"Profesora Cipariņa klubs" 2005./06. m.g.

1. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums ir 12144. Atrast šos skaitļus.

2. Vai var plaknē atzīmēt 6 punktus tā, lai no katriem trim atzīmētajiem punktiem viens atrastos vienādos attālumos no abiem pārējiem?

3. Rindā uzrakstīti 7 veseli skaitļi. Katrs nākošais ir lielāks par iepriekšējo, pie tam visas starpības starp blakus uzrakstītiem skaitļiem ir vienādas savā starpā. Zināms, ka 1., 3., 5. un 7. skaitļa summa vienāda ar 2., 4. un 6. skaitļa summu. Aprēķināt visu uzrakstīto skaitļu summu.

4. Trijstūra katra mala ir vismaz 10 cm gara. Ar centru katrā trijstūra virsotnē uzzīmēts melns riņķis, kura laukums ir 1 cm^2. Kāds ir lielākais iespējamais melnā krāsā nokrāsotās trijstūra daļas laukums?

5. Divi spēlētāji burtnīcas lapā pamīšus krāso pa vienai rūtiņai: pirmais – baltā krāsā, otrais - sarkanā. Spēles mērķis ir nokrāsot „savā" krāsā kvadrātu, kas sastāv no 2×2 rūtiņām. Vai šajā spēlē iespējams noteikti uzvarēt, kaut arī pretinieks cenšas traucēt?

6. Piecos maisos katrā ir 10 monētas. Četros maisos visas monētas ir vienādas, bet piektajā maisā katra monēta ir par 1 gramu vieglāka nekā monētas pārējos maisos. Doti svari ar 2 svaru kausiem; iespējams nolasīt uz kausiem uzlikto smagumu starpību. Cik tieši sver katra monēta, nav zināms. Vai ar vienu svēršanu var uzzināt, kurā maisā ir vieglākās monētas?

B grupa

1. Dots, ka *a, b, c* ir pirmskaitļi, $a+b+c=38$ un $ab+ac+bc=395$. Atrodiet šos pirmskaitļus.

2. Trijstūra mediānu garumi ir 3 cm, 4 cm un 5 cm. Aprēķināt trijstūra laukumu.

3. Dots, ka $xy+z=xz+y=yz+x$. Pierādīt, ka $(x-y)(x-z)(y-z)=0$.

4. Vai eksistē tāds izliekts 7-stūris, kuram katra diagonāle ir perpendikulāra kādai citai šī 7-stūra diagonālei?

5. Desmit mucās ieliets attiecīgi 1*l*, 2*l*, ..., 10*l* ūdens. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties 2 mucas un ieliet no pirmās otrajā tik daudz ūdens, cik otrajā jau ir (protams, to var darīt tikai tad, ja pirmajā izvēlētajā mucā ūdens nav mazāk kā otrajā). Kāds lielākais ūdens daudzums var vienlaicīgi būt vienā mucā?

6. Garausīša krājkasītē ir 4 lati; viņam ir tikai 1 s, 2 s, 5 s un 10 s monētas. Vai Garausītis noteikti var nopirkt burkānu grozu, kas maksā 3 latus, ja pārdevējam nav naudas, ko izdot?

2. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Vai kvadrātu var sagriezt 3 daļās tā, lai no tām varētu salikt šaurleņķu trijstūri ar 3 dažāda garuma malām?

2. Ja n - naturāls skaitlis, tad ar n! sapratīsim visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n ieskaitot. Piemēram, $1!=1$; $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka $x!+y!$ beidzas ar cipariem …2005?

3. Ezerā peld ābols; $1/4$ no tā ir virs ūdens līmeņa, bet $3/4$ - zem. Pie ābola vienlaicīgi pielido putniņš un piepeld zivtiņa un sāk to ēst. Putniņš ēd 2 reizes ātrāk nekā zivtiņa. Kādu daļu ābola apēdīs putniņš?

4. Dots, ka triju dažādu naturālu skaitļu summa ir 100. No šiem skaitļiem izveido visas trīs iespējamās starpības, katrā pārī no lielākā skaitļa atņemot mazāko. Kāda ir lielākā iespējamā iegūto triju starpību summa?

5. Sūnu ciemā dzīvo 12 rūķīši. Ražas svētkos katrs no viņiem uzdāvināja katram citam rūķītim tik daudz ķirbju, cik apdāvinātajam rūķītim bija gadu. Vai var gadīties, ka pavisam tika uzdāvināti 123456 ķirbji?

6. Trijos vienāda tilpuma traukos ir 3 dažādas krāsas; katrs trauks piepildīts par divām trešdaļām. No viena trauka otrā var pārliet jebkuru šķidruma daudzumu (ja traukā, kurā lej, ir pietiekoši daudz vietas). Kā panākt, lai visos traukos būtu vienādi maisījumi? (Citu trauku nav; krāsu izliet nedrīkst.)

B grupa

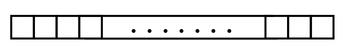
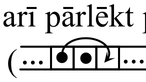
1. Kubs sastāv no $3\times 3\times 3$ kubiņiem. Vai var tos nokrāsot dzeltenā, zaļā un sarkanā krāsā tā, lai katrā kuba daļā ar izmēriem $3\times 1\times 1$, kas sastāv no trim kubiņiem, būtu sastopamas visas krāsas?

2. Ar *S(x)* sapratīsim naturāla skaitļa x ciparu summu. Vai eksistē tāds *x*, ka $x+S(x)+S(S(x))=2005$? Vai eksistē tāds *y*, ka $y+S(y)+S(S(y))+S(S(S(y)))=2005$?

3. Zināms, ka skaitlis n ir izsakāms kā triju naturālu skaitļu kvadrātu summa. Pierādīt, ka arī skaitļa n kvadrāts ir izsakāms šādā veidā.

4. Astrologs uzskata laika momentu par labu, ja pulksteņa stundu, minūšu un sekunžu rādītāji atrodas vienā pusē no kāda apaļas ciparnīcas diametra. (Rādītāji uzmontēti uz kopējas ass un kustas bez lēcieniem.) Vai diennaktī labā laika ir vairāk nekā sliktā?

5. Kuba virsotnēs pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 8. Pierādīt: var atrast tādas divas pretējās kuba virsotnes un savienot tās ar lauztu līniju, kas sastāv no trim kuba šķautnēm, ka šīs lauztās līnijas četrās virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 21.

6. Lenta sastāv no *n* vienādiem kvadrātiņiem: . Kreisajos 9 kvadrātiņos ir pa vienai figūriņai. Ar vienu gājienu figūriņa var vai nu pārbīdīties uz blakus pa labi esošo rūtiņu, ja tā ir brīva (), vai arī pārlēkt pāri blakus pa labi esošai figūriņai uz aiznākošo rūtiņu pa labi, ja tā ir brīva (). Kāda ir mazākā iespējamā *n* vērtība, pie kuras figūriņas kādreiz var nostāties kaut kādos 9 pēc kārtas esošos kvadrātiņos pretējā secībā nekā sākumā?

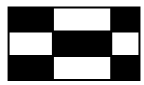
3. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Ar vienu gājienu var pārkrāsot rūtiņas jebkurā kvadrātā, kas sastāv no 2×2 rūtiņām: melnas - par baltām, baltas - par melnām. Vai ar šādiem gājieniem var panākt, lai visas šaha galdiņa rūtiņas vienlaicīgi būtu baltas?

2. Kaudzē esošos akmeņus var sadalīt gan trijās, gan četrās daļās ar vienādām kopējām masām (akmeņi netiek skaldīti). Kāds ir mazākais iespējamais akmeņu skaits šajā kaudzē?

3. Taisnstūris sadalīts 9 mazākos taisnstūros. Vai melno un balto laukumu summas var būt vienādas (1.zīm.)?


1. zīm.

4. Apskatām 18 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Zināms, ka sešu šo skaitļu summa ir pirmskaitlis. Vai 12 atlikušo skaitļu summa arī var būt pirmskaitlis?

5. No skaitļiem 7; 10; 27; 35; 45; 63 četri skaitļi ir trīsciparu skaitļa n dalītāji, bet divi - nav. Atrast n.

6. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa nokrāsota balta, zaļa vai sarkana. Pierādīt: var pārkrāsot ne vairāk kā 9 rūtiņas tā, lai kvadrātu varētu pārlocīt pa kādu diagonāli vai pa kādu viduslīniju, un nevienā vietā nesaskartos dažādi nokrāsotas daļas.

B grupa

1. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Vai katrā rūtiņā var ierakstīt vienu no skaitļiem 0; 1; 2 tā, lai rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas visas būtu dažādas?

2. Simts maisos kopā ir 100 kg cukura. Maisu *x* sauc par vieglu, ja ir vismaz 50 citi maisi, katrs no kuriem ir vismaz 4 reizes smagāks par maisu *x*. Cik kopā var svērt visi vieglie maisi?

3. Kāds ir lielākais daudzums dažādu naturālu skaitļu, no kuriem katri trīs summā dod pirmskaitli?

4. Punkti *A, B, C, D* atrodas uz vienas taisnes šādā secībā, E atrodas ārpus šīs taisnes. Visi 6 trijstūri, kam virsotnes ir 3 no minētajiem punktiem, ir vienādsānu. Aprēķināt trijstūra *AED* leņķus.

5. Nepāra naturālu skaitli n dalīja ar 2; 3; 4; …; 2006. Tieši vienā gadījumā dalīšana notika bez atlikuma, un visi citās dalīšanās iegūtie atlikumi bija dažādi. Pierādīt: n izdalījās bez atlikuma ar skaitli, kas lielāks par 1003.

6. Rindā stāv 10 bērni. Brīdi pa brīdim divi blakus esoši bērni mainās vietām. Katri divi bērni drīkst savstarpēji mainīties vietām tikai vienreiz. Pierādīt: neatkarīgi no tā, kā šis process ticis organizēts sākumā, to iespējams pabeigt tā, ka notikušas maiņas starp visiem 45 bērnu pāriem.

4. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Tabula sastāv no 20 rindiņām un 30 kolonnām.. Katrā no 600 rūtiņām ierakstīts naturāls skaitlis. Visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Katrā rindiņā ierakstīti vismaz 15 pāra skaitļi. Pierādīt: ir tāda kolonna, kurā ierakstīti vismaz 10 pāra skaitļi.

2. Trijstūra *ABC* malu viduspunkti ir *M, N* un *K*. Kuram punktam attālumu summa līdz sešiem punktiem *A, B, C, M, N, K* ir vismazākā?

3. Rindā augošā secībā uzrakstīja visus naturālos skaitļus no 1 līdz 10000. Pēc tam izsvītroja visus tos skaitļus, kas nedalās ne ar 5, ne ar 7.
a) cik skaitļu palika neizsvītroti?
b) kāds ir 2006.-ais neizsvītrotais skaitlis?

4. Pieci punkti atrodas izliekta piecstūra virsotnēs. Trīs pēc kārtas ņemtās virsotnēs ir pa figūriņai; divas virsotnes ir tukšas. Ar vienu gājienu var izvēlēties vienu figūriņu un pārbīdīt to pa diagonāli uz tukšu virsotni. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, ka viena no figūriņām atrodas sākotnējā vietā, bet abas pārējās ir apmainījušās vietām?

5. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 2006 ieskaitot var sadalīt trīs daļās tā, lai visu daļu summas savā starpā būtu vienādas?

6. Dots: kādā 36-ciparu skaitlī katrs cipars no 1 līdz 9 sastopams tieši 4 reizes. Turklāt katrs cipars, izņemot 9, ir mazāks par nākošo ciparu (ja vien nav pēdējais apskatāmā skaitļa cipars). Ar kādu ciparu beidzas apskatāmais skaitlis?

B grupa

1. Olimpiādē bija jārisina daži viegli un daži grūti uzdevumi. Par atrisinātu vieglu uzdevumu piešķīra 3 punktus, par atrisinātu grūtu uzdevumu piešķīra 4 punktus. Par neatrisinātu vieglu uzdevumu dalībniekam atskaitīja 1 punktu. Jānītis atrisināja 12 uzdevumus un ieguva 18 punktus. Cik pavisam bija vieglu uzdevumu?

2. Vai var pa apli uzrakstīt pa vienai reizei visus naturālos skaitļus a) no1 līdz 12 ieskaitot, b) no 1 līdz 13 ieskaitot tā, lai katru tādu divu skaitļu summa, starp kuriem uzrakstīti tieši 2 citi skaitļi, dalītos ar 3?

3. Plaknē novilktas 5 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. a) cik pavisam izveidojas trijstūru? (Uzskaitām arī trijstūrus, kas sastāv no vairākām daļām.) b) pierādīt, ka ne vairāk kā 5 trijstūri ir šaurleņķu.

4. Naturāla skaitļa n četru naturālu dalītāju summa ir pirmskaitlis. Pierādīt, ka šo dalītāju reizinājums nav lielāks par n^3.

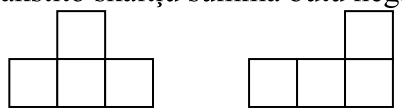
5. Doti 23 taisnstūri, kuru malu garumi ir veseli skaitļi un no kuriem neviens nav kvadrāts. Ir zināms, ka no šiem taisnstūriem var vienlaicīgi salikt 6 kvadrātus ar izmēriem 8×8 (bez caurumiem un bez pārklāšanās).
Pierādīt, ka no šiem pašiem 23 taisnstūriem var vienlaicīgi salikt 2 taisnstūrus, kuru laukumu starpība nav lielāka par 48.

6. Paralelogramiem *ABCD* un *AMNK* ir kopīga virsotne *A*. Virsotne *B* atrodas uz malas *MN*, bet virsotne *K*- uz malas *CD*. Pierādīt, ka abu paralelogramu laukumi ir vienādi savā starpā.

5. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Vai var katrā rūtiņu lapas rūtiņā ierakstīt pa veselam skaitlim tā, lai katrā tādā figūrā, kāda redzama 1a. zīm., ierakstīto skaitļu summa būtu pozitīva, bet katrā tādā figūrā, kāda redzama 1b. zīm., ierakstīto skaitļu summa būtu negatīva?



1a. zīm. 1b. zīm.

2. Plaknē novilktas 10 taisnes. Tās sadala plakni apgabalos, no kuriem daži ir galīgi (trijstūri, četrstūri utt.), bet citi – bezgalīgi. Kāds ir lielākais iespējamais bezgalīgo apgabalu skaits?

3. Kādu divu naturālu skaitļu reizinājums vienāds ar to summu?

4. Četrciparu naturālā skaitlī A neviens cipars nav 0 un visi cipari ir dažādi. Zināms, ka A dalās gan ar savu divu pirmo ciparu veidoto skaitli, gan ar savu divu pēdējo ciparu veidoto skaitli. Pierādīt, ka A dalās vai nu ar 7, vai ar 13, vai ar 17.

5. Regulārs 7-stūris sadalīts 5 trijstūros, novelkot diagonāles, kas savā starpā nekrustojas. Pierādīt, ka vismaz 3 no šiem trijstūriem ir vienādsānu.

6. Četras pēc ārējā izskata vienādas monētas sver attiecīgi 1*g*, 2*g*, 3*g* un 4*g*. Kā ar 4 svēršanām uz vienas sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, cik sver katra monēta?

B grupa

1. Ar $[x]$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Piemēram, $\left[4\frac{1}{3}\right]=4$; $[5]=5$.

Pierādīt, ka katram a pastāv vienādība

$$[4a]=[a]+\left[a+\frac{1}{4}\right]+\left[a+\frac{1}{2}\right]+\left[a+\frac{3}{4}\right].$$

2. Kāds ir lielākais skaits **visu** apgabalu, kas var rasties A grupas 2.uzdevumā?

3. Dots, ka *a, b, c, d* ir dažādi naturāli skaitļi. Uz vienas lapas uzrakstīti reizinājumi ab un cd, uz otras lapas summas $a+b$ un $c+d$. Izrādās, ka uz abām lapām uzrakstīti vieni un tie paši skaitļi. Kādas ir *a, b, c, d* vērtības?

4. Vai pastāv tādi naturāli skaitļi *x, y* un *z*, ka *x* un y lielākais kopīgais dalītājs ir 104, *y* un *z* lielākais kopīgais dalītājs ir 106 un *x* un *z* lielākais kopīgais dalītājs ir 108?

5. Regulārs 25-stūris sadalīts 23 trijstūros, novelkot diagonāles, kas savā starpā nekrustojas. Pierādīt, ka vismaz 3 no šiem trijstūriem ir vienādsānu.

6. Pieņemsim, ka A grupas 6.uzdevumā par vienu monētu papildus zināms, ka tā nesver ne 1*g*, ne 4*g*. Vai ar 3 svēršanām var noskaidrot, cik sver katra monēta?

6. nodarbības uzdevumi

A grupa

1. Neviens no diviem pēc kārtas ņemtiem gadiem nav garais gads. Pirmajā no tiem sestdienu ir vairāk nekā ceturtdienu. Kuru nedēļas dienu ir visvairāk otrajā no šiem gadiem?

2. Viens no 11 skaitļiem ir 0, otrs 1, pārējie atrodas starp 0 un 1. Pierādīt: šos skaitļus var sadalīt divās daļās tā, ka abu daļu vidējie aritmētiskie lielumi atšķiras viens no otra ne vairāk kā par $\frac{11}{20}$.

3. Vai eksistē izliekts daudzstūris, kam nav ne simetrijas ass, ne simetrijas centra, bet kuru var pagriezt ap kādu punktu par leņķi, kas mazāks par 180°, tā, lai iegūtais daudzstūris sakristu ar sākotnējo?

4. Rindā uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 10, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu var vienam no tiem pieskaitīt vai nu 3, vai 5. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

5. Klasē ir 9 skolēni. Vai var izveidot 13 komisijas, kas katra sastāv no 3 skolēniem, tā, lai nekādi divi skolēni nebūtu kopā vairāk kā vienā komisijā?

6. Jānim ir daži $8g$ smagi atsvari un daži $9g$ smagi atsvari (ir gan viena, gan otra veida atsvari). Visas monētas kopā sver 1728 gramus. Pierādīt, ka tos var sadalīt 24 kaudzītēs ar vienādām masām.

B grupa

1. Vai eksistē tādi dažādi naturāli skaitļi *a, b* un *c*, kas visi lielāki par 1, kuru summa lielāka par 2006 un kas apmierina sakarību: a^2-1 dalās ar b, b^2-1 dalās ar *c* un c^2-1 dalās ar a?

2. Vai A grupas 2. uzdevumā skaitli $\frac{11}{20}$ var aizstāt ar mazāku, lai uzdevuma apgalvojums paliktu spēkā?

3. Vai eksistē izliekts 2006 – stūris, kam visu leņķu lielumi izsakās ar veselu skaitu grādu?

4. Dotas 2006 konfekšu kaudzītes, kurās ir attiecīgi 1; 2; 3; ...; 2005; 2006 konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties dažas (varbūt vienu pašu) kaudzītes un apēst no tām vienādus konfekšu daudzumus. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var apēst visas konfektes?

5. Atrisināt A grupas 5. uzdevumu, ja jāveido 12 komisijas.

6. Kādu lielāko daudzumu trīsciparu skaitļu var izveidot, ja nedrīkst izmantot ciparu 0 un katriem diviem skaitļiem jāatšķiras vienam no otra vismaz divās šķirās?