
  Tāpēc $[4a]=4n$, $[a]=n$, $\left[a+\frac{1}{4}\right]=n$, $\left[a+\frac{1}{2}\right]=n$, $\left[a+\frac{3}{4}\right]=n$ un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka $4n=n+n+n+n$.
- Skaitlis a pieder intervāla otrajai ceturtdaļai, t.i., $n+\frac{1}{4} \le a < n+\frac{1}{2}$.
  Tad $4n+1 \le 4a < 4n+2$, $n+\frac{1}{2} \le a+\frac{1}{4} < n+\frac{3}{4}$, $n+\frac{3}{4} \le a+\frac{1}{2} <n+1$, $n+1 \le a+\frac{3}{4} <n+1\frac{1}{4}$. Tāpēc $[4a]=4n+1$, $[a]=\left[a+\frac{1}{4}\right]=\left[a+\frac{1}{2}\right]=n$ un $\left[a+\frac{3}{4}\right]=n+1$, un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka $4n+1=n+n+n+(n+1)$.

- Skaitlis a pieder intervāla trešajai ceturtdaļai, t.i., $n+\frac{1}{2} \le a < n+\frac{3}{4}$. Tad
  $4n+2 \le 4a < 4n+3$, $n+\frac{3}{4} \le a+\frac{1}{4} < n+1$, $n+1 \le a+\frac{1}{2} < n+1\frac{1}{4}$, $n+1\frac{1}{4} \le a+\frac{3}{4} < n+1\frac{1}{2}$. Tāpēc $[4a]=4n+2$, $[a]=\left[a+\frac{1}{4}\right]=n$ un $\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[a+\frac{3}{4}\right]=n+1$, un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka $4n+2 = n+n+(n+1)+(n+1)$.

- Skaitlis a pieder intervāla ceturtajai ceturtdaļai, t.i., $n+\frac{3}{4} \le a < n+1$. Tad

$4n+3 \le 4a < 4n+4$, $n+1 \le a+\frac{1}{4} < n+1\frac{1}{4}$, $n+1\frac{1}{4} \le a+\frac{1}{2} < n+1\frac{1}{2}$, $n+1\frac{1}{2} \le a+\frac{3}{4} < n+1\frac{3}{4}$. Tāpēc $[4a]=4n+3$, $[a]=n$ un $\left[a+\frac{1}{4}\right]=\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[a+\frac{3}{4}\right]=n+1$, un pierādāmās vienādības pareizība izriet no tā, ka $4n+3 = n+(n+1)+(n+1)+(n+1)$.

2. Acīmredzot, viena taisne sadala plakni 2 apgabalos, bet divas taisnes – ne vairāk kā 4 apgabalos (skat. 9.zīm.)



9.zīm.

Novelkot trešo taisni, uz tās rodas augstākais divi krustpunkti ar jau novilktajām. Šie jaunie krustpunkti sadala trešo taisni augstākais 3 daļās. Katra jaunās taisnes daļa sadala vienu no jau esošajiem apgabaliem divos, tāpēc apgabalu skaits pieaug par ne vairāk kā 3. Tāpēc triju taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 4+3 = 7 apgabali.
Līdzīgi turpinot, pakāpeniski iegūstam:
četru taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 7+4 = 11 apgabali
piecu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 11+5 = 16 apgabali
sešu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 16+6 = 22 apgabali
septiņu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 22+7=29 apgabali
astoņu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 29+8=37 apgabali
deviņu taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 37+9=46 apgabali
desmit taišņu gadījumā iespējami ne vairāk kā 46+10=56 apgabali.
Skaidrs, ka 56 apgabali radīsies tad, ja katras divas taisnes krustosies un visi krustpunkti būs dažādi. Lasītājs var patstāvīgi mēģināt pierādīt: ja n taisnēm pavisam ir x krustpunkti, tad radušos plaknes apgabalu skaits ir n+x+1.

3. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka vai nu ab=a+b un cd=c+d, vai arī ab=c+d un cd=a+b. No A2 uzdevuma risinājuma seko, ka pirmajā gadījumā a=b=2 un c=d=2; tas ir pretrunā ar doto, ka a, b, c, d – dažādi skaitļi. Tātad **ab=c+d** un **cd=a+b**.
No A2 uzdevuma risinājuma izriet arī: ja x≥2 un y≥2 - naturāli skaitļi, tad xy≥x+y (tiešām, xy-(x+y)=(x-1)(y-1)-1≥0). Tāpēc, ja mēs pieņemtu, ka visi skaitļi a, b, c, d ir vismaz 2, tad būtu ab≥a+b=cd≥c+d=ab. Skaidrs, ka abās vietās „≥" zīmes vietā jābūt „=", un tāpēc ab=a+b, no kurienes seko a=b=2 (kā A2 uzdevumā); tā ir pretruna. Tātad viens no skaitļiem a; b; c; d ir 1; varam pieņemt, ka a=1. Iegūstam b=c+d un cd=b+1. Tāpēc cd=c+d+1 un (c-1)(d-1)=2. Tā kā c un d – naturāli skaitļi, tad vai nu c-1=1 un d-1=2, vai arī c-1=2 un d-1=1. Tāpēc vai nu c=2; d=3, vai c=3; d=2. Abos gadījumos iznāk b=c+d=5.
Līdzīgi apskata gadījumus, kad vērtība „1" ir kādam no skaitļiem b; c; d.
Tātad viens no komplektiem {a; b} un {c; d} ir {2; 3}, bet otrs – {1; 5}.

4. Nē, tādu skaitļu nav.

Pieņemsim no pretējā, ka tādi skaitļi eksistē. No LKD(x;y)=104 seko, ka gan x, gan y dalās ar 104; tā kā 104=4·26, tad gan x, gan y dalās ar 4. Līdzīgi no LKD(x;z)=108 seko, ka gan x, gan z dalās ar 4. **Tātad y un z abi dalās ar 4.** Bet uzdevumā dots, ka LKD(y,z)=106=2·53. Tā ir pretruna, jo LKD(y,z) jādalās ar 4, ja gan y, gan z dalās ar 4.

5. Skaidrs, ka neviens no trijstūriem nesatur trīs 25-stūra malas. Tātad katrs trijstūris satur nevienu, vienu vai divas 25-stūra malas. Tā kā šādu malu ir 25, bet trijstūru ir 23, tad ir **vismaz 2** trijstūri, kas katrs satur divas 25-stūra malas. Tie abi ir vienādsānu. Ja ir vēl kāds šāds trijstūris, viss kārtībā. Pieņemsim, ka ir **tikai divi** trijstūri, kas katrs satur divas 25-stūra malas. Tad **katrs no pārējiem trijstūriem satur tieši vienu 25-stūra malu**, bet divas šī „pārējā" trijstūra malas ir 25-stūra diagonāles.

Apskatīsim abus tos trijstūrus, kas satur pa divām 25-stūra malām; sauksim tos par **bāzes trijstūriem.** Pārvietosimies no viena bāzes trijstūra uz otru, ar katru gājienu pārejot no iepriekšējā trijstūra uz tādu jaunu, kuram ar iepriekšējo ir kopēja mala (tā ir 25-stūra diagonāle). Saskaņā ar pieņēmumu, ka citu trijstūru, kas satur divas 25-stūra malas, bez bāzes trijstūriem nav, katrs gājiens noteikts viennozīmīgi. Pēc pirmā gājiena vienā pusē no trijstūra, kurā atrodamies, ir divas 25-stūra malas (tās, kas ietilpst pirmajā bāzes trijstūrī); ar katru gājienu šajā pusē esošo malu skaits aug par 1, ar priekšpēdējo gājienu kļūstot 23 (ar pēdējo mēs nonāksim otrā bāzes trijstūrī). Tāpēc būs tāds brīdis, kad šis skaits būs 12. Šai brīdī mēs atrodamies trijstūrī T, kam viena mala ir 25-stūra mala, bet 25-stūra pārējās 24 malas atrodas pa 12 uz katru pusi no trijstūra T. Tāpēc trijstūra T abas pārējās malas (tās, kas nav 25-stūra mala) ir vienādas, un T ir vienādsānu trijstūris.

6. Sauksim to monētu, kas nav ne 1g, ne 4g smaga, par A, bet pārējās – par B; C; D. Ar pirmo svēršanu salīdzinām B un C. Varam pieņemt, ka B>C.

Otrajā svēršanā uz viena svaru kausa novietojam A un D, bet uz otra B un C. Šķirojam trīs gadījumus.

1) A+D = B+C. Tas var būt tikai tad, ja A un D masas ir 1g un 4g, bet B un C masas ir 2g un 3g, vai otrādi: B un C masas – 1g un 4g, bet A un D masas – 2g un 3g. Tā kā A nesver ne 1g, ne 4g, tad B un C ir masas 1g un 4g; tā kā B>C, tad B sver 4g, bet C sver 1g. Ar trešo svēršanu noskaidrojam, kura no monētām A un D ir smagāka; tā sver 3g, bet otra – 2g.

2) A+D>B+C. Viegli pārbaudīt, ka vai nu A, vai D jābūt 4g smagai. Tā kā A nesver 4g, tad D sver 4g. Nevar būt, ka A sver 1g; tāpēc 1g sver vai nu B, vai C. Tā kā B>C, tad C sver 1g. Ar trešo svēršanu salīdzinām A un B; smagākā no tām sver 3g, vieglākā – 2g.

3) A+D<B+C. Viegli pārbaudīt, ka vai nu B, vai C jābūt 4g smagai. Tā kā B>C, tad B sver 4g. Nevar būt, ka C sver 1g; tāpēc vai nu A, vai D sver 1g. Tā kā A nesver 1g, tad D sver 1g. Ar trešo svēršanu salīdzinām A un C; smagākā no tām sver 3g, bet vieglākā sver 2g.

6. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

A grupa

1. Abos apskatāmajos gados ir 365 dienas. Ievērojam, ka $365=52\cdot 7+1$. **Katrās** 7 pēc kārtas ņemtās dienās ir viena pirmdiena, viena otrdiena, ..., viena svētdiena, tātad 364 pēc kārtas ņemtās dienās visu nedēļas dienu ir vienādi daudzumi. Tātad pirmā apskatāmā gada pēdējā diena ir sestdiena. Tāpēc otrais apskatāmais gads sākas un arī beidzas ar svētdienu, un svētdienu tajā ir visvairāk.

2. Apzīmēsim apskatāmos skaitļus ar

$0=x_1\le x_2\le x_3\le \ldots \le x_{10}\le x_{11}=1$.

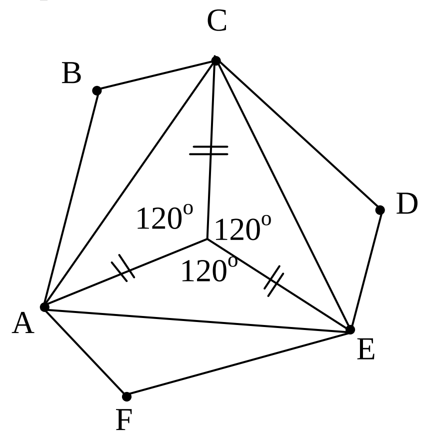
Apzīmēsim to vidējo aritmētisko lielumu ar a:

tātad $a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{11}}{11}$. Šķirosim divus gadījumus:

1) $a\le\frac{1}{2}$. Vienā daļā iekļaujam $x_1=0$, otrā daļā – visus citus skaitļus. Tad abu daļu vidējie aritmētiskie lielumi ir 0 un $\frac{11a}{10}$, un to starpība ir $\frac{11}{10}a\le\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{20}$.

2) $a\ge\frac{1}{2}$. Vienā daļā iekļaujam $x_{11}=1$, otrā daļā – visus citus skaitļus. Tad abu daļu vidējie aritmētiskie lielumi ir 1 un $\frac{11a-1}{10}$, un to starpība ir 1-$\frac{11a-1}{10}=\frac{11(1-a)}{10}\le\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{20}$.

3. Atbilde: jā, eksistē. Skat., piem., 1.zīm., kur ΔACE ir regulārs, bet ΔABC, ΔCDE un ΔEFA ir savā starpā vienādi dažādmalu trijstūri. Uzdevumā minēto pagriešanu var izdarīt ap ΔABC centru O par 120^o.



1.zīm.

4. Mazākie skaitļi, kurus var iegūt no 10, ir 13; 15; 16; 18; 19; 20; ... . Visus nākošos skaitļus no 10 var iegūt pēc sekojošas shēmas:

$18\rightarrow 21\rightarrow 24\rightarrow 27\rightarrow \ldots$

$19\rightarrow 22\rightarrow 25\rightarrow 28\rightarrow \ldots$

$20\rightarrow 23\rightarrow 26\rightarrow 29\rightarrow \ldots$

Viegli pārbaudīt, ka 13 un 16 nevar iegūt no 9, bet 15 nevar iegūt no 8. Tātad mazākā uzdevumā sasniedzamā 10 skaitļu kopējā vērtība varētu būt 18. To tiešām var sasniegt ar 33 gājieniem (sekojošā shēmā katram skaitlim no 1 līdz 10 uzrādīts „īsākais ceļš" līdz 18):

1→6→9→12→15→18
2→7→12→15→18
3→8→13→18
4→9→12→15→18
5→10→15→18
6→9→12→15→18
7→12→15→18
8→13→18
9→12→15→18
10→15→18

Katram skaitam izmantots maksimāli iespējamais gājienu „+5" skaits, ar kuru vispār var nokļūt līdz 18.
Tātad mazākais gājienu skaits, ar ko var visus skaitļus pārveidot par 18, ir 33.
Tomēr mēs vēl nevaram būt pārliecināti, ka uzdevuma atbilde ir „33 gājieni". Kā redzams no augstāk minētā, **dažreiz** lielākus skaitļus var sasniegt ar mazāku gājienu skaitu nekā mazākus. Varbūt kādu no kopīgām vērtībām 19; 20; 21; ... var sasniegt ar mazāk nekā 33 gājieniem?
Pieņemsim, ka $a \geq 21$. Tad $a-1>15$, $a-2>15$, ..., $a-5>15$. Tāpēc, lai sasniegtu vērtību a no 1; 2; 3; 4; 5, vajag vismaz 4 gājienus. Līdzīgi, lai sasniegtu vērtību a no 6; 7; 8; 8; 10, vajag vismaz 3 gājienus; tātad pavisam vajag vismaz $4 \cdot 5+3 \cdot 5=35$ gājienus.
Tā kā 35>33, mums jāpārbauda vēl tikai skaitļu 19 un 20 sasniegšanas iespējas.
Lai sasniegtu 19, īsākās gājienu sērijas ir šādas:

1→6→11→16→19
2→7→10→13→16→19
3→8→13→16→19
4→9→14→19
5→10→13→16→19
6→11→16→19
7→10→13→16
8→13→16→19
9→14→19
10→13→16→19.

Kopā izmantoti 34 gājieni.
Lai sasniegtu 20, īsākās gājienu sērijas ir šādas:

1→6→11→14→17→20
2→7→12→17→20
3→8→11→14→17→20
4→9→14→17→20
5→10→15→20
6→11→14→17→20
7→12→17→20
8→11→14→17→20

9→14→17→20
10→15→20

Kopā izmantoti 37 gājieni. Tātad uzdevuma atbilde ir „ar 33 gājieniem”.

5. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. No 9 skolniekiem pavisam var izveidot 36 pārus, ja skolnieku kārtība pārī nav svarīga. (Attēlosim skolniekus ar punktiem un katrus divus punktus savienosim ar līnijām. No katra punkta iziet 8 līniju gali. Tātad līniju galu ir $9 \cdot 8=72$. Tā kā katrai līnijai ir 2 gali, tad līniju ir $72:2 = 36$.) Katrā komisijā ir 3 skolēnu pāri, tāpēc pavisam 13 komisijās būtu $13 \cdot 3=39$ pāri. Tā kā $39>36$, tad kāds pāris noteikti atkārtotos.

6. Apzīmēsim 8g un 9g smago atsvaru daudzumus ar x resp. y. Tad $8x+9y=1728$. Ievērosim, ka 1728 dalās ar 8, tāpēc $9y=1728-8x$ dalās ar 8. No tā seko, ka y dalās ar 8. Tā kā 1728 dalās arī ar 9, līdzīgi iegūstam, ka x dalās ar 9. Sadalām 8 gramus smagos atsvarus grupās pa 9 un 9 gramus smagos atsvarus – grupās pa 8. Tad katras grupas svars ir 72g. Tā kā $1728:72=24$, uzdevuma prasības ir izpildītas.

B grupa

1. Atbilde: jā, eksistē.

Risinājums. Ja $a=4n$, $b=4n-1$ un $c=2n-1$, kur n- naturāls skaitlis, tad
$a^2-1=16n^2-1=(4n+1)\cdot(4n-1) =(4n+1)\cdot b$,
$b^2-1=16n^2-8n+1-1=16n^2- 8n=8n(2n-1) =8n\cdot c$,
$c^2-1=4n^2-4n+1-1=4n^2-4n=(n-1)\cdot 4n=(n-1)\cdot a$. Ņemot, piemēram, $n=1000$, iegūstam vajadzīgo.

2. Jā, var. Skaitļu 0 un 1 vidējā aritmētiskā vērtība ir $\frac{1}{2}$. Pārējo 9 skaitļu vidējā aritmētiskā vērtība v ir starp 0 un 1, jo visi skaitļi ir šajās robežās. Tāpēc tā atšķiras no $\frac{1}{2}$ ne vairāk kā par $\frac{1}{2}$, un $\frac{1}{2}<\frac{11}{20}$.

3. Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. Šādam 2006-stūrim leņķu summa nevar būt lielāka par $2006 \cdot 179^o=359074^o$. No otras puses, tā leņķu summa ir $180^o \cdot (2006-2)=180^o \cdot 2004=360720^o$. Tā kā $359074<360720$, tad tāds daudzstūris nevar eksistēt.

4. Atbilde: ar 11 gājieniem.

Risinājums. Vispirms parādīsim, kā ar 11 gājieniem mērķi var sasniegt.

Pirmajā gājienā apēdam pa 1 konfektei no visām kaudzītēm, kurās konfekšu ir nepāra daudzums. Tad visās kaudzītēs paliek pāra skaits konfekšu.

Otrajā gājienā apēdam pa 2 konfektēm no visām kaudzītēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar 4. Tad pēc otrā gājiena konfekšu skaits visās kaudzītēs dalās ar 4.

Līdzīgi turpinot, trešajā gājienā ēdīsim pa 4 konfektēm no visām kaudzītēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar 8, utt. Tad pēc 11. gājiena konfekšu skaits visās kaudzītēs dalīsies ar $2^{11}=2048$. Tā kā $2048>2006$, tad šis skaits var būt tikai 0.

Tagad parādīsim, ka ar 10 gājieniem nepietiek.

Sākumā visās kastēs ir atšķirīgi konfekšu daudzumi. Viena gājiena rezultātā dažādo konfekšu daudzumu skaits var samazināties ne vairāk kā 2 reizes. Tiešām, ja pirms gājiena izdarīšanas bija y dažādi konfekšu daudzumi, pēc tā izdarīšanas – x dažādi konfekšu daudzumi un y>2x, tad eksistē trīs dažādi konfekšu daudzumi (no y daudzumiem), kas gājiena rezultātā visi kļuvuši par vienu un to pašu no x daudzumiem; skaidrs, ka tas nav iespējams.

Tātad pēc 10 gājieniem būs vismaz $n = \dfrac{2006}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{10\ \text{reizes}}}$ dažādi konfekšu daudzumi. Tā kā $2006 > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{10\ \text{reizes}}$, tad n>1, tātad n≥2. Tātad visi konfekšu daudzumi kaudzēs nav vienādi, tātad, starp citu, tie nevar visi būt 0.

5. Tādas 12 komisijas izveidot var. Ja skolniekus apzīmēsim ar A, B, C, D, E, F, G, H, I, tad varam izveidot komisijas ABC, DEF, GHI, ADG, BEH, CFI, AEI, BFG, CDH, AFH, BDI, CEG.

6. Atbilde: 81 skaitli.

Risinājums. Vispirms parādīsim, ka vairāk par 81 skaitli izvēlēties nevar. Pieņemsim pretējo. Tad, tā kā 81>9·9, būtu jābūt vismaz 10 skaitļiem, kam ir viens un tas pats pirmais cipars (pirmajam ciparam ir tikai 9 dažādas vērtības). No šiem 10 skaitļiem atrastos divi, kam ir viens un tas pats otrais cipars (jo arī otrajam ciparam ir tikai 9 dažādas vērtības). Minētie skaitļi atšķiras ne vairāk kā vienā (trešajā) šķirā. Iegūta pretruna.

Tagad parādīsim, ka 81 skaitli saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem izvēlēties var. Uzrakstām vispirms visus 81 dažādos divciparu skaitļus, kas izveidojami no cipariem 1; 2; 3; ...; 9. Katram šādam skaitlim $\overline{ab}$ galā pierakstām tādu ciparu c, 1≤c≤9, ka a + b + c dalās ar 9.

Skaidrs, ka tāds cipars c noteikti eksistē: ja a + b dod atlikumu r, dalot ar 9, tad jāņem c = 9-r. Pierādīsim, ka iegūtajā 81 trīsciparu skaitļa sistēmā katri divi skaitļi atšķiras vismaz divās šķirās.

Apskatām divus skaitļus $\overline{a_1b_1c_1}$ un $\overline{a_2b_2c_2}$. Ja $\overline{a_1b_1}$ un $\overline{a_2b_2}$ atšķiras gan pirmajā, gan otrajā šķirā, viss kārtībā. Ja vai nu $a_1=a_2$, vai $b_1=b_2$ (**var izpildīties tikai viena** no šīm vienādībām; pieņemsim, ka $a_1=a_2$ un $b_1 \neq b_2$, otrs gadījums ir analoģisks) un ja papildus vēl būtu $c_1=c_2$, tad no tā, ka $a_1+b_1+c_1$ dalās ar 9 un $a_2+b_2+c_2$ dalās ar 9, sekotu, ka arī starpība

$(a_1+b_1+c_1) - (a_2+b_2+c_2) = (a_1-a_2)+(b_1-b_2)+ (c_1-c_2) = b_1-b_2$ dalās ar 9.

Bet b_1 un b_2 abi ir no kopas {1; 2; 3; ...; 9}, tāpēc to starpība var dalīties ar 9 vienīgi tad, ja $b_1=b_2$. Bet mēs jau zinām, ka $b_1 \neq b_2$. Iegūta pretruna. Tātad pieņēmums, ka $c_1=c_2$, ir nepareizs.