2006./2007. mācību gads

1.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Dosim divus šī uzdevuma atrisinājumus.

1. risinājums. Nav grūti pārliecināties, ka $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$, $120\cdot6=720$, $720\cdot7=5040$, $5040\cdot8=40320$, $40320\cdot9=362880$, $362880\cdot10=3628800$, $3628800\cdot11=39916800$, $39916800\cdot12=479001600$ un
$479001601:13=36846277$
Tomēr skaidrs, ka šādu „metodi" būs grūti vai pat neiespējami lietot gadījumos, kad tiks apskatīti lielāki skaitļi.

2. risinājums. Sagrupēsim reizinātājus pa pāriem, pierakstot reizinājumus mums izdevīgā formā:

$$1\cdot12=13-1$$
$$2\cdot7=14=13+1$$
$$3\cdot9=27=2\cdot13+1$$
$$4\cdot10=40=3\cdot13+1$$
$$5\cdot8=40=3\cdot13+1$$
$$6\cdot11=66=5\cdot13+1$$

Tātad mums jānoskaidro, vai izteiksme

$$\mathrm{I}=(13-1)\cdot(13+1)\cdot(2\cdot13+1)\cdot(3\cdot13+1)\cdot(3\cdot13+1)\cdot(5\cdot13+1)+1$$

dalās ar 13.

Padomāsim, kas notiks, ja sešu iekavu reizinājumā atvērsim iekavas. Radīsies summa (apzīmēsim to ar S), kas sastāvēs no daudziem saskaitāmajiem. Katrs saskaitāmais būs reizinājums, kas saturēs 6 reizinātājus - pa vienam no katras iekavas visās iespējamās kombinācijās.

Ievērosim, ka katrās iekavās viens no saskaitāmajiem dalās ar 13. Ja 6 reizinātāju reizinājumā **kaut viens** no reizinātājiem dalās ar 13, tad arī pats reizinājums dalās ar 13. Tātad summā S gandrīz visi saskaitāmie dalās ar 13, izņemot vienu - to, kurš veidojas kā $(-1)\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$ (ņemot no katras iekavas otro saskaitāmo un tos sareizinot savā starpā). Šī saskaitāmā vērtība ir (-1), un tas saīsinās ar izteiksmē I ietilpstošo saskaitāmo (+1). Tātad I izsakās kā to S locekļu summa, kuri dalās ar 13; tātad I dalās ar 13.

Piezīme. Līdzīgā ceļā, tikai izdarot apvienošanu pāros nevis ar konkrētu piemēru, bet „vispārīgā veidā" (tāda iespēja apvienot reizinātājus prasa īpašu pamatojumu), var pierādīt **Vilsona teorēmu:**

ja p-pirmskaitlis, tad $\mathbf{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(p-2)(p-1)+1}$ dalās ar p.

2. a) jā, var. Piemērs:

1. grupa - {9; 6}
2. grupa - {8; 7}
3. grupa - {1; 2; 3; 4; 5}.

b) nē, nevar. Pieņemsim pretējo - apvienošana izdarīta, un katras grupas skaitļu summa ir S. Tad visās 3 grupās iegūto skaitļu summa ir $S+S+S=3\cdot S$. No otras puses, šī summa ir $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$. Tātad jāpastāv vienādībai $3\cdot S=55$, no kurienes $S=18\frac{1}{3}$. Bet tas nav iespējams, jo S ir veselu skaitļu summa, tātad vesels skaitlis. Tātad iegūta pretruna, un sākotnējais pieņēmums ir nepareizs.

c) Skaidrs, ka uzdevuma prasības nav izpildāmas pie n = 1 un pie n = 2 (vispār nevar izveidot nekādas trīs grupas), pie n = 3 (grupa, kurā ir skaitlis 3, ir ar tikpat lielu summu kā abas pārējās grupas **kopā** - vienā no tām ir skaitlis 1, otrā - skaitlis 2) un pie n = 4 (jo $1+2+3+4=10$, bet 10 nedalās ar 3; spriežam kā b) gadījumā). Savukārt pie n = 5 uzdevuma prasības ir izpildāmas - var veidot grupas {1; 4}, {2, 3}, {5}. Atliek apskatīt gadījumus $n\geq6$. Spriežot kā b) gadījumā, varam secināt: lai sadalīšana būtu iespējama, **noteikti nepieciešams**, lai summa $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ dalītos ar 6. Noskaidrosim, kurām n vērtībām īpašība izpildās.

Uzrakstām summu S divas reizes, vienreiz rakstot saskaitāmos augošā, bet otrreiz - dilstošā secībā:

$$S = 1 \;+\; 2 \;+\; 3 \;+\; 4 \;+ \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + \;3\; + \;2\; + \;1$$

Saskaitīsim šīs vienādības, labajā pusē grupējot pāros saskaitāmos, kas uzrakstīti viens zem otra:

$$\begin{aligned} 2S = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + (4+(n-3)) + \ldots + \\ + ((n-2)+3) + ((n-1)+2) + (n+1) \end{aligned} \qquad (*)$$

Redzam, ka katra šeit **uzrakstītā** pāra summa ir n + 1: $1+n = n+1$, $2+(n-1) = n+1$, $3+(n-2) = n+1$ utt. Viegli saprast, ka tā ir arī pāros, kas iegūti, saskaitot ar daudzpunktiem apzīmētos saskaitāmos: katrs nākošais saskaitāmais pirmajā rindā par 1 lielāks nekā iepriekšējais, bet katrs nākošais saskaitāmais otrajā rindā par 1 mazāks nekā iepriekšējais, tāpēc to abu summa ir tāda pati kā abu iepriekšējo saskaitāmo summa. Tātad visu saskaitāmo summa vienādības (*) labajā pusē ir $n \cdot (n+1)$, jo tur pavisam ir n pāru summas, katrai no kurām vērtība ir n+1.

Tātad (*) pārveidojas par

$$2S = n(n+1),$$

no kurienes $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Skaidrs, ka $n(n+1)$ dalās ar 2, jo vai nu n, vai n + 1 ir pāra skaitlis. Lai S dalītos ar 3, nepieciešams, lai vai nu n, vai n + 1 dalītos ar 3. **Jau šeit varam secināt: ja ne n, ne n + 1 nedalās ar 3, tad uzdevumā prasītā sadalīšana nav iespējama.**

Tālāk parādīsim: **ja $n \geq 6$ un vai nu n, vai $n+1$ dalās ar 3, tad skaitļus var sadalīt tā, kā uzdevumā prasīts.** (Tam vajadzīgs pamatojums, jo mēs jau redzējām, ka, piemēram, sadalīšana nav iespējama pie n=2 , kaut arī 2+1 dalās ar 3, un pie n=3, kaut arī 3 dalās ar 3.)

A. Apskatīsim vispirms skaitļus $n \geq 6$, kas dalās ar 3. Tie ir 6; 9; 12;... .

Skaitļus no 1 līdz 6 var sadalīt, piemēram, šādi:

I grupa	II grupa	III grupa
1; 6	2; 5	3; 4

Lai sadalītu skaitļus no 1 līdz 9, nupat parādītais sadalījums jāpapildina ar skaitļiem 7; 8; 9. Darīsim to šādi:

lielāko no pievienojamiem skaitļiem (šai gadījumā 9) pievienojam grupai, kurā patlaban ir skaitlis 1, t.i., I grupai;

skaitli 1 pārceļam uz kādu no abām pārējām grupām un turpat pievienojam mazāko no pievienojamiem skaitļiem (šai gadījumā skaitli 7) – pieņemsim, tas notiek ar II grupu;

vidējo no pievienojamiem skaitļiem (šai gadījumā 8) pievienojam grupai, kam pagaidām nekas pievienots – šai gadījumā III grupai.

Tagad I grupas skaitļu summa palielinājusies par 9-1=8; II grupas skaitļu summa palielinājusies par 7+1=8; III grupas skaitļu summa palielinājusies par 8.

Tā kā grupu summas bija vienādas **pirms** šim operācijām un tās palielinājušās par vienādiem lielumiem, tad tās ir vienādas arī tagad.

Tagad izveidotās grupas ir šādas:

I grupa	II grupa	III grupa
6; 9	1; 2; 5; 7	3; 4; 8

Lai sadalītu skaitļus no 1 līdz 12, šim sadalījumam jāpievieno skaitļi 10; 11; 12. To izdara tāpat, kā nupat redzējām: skaitli 12 pievieno II grupai, skaitli 1 pārceļ uz I grupu un I grupai pievieno arī skaitli 10, bet III grupai pievieno skaitli 11. Līdzīgi turpinot, pakāpeniski veido sadalījumus skaitļiem no 1 līdz 15; no 1 līdz 18; no 1 līdz 21 utt.

B. Tagad apskatīsim skaitļus $n \geq 6$, kam piemīt īpašība „n+1 dalās ar 3”. Tie ir skaitļi 8; 11; 14; 17; ... . Mums svarīgākais ir tas, ka arī šo skaitļu virknē, tāpat kā nupat apskatītajā skaitļu virknē 6; 9; 12;..., katrs nākošais skaitlis ir par 3 lielāks nekā iepriekšējais.

Vispirms sadalām grupās skaitļus no 1 līdz 8:

I grupa	II grupa	III grupa
4; 8	5; 7	1; 2; 3; 6

Sadalījumu skaitļiem no 1 līdz 11 iegūstam no šī sadalījuma tāpat kā iepriekš: pievienojam III grupai skaitli 11, pārceļam 1 uz I grupu un I grupai pievienojam arī skaitli 9, bet II grupai pievienojam skaitli 10. Iegūstam sadalījumu:

I grupa	II grupa	III grupa
1; 4; 8; 9	5; 7; 10	2; 3; 6; 11

Līdzīgi no šī sadalījuma iegūstam sadalījumu skaitļiem no 1 līdz 14, no tā – sadalījumu skaitļiem no 1 līdz 17, utt.

Līdz ar to uzdevums atrisināts.

3. Apzīmēsim kvadrāta centru ar O. Pierādīsim, ka vasarnīca jāceļ punktā O.

Apskatīsim **jebkuru** citu punktu X. Tas nepieder vismaz vienai no taisnēm AC un BD (ja X piederētu **gan** AC, **gan** BD, tad X būtu AC un BD krustpunkts un sakristu ar O). Pieņemsim, ka X nepieder taisnei AC. Tad punkti A, C, X ir trijstūra virsotnes. Saskaņā ar trijstūra nevienādību

$AX+CX>AC$ (1)

Katriem 3 punktiem B, D, X izpildās nevienādība

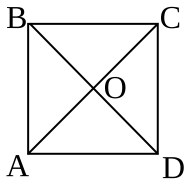
$BX + DX \geq BD$ (2)

No (1) un (2) acīmredzami seko

$AX+BX+CX+DX>AC+BD$ (3)

Savukārt (skat. 1. zīm.)

$AO+BO+CO+DO=AC+BD$ (4)



1. zīm.

No (3) un (4) seko, ka O attālumu summa līdz punktiem A, B, C, D ir lielāka nekā X attālumu summa līdz punktiem A, B, C, D.

Līdzīgu secinājumu tādā pašā ceļā iegūstam, ja X gan pieder taisnei AC, bet nepieder taisnei BD.

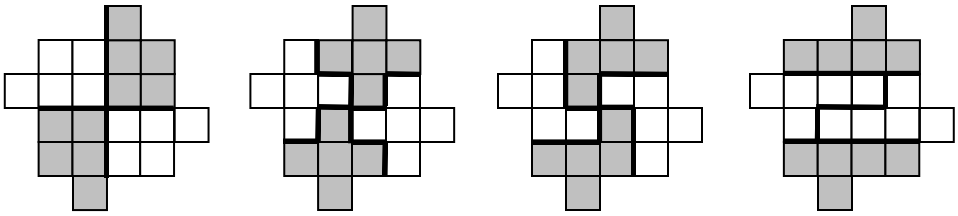
Tātad Cipariņa vasarnīca jāceļ punktā O.

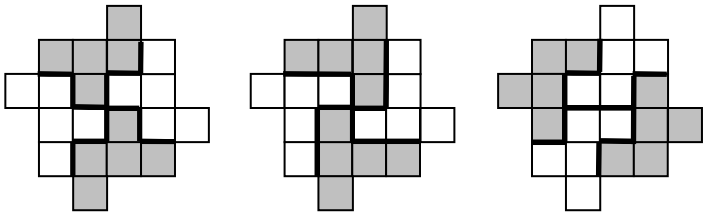
4. **Atbilde**: a) jā, eksistē; b) nē, neeksistē.

Risinājums. a) piemēram, var ņemt skaitļus 39 un 40.

b) atceramies dalāmības pazīmi ar 3: naturāls skaitlis n dalās ar 3 tad un tikai tad, ja n ciparu summa dalās ar 3. Ja eksistētu tādi divi skaitļi, par kādiem jautāts uzdevumā, tad tie abi dalītos ar 3. Bet katri divi skaitļi, kas abi dalās ar 3, atšķiras viens no otra vismaz par 3. Tātad tādu divu skaitļu, par kādiem jautāts uzdevumā, nevar būt.

5. Skat. 2. zīm.

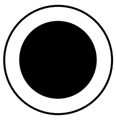




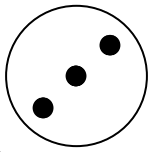
2. zīm.

6. Pareizi spēlējot, Andris var uzvarēt, kaut arī Bruno censtos viņam traucēt.

Ar pirmo gājienu Andris noliek monētu tieši galda centrā. Palikusī vēl neaizņemtā galda daļa ir simetriska attiecībā pret galda centru. **Ja** Bruno var nolikt monētu galda neaizņemtajā daļā (tas nebūtu iespējams, ja galds būtu ļoti mazs – tikai nedaudz lielāks par 1 santīma monētu, skat. 3. zīm.), tad Andris var nolikt monētu simetriski Bruno noliktajai monētai attiecībā pret galda centru. Brīva galda virsma pēc šī Andra gājiena atkal ir simetriska (skat. 4. zīm.)



3. zīm.

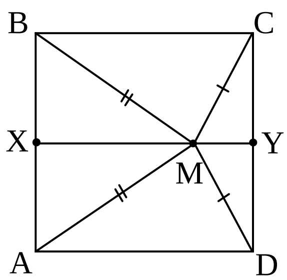


4. zīm.

Ja Bruno var nolikt savu kārtējo monētu, tad minētās simetrijas dēļ Andris var atkal atbildēt viņam ar simetrisku gājienu; pēc tam brīvā galda virsma atkal ir simetriska, utt. Tātad, **ja** Bruno var izdarīt savu kārtējo gājienu, **tad**, šādi spēlējot, Andris var viņam atbildēt ar savu kārtējo gājienu. Tātad Andrim gājienu nepietrūks. Tā kā **kādam** gājienu **noteikti** pietrūks, jo uz galda var novietot tikai galīgu skaitu monētu, lai tās nesaskartos, tad gājienu pietrūks Bruno. Šai brīdī Andris būs uzvarējis.

7. Ievērosim, ka $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ un $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Tāpēc 300 skaitļu „5” reizinājums vienāds ar 100 skaitļu „125” reizinājumu, bet 500 skaitļu „3” reizinājums vienāds ar 100 skaitļu „243” reizinājumu. Tagad skaidrs, ka otrais reizinājums ir lielāks.

8. Aplūkosim gadījumu, kad Maijiņa ceļ mājiņu kvadrāta ABCD iekšpusē. Apzīmēsim malu AB un CD viduspunktus attiecīgi ar X un Y. Kvadrāts ABCD ir simetrisks attiecībā pret taisni XY (skat. 5. zīm.)



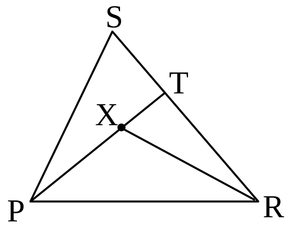
5. zīm.

Tāpēc, ja Maijiņa uzcels savu mājiņu M jebkurā vietā nogriežņa XY iekšpusē, tad izpildīsies sakarības $MA = MB$ un $MC = MD$; tāpēc $MA + MC = MB + MD$, un uzdevuma prasības būs izpildītas.

Līdzīgi pierāda, ka Maijiņa var uzcelt savu mājiņu jebkurā vietā tā nogriežņa iekšpusē, kas savieno malu BC un AD viduspunktus.

Pierādīsim, ka nevienā cita vietā Maijiņa savu mājiņu uzcelt nevar.

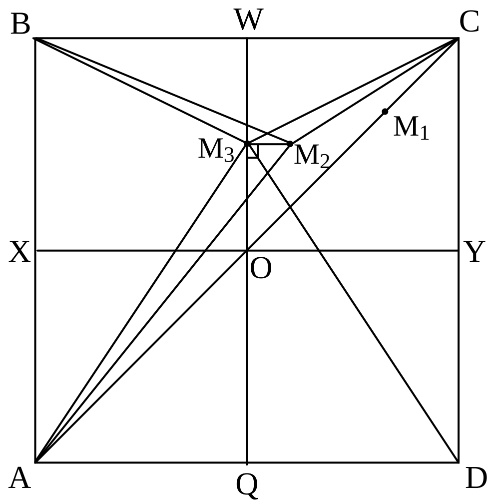
Lemma. Ja punkts X atrodas trijstūra PRS iekšpusē, tad $PX + XR < PS + SR$.



6. zīm.

Tiešām (skat. 6. zīm.), pagarinām PX līdz krustpunktam T ar malu SR. Tad saskaņā ar trijstūra nevienādību
$PX+XR<PX+(XT+TR)=(PX+XT)+TR=PT+TR<(PS+ST)+TR=PS+(ST+TR)=$
$=PS+SR$, un vajadzīgais pierādīts.

Apzīmēsim ar X, W, Y, Q kvadrāta ABCD malu viduspunktus (skat. 7. zīm.)



7. zīm.

Ja Maijiņa uzceltu savu mājiņu M citur, nevis uz kāda no nogriežņiem XY un WQ, tad M atrastos vienā no daļām, kurās šie nogriežņi sadala ABCD; varam pieņemt, ka M atrodas daļā OWCY (skat. 7. zīm.).

Ja M ir uz nogriežņa OC (piem., punkts M_1), tad

$M_1A+M_1C=AC=BD<M_1B+M_1D$ (saskaņā ar trijstūra nevienādību); tātad attālumu summa no M_1 līdz votivapām mazāka nekā attālumu summa no M_1 līdz šillišallām, bet tā nedrīkst būt. Ja punkts M neatrodas uz AC, tad tas atrodas vienā no trijstūriem OWC vai OYC; varam pieņemt, ka tas atrodas trijstūrī OWC (piem., punkts M_2). Novelkam $M_2M_3 \perp WQ$ (skat. 7. zīm.). Tad saskaņā ar lemmu $M_2B+M_2D> M_3B+M_3D$ (1)

un

$M_2A+M_2C< M_3A+M_3C$ (2)

Bet risinājuma sākumā mēs pamatojām, ka

$M_3B+M_3D= M_3A+M_3C$.

Tāpēc no (1) un (2) seko, ka $M_2B+M_2D> M_2A+M_2C$. Tātad atkal attālumu summa no M_2 līdz votivapām ir mazāka nekā attālumu summa no M_2 līdz šillišallām, bet tā nedrīkst būt.

Tātad Maijiņa tiešām nevar uzcelt savu mājiņu kvadrāta iekšpusē nekur citur kā uz viena no nogriežņiem XY vai WQ.

Līdzīgi pierāda, ka uz kvadrāta kontūra Maijiņa varētu uzcelt savu mājiņu tikai kādā no punktiem X; W; Y; Q.

Jautājumu par to, kur Maijiņa varētu uzcelt savu mājiņu **ārpus** kvadrāta, atstājam lasītājiem izpētīt patstāvīgi. Mēs pie tā atgriezīsimies vēlāk.

9. Jā, eksistē. Tādi ir, piemēram, skaitļi

$\underbrace{111...1}_{1998}7\underbrace{999...9}_{223}$ un $\underbrace{111...1}_{1998}8\underbrace{000...0}_{223}$;

to ciparu summas ir attiecīgi $1998\cdot 1+7+223\cdot 9=2005+2007=2\cdot 2006$ un $1998\cdot 1+8=2006$.

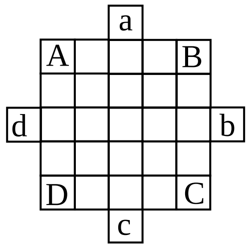
Lasītājs pats patstāvīgi var mēģināt pierādīt šādu rezultātu: ja n – naturāls skaitlis, kas nedalās ar 3, tad eksistē tādi divi viensotram sekojoši naturāli skaitļi, katram no kuriem ciparu summa dalās ar n.

10. **Atbilde**: 5 taisnstūros.

Pierādījums. Piecus taisnstūrus varam iegūt, piemēram, nogriežot figūrai 4 vienu rūtiņu lielās „ļipiņas”. Iegūsim 4 kvadrātus ar izmēriem 1×1 un 1 kvadrātu ar izmēriem 5×5.

Pierādīsim, ka figūru nevar sagriezt mazāk nekā 5 taisnstūros.

Apskatīsim 4 ļipiņas a, b, c, d. Ja katra no tām pieder **citam** taisnstūrim, tad taisnstūru ir vairāk nekā 4, jo nevienam no **šiem** 4 taisnstūriem nepieder, piemēram, neviena no stūra rūtiņām A, B, C, D (skat. 8. zīm.).



8. zīm.

Ja divas ļipiņas pieder vienam taisnstūrim, tad tās var būt tikai **pretējas** ļipiņas, piemēram, a un c. Tad rūtiņas d, A, B, b katra pieder citam taisnstūrim, un taisnstūru pavisam atkal ir vismaz 5.

2006./2007. mācību gads

2.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

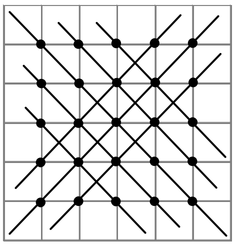
1. Atbilde: vairāk ir to skolēnu, kuri neapmeklē pulciņu.

Risinājums. Tā kā klasē ir arī meitenes, tad zēnu – pulciņa dalībnieku ir mazāk nekā trešdaļa visu skolēnu (apzīmējot zēnu skaitu klasē ar z, bet meiteņu skaitu klasē ar m, ir spēkā nevienādība $\mathbf{\frac{1}{3}z < \frac{1}{3}(z+m)}$, jo m>0). Līdzīgi meiteņu – pulciņa dalībnieču ir mazāk nekā sestdaļa visu skolēnu (nevienādība $\mathbf{\frac{1}{6}m < \frac{1}{6}(z+m)}$, jo z>0). Tā kā trešdaļa un sestdaļa kopā ir puse, tad skolēnu – pulciņa dalībnieku ir **mazāk nekā puse** no kopīgā skolēnu daudzuma (saskaitot izceltās nevienādības, iegūstam

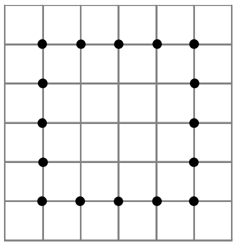
$\frac{1}{3}z + \frac{1}{6}m < \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)(z+m) = \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right)(z+m) = \frac{3}{6}(z+m) = \frac{1}{2}(z+m)$).

Pārējie skolēni, kuru ir **vairāk nekā puse**, pulciņu neapmeklē. Tātad tādu skolēnu, kuri neapmeklē pulciņu, ir vairāk nekā tādu skolēnu, kuri to apmeklē.

2. Skaidrs, ka to var izdarīt ar 8 taisnēm (skat. 1. zīm.)



1. zīm.



2. zīm.

Parādīsim, ka ar mazāk taisnēm nepietiek.

Apskatīsim tos 16 punktus, kas atrodas gar režģa malu (skat. 2. zīm.). Taisne, kas nav paralēla nevienai no režģa malām, var krustot augstākais divus no šiem 16 punktiem; tāpēc jau šo punktu krustošanai vien nepieciešamas vismaz 16:2=8 taisnes.

3. Apzīmēsim daļas skaitītāju ar a, bet saucēju - ar b; skaitli, kuru pieskaita skaitītājam, apzīmēsim ar n. Tad no uzdevuma nosacījumiem iegūstam:

a un b lielākais kopīgais dalītājs ir 1; (1)

$\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 1$ (2)

$\frac{a+n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}$ (3)

No (3) pakāpeniski iegūstam

$\frac{a+n}{n} = a$

a+n=na

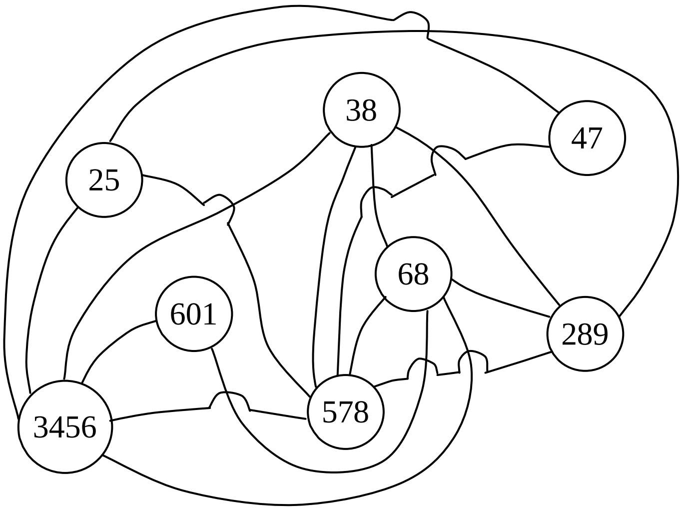
na-n-a+1=1

(n-1)(a-1)=1 (4)

Skaitli 1 var izteikt kā divu veselu skaitļu n-1 un a-1 reizinājumu tikai divos veidos: $1 \cdot 1$ un $(-1) \cdot (-1)$. Tā kā n ir naturāls skaitlis, tad jābūt $n \geq 1$; tāpēc n-1 nevar būt (-1). Tātad n-1=1 un a-1=1, no kurienes seko n=2 un a=2. No (2) redzam, ka $3 \leq b < 6$, tāpēc jāpārbauda tikai iespējamās vērtības 3; 4; 5. No (1) seko, ka b=4 neder. Vērtības b=3 un b=5 der; tiešām, $\frac{2+2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ un $\frac{2+2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

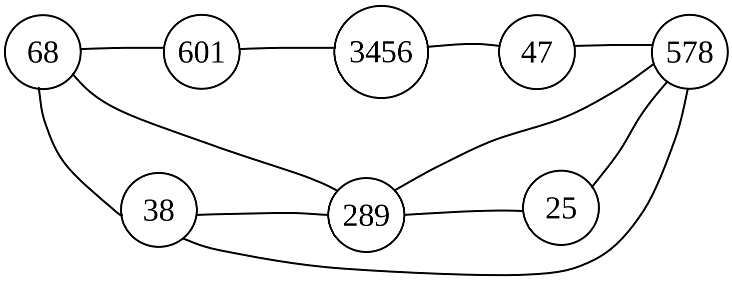
Atbilde: $\frac{2}{3}$ un $\frac{2}{5}$.

4. Ierakstīsim skaitļus aplīšos un savienosim ar līnijām tos aplīšus, kuros ierakstītajiem skaitļiem ir kopīgs cipars (skat. 3. zīm.) :



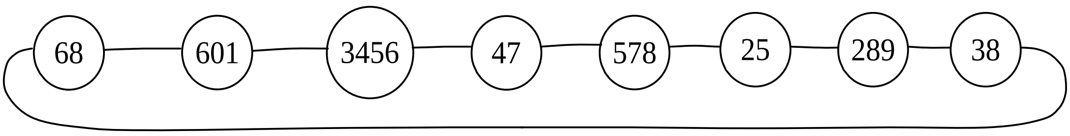
3. zīm.

No šī zīmējuma redzam, ka skaitlim 47 meklējamajā aplī var būt tikai kaimiņi 3456 un 578, bet skaitlim 601 – tikai kaimiņi 3456 un 68. Tātad skaitlim 3456 noteikti jāatrodas kaimiņos ar 47 un 601. Iegūstam sekojošu ainu, kur izvēlēties var vairs tikai starp „apakšējām” līnijām (4. zīm.) :



4. zīm.

Viegli redzēt, ka vajadzīgo apli var pabeigt tikai vienā veidā (skat. 5. zīm.)



5. zīm.

5. Piemēram, šādi:

Ūdens daudzums 5 l traukā	Ūdens daudzums 7 l traukā	Ko darām
0	0	Pielejam pilnu 5 l trauku
5	0	Pārlejam ūdeni no 5 l trauka 7 l traukā

0	5	Pielejam pilnu 5 l trauku
5	5	No 5 l trauka pielejam pilnu 7 l trauku
3	7	Iztukšojam 7 l trauku
3	0	Pārlejam ūdeni no 5 l trauka 7 l traukā
0	3	Pielejam pilnu 5 l trauku
5	3	No 5 l trauka pielejam pilnu 7 l trauku
1	7	Iztukšojam 7 l trauku
1	0	Pārlejam ūdeni no 5 l trauka 7 l traukā
0	1	Pielejam pilnu 5 l trauku
5	1	Pārlejam ūdeni no 5 l trauka 7 l traukā
0	6	Neko

Iesakām lasītājam patstāvīgi padomāt, kā veikt pārliešanas, lai

- kopīgais pārliešanu skaits būtu mazākais iespējamais,
- kopīgais pārlejamais ūdens daudzums būtu mazākais iespējamais,
- kopīgais „velti pasmeltais” ūdens daudzums būtu mazākais iespējamais (mūsu risinājumā mēs divas reizes iztukšojām 7 l trauku, tātad „zaudējām” 14 litrus ūdens).

6. Dosim vairākus šī uzdevuma atrisinājumus.

1. atrisinājums. Apzīmēsim uzdevumā minētos veselos skaitļus ar x, y un z. Ja x+y+z=0, tad z=-(x+y) . Tāpēc

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+(-x-y)^3=x^3+y^3+((-1)(x+y))^3=x^3+y^3+(-1)^3\cdot(x+y)^3=$$ Tā kā
$$=x^3+y^3-(x+y)^3=x^3+y^3-\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)=-3x^2y-3xy^2=-3xy(x+y).$$

x un y ir veseli skaitļi, tad dalījums $-3xy(x+y):3=-xy(x+y)$ ir vesels skaitlis. Tāpēc tiešām $x^3+y^3+z^3$ dalās ar 3.

2. atrisinājums. Atkal apzīmēsim apskatāmos veselos skaitļus ar x, y un z. Tad x+y+z=0. Izmantojot kubu summas formulu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, iegūstam

$$x^3+y^3+z^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)+(-x-y)^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)+((-1)(x+y))^3=$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-(x+y)^3=(x+y)\left[x^2-xy+y^2-(x+y)^2\right]=$$ no
$$=(x+y)\left[x^2-xy+y^2-x^2-2xy-y^2\right]=-3(x+y)xy,$$

kurienes tāpat kā pirmajā risinājumā seko, ka $x^3+y^3+z^3$ dalās ar 3.

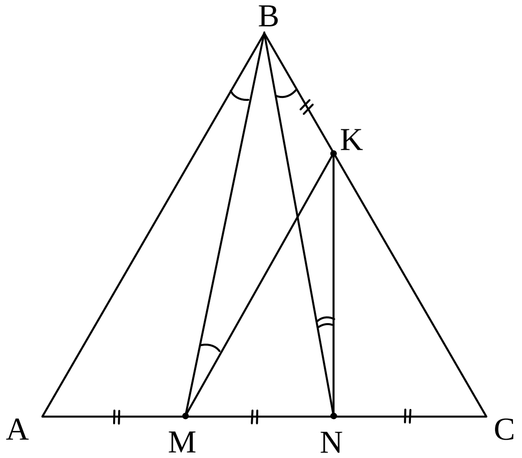
3. atrisinājums. Lasītājs var pats pārbaudīt, ka visiem x, y, z pastāv vienādība

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

(to ir vērts atcerēties; šī vienādība ievērojami atvieglo daudzu uzdevumu risinājumus). Ja x, y, z – veseli skaitļi un x+y+z=0, no šejienes iegūstam

$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ un $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Tātad $x^3+y^3+z^3$ dalās ar 3, jo dalījums ir xyz – vesels skaitlis.

7. Apzīmējam $\angle BMK=\alpha$ un $\angle BNK=\beta$. Mums jāaprēķina $\alpha+\beta$.



6. zīm.

Tā kā ΔABC ir regulārs, tad CB=CA; saskaņā ar doto arī KB=MA. Atņemot no pirmās vienādības otro, iegūstam CK=CM. Atceramies, ka $\angle BCA = 60°$. Tātad trijstūrī KCM virsotnes leņķis C ir 60º un CK=CM; tātad tas ir regulārs. Tāpēc $\angle CKM = 60° = \angle CBA$; tātad KM|| BA. Tāpēc $\angle ABM = \angle BMK = \alpha$.

Ievērojam, ka AB=CB (jo ΔABC ir regulārs), AM=CN (saskaņā ar doto) un $\angle BAM = 60° = \angle BCN$ (jo ΔABC - regulārs). Tāpēc $\Delta ABM = \Delta CBN$ (pazīme mlm); iegūstam, ka $\angle CBN = \angle ABM = \alpha$.

Tā kā ΔBKN iekšējo leņķu lielumu summa ir 180º, tad $\alpha + \beta = \angle KBN + \angle KNB = 180° - \angle BKN = \angle CKN$. Mēs jau pierādījām, ka ΔCKM ir regulārs; KN ir šī trijstūra mediāna, tāpēc arī bisektrise. Tātad $\angle CKN = \frac{1}{2}\angle CKM = 30°$.

Tātad $\angle BMK + \angle BNK = \alpha + \beta = \angle CKN = 30°$.

8. Apzīmēsim šos skaitļus no kreisās uz labo pusi ar a; b; c; d; e; f; g. Lai izteiksmes vērtība dalītos ar 10, tai jādalās ar 2 un ar 5.

A. Ja kāds no skaitļiem a un b ir pāra skaitlis, ievietojam starp a un b reizināšanas zīmi; ja gan a, gan b ir nepāra skaitļi, ievietojam starp a un b saskaitīšanas zīmi. Tā kā mēs nezinām, kuru zīmi nāksies ievietot, apzīmēsim to ar *. Izteiksmi a*b iekļaujam iekavās. Tad (a*b) noteikti dalās ar 2.

B. Tagad parādīsim, kā no atlikušajiem 5 skaitļiem izveidot izteiksmi, kuras vērtība dalās ar 5.

Ja kaut viens no skaitļiem c; d; e; f; g dalās ar 5, tad $(c \times d \times e \times f \times g)$ dalās ar 5.

Ja neviens no šiem skaitļiem ar 5 nedalās, apskatām piecas izteiksmes

c
c+d
c+d+e
c+d+e+f
c+d+e+f+g

Ja kaut viena no tām dalās ar 5, izveidojam to, iekļaujam iekavās un „piereizinām klāt” pārējos skaitļus. Piemēram, ja c+d+e dalās ar 5, izveidojam $(c + d + e) \cdot f \cdot g$.

Ja neviena no tām nedalās ar 5, apskatām atlikumus, kādus dod šīs izteiksmes, dalot ar 5. Atlikumu vērtības mūsu apskatāmajā gadījumā var būt tikai 1; 2; 3; 4 (nav atlikuma 0, jo neviena no apskatāmajām 5 izteiksmēm nedalās ar 5). Tā kā izteiksmju ir piecas, bet dažādi atlikumi – tikai četri, tad atradīsies tādas divas izteiksmes, kam atlikumi, dalot ar 5, ir vienādi; bet tad šo izteiksmju starpība dalās ar 5. (Piemēram, ja c+d+e+f un c dod vienādus atlikumus r , dalot ar 5, tad (c+d+e+f)-c=(5A+r)-(5B+r)=5(A-B)). Ievērosim, ka nupat minētā starpība **noteikti** ir vairāku pēc kārtas rindā uzrakstīto skaitļu summa. Iekļaujam šo summu iekavās un sareizinām ar pārējiem skaitļiem (mūsu apskatāmajā gadījumā izveidojam izteiksmi $c \times (d + e + f) \times g$) ; iegūtās izteiksmes vērtība dalās ar 5.

C. Sareizinot pirmo divu skaitļu veidoto izteiksmi, kuras vērtība dalās ar 2, un pēdējo piecu skaitļu veidoto izteiksmi, kuras vērtība dalās ar 5, iegūstam izteiksmi, kuras vērtība dalās ar 10.

9. Sadalām visus divciparu naturālos skaitļus 50 grupās:

10 un 90
11 un 89
12 un 88
13 un 87
:
49 un 51
50
91
92
93
:
99

Tātad ir 40 grupas, kas katra satur divus naturālus skaitļus, un 10 grupas, kas katra satur vienu naturālu skaitli.

Tā kā 51>50, tad, izvēloties jebkuru 51 divciparu naturālu skaitli, atradīsies tādi divi izvēlētie skaitļi, kas ir vienā grupā. (Ja no katras grupas izvēlētos augstākais vienu skaitli, tad izvēlēto skaitļu būtu ne vairāk kā grupu, t.i., ne vairāk kā 50.) Bet, ja divi skaitļi ir vienā grupā, tad to summa ir 100 – tieši ar tādu domu grupas ir veidotas.

Ja izvēlamies tikai 50 naturālus skaitļus, tad var gadīties, ka nekādu divu izvēlētu skaitļu summa nav 100. Piemēram, mēs varam izvēlēties skaitļus no 50 līdz 99 ieskaitot. Tā kā pat divu mazāko izvēlēto skaitļu summa 50+51=101>100, tad **jebkuru** divu izvēlētu skaitļu summa ir **lielāka** par 100.

10. **Atbilde**: ar diviem jautājumiem.

Atrisinājums. Vispirms parādīsim, kā Andris var iztikt ar diviem jautājumiem.

Ar savu pirmo jautājumu Andris nosauc Dzintaram skaitļus a=1; b=1; c=1; d=1; e=1. Dzintara atbilde ir $1\cdot A+1\cdot B+1\cdot C+1\cdot D+1\cdot E$ - visu iedomāto skaitļu summa. Pieņemsim, ka šī atbilde ir n-ciparu skaitlis. Tātad nevienam Dzintara iedomātajam skaitlim nav vairāk par n cipariem. Ar savu otro jautājumu Andris nosauc Dzintaram skaitļus a=1; b=10^n; c=10^{2n}; d=10^{3n}; e=10^{4n}. Dzintara atbilde būs 5n-ciparu skaitlis. Šajā skaitlī A aizņems pēdējos n ciparus, B - priekšpēdējos n ciparus, utt. (varbūt dažiem no skaitļiem A, B, C, D, E priekšā būs nulles.)

Piemērs. Iedomāsimies, ka Dzintars iedomājies skaitļus 7; 13; 32; 45; 89 (bet Andris to, protams, nezina). Uz pirmo Andra jautājumu Dzintars sniedz atbildi $1\cdot 7+1\cdot 13+1\cdot 32+1\cdot 45+1\cdot 89=186$. Tā kā 186 – trīsciparu skaitlis, tad ar otro jautājumu Andris nosauc Dzintaram skaitļus 1; 1 000; 1 000 000; 1 000 000 000; 1 000 000 000 000 . Dzintara atbilde būs

$1\cdot 7+1\,000\cdot 13+1\,000\,000\cdot 32+1\,000\,000\,000\cdot 45+1\,000\,000\,000\,000\cdot 89=$

$7+13\,000+32\,000\,000+45\,000\,000\,000+89\,000\,000\,000\,000=89\,045\,032\,013\,007$, un Andris šajā atbildē uzskatāmi redz Dzintara iedomātos skaitļus.

Tagad pierādīsim, ka ar vienu jautājumu Andrim nepietiek.

Tā kā pirms jautājuma uzdošanas Andris neko nezina par Dzintara iedomātajiem skaitļiem, viņam savs jautājums jāuzdod uz labu laimi. Apzīmēsim Andra nosauktos naturālos skaitļus ar a; b; c; d; e (kur $a\le b\le c\le d\le e$) un iedomāsimies, ka viņš no Dzintara uzzina atbildi, kuras vērtība ir 10abcde. Šādu atbildi Andris no Dzintara var saņemt vismaz divos gadījumos:

a) ja Dzintars iedomājies skaitļus 2bcde; 2acde; 2abde; 2abce; 2abcd - tiešām, $a\cdot 2bcde+b\cdot 2acde+c\cdot 2abde+d\cdot 2abce+e\cdot 2abcd=10abcde$

b) ja Dzintars iedomājies skaitļus 2bcde+b; 2acde-a; 2abde; 2abce; 2abcd - tiešām,

$$a \cdot (2bcde + b) + b \cdot (2acde - a) + c \cdot 2abde + d \cdot 2abce + e \cdot 2abcd =$$

$$= 2abcde + ab + 2abcde - ab + 2abcde + 2abcde + 2abcde = 10abcde .$$

Pārbaudīsim, vai Dzintars drīkstēja iedomāties augšminētos skaitļus un, ja drīkstēja, vai šie skaitļu komplekti ir dažādi. Skaidrs, ka pirmais minētais komplekts sastāv no naturāliem skaitļiem. Otrajā komplektā vienīgās šaubas var radīt skaitlis 2acde-a . Bet $2acde - a = a(2cde - 1)$, un 2cde-1 ir pozitīvs skaitlis, jo $2cde \geq 2$; tātad 2acde-a ir naturāls skaitlis, un Dzintars tādu būtu drīkstējis iedomāties.

Pirmajā minētajā komplektā vislielākais (vai viens no vislielākajiem, ja tādi ir vairāki) ir skaitlis 2bcde (jo $a \leq b \leq c \leq d \leq e$). Bet otrā komplekta pirmais skaitlis 2bcde+b pirmajā komplektā noteikti nav. Tātad abi mūsu apskatāmie skaitļu komplekti noteikti ir dažādi.

Vienīgā informācija, uz kuru Andris var balstīties, cenšoties noskaidrot Dzintara iedomātos skaitļus, ir Dzintara atbilde uz vienīgo Andra uzdoto jautājumu. Tā kā abu minēto komplektu gadījumos Dzintara atbildes ir vienādas, tad, saņemot šādu atbildi, Andrim nav nekādas iespējas izvēlēties jau starp abiem minētajiem komplektiem vien (un varbūt vēl starp kādiem citiem, kuru gadījumā Dzintara atbilde **varbūt** arī ir tāda pati – mēs par to neesam pat domājuši!) Tātad Andris nevar nekļūdīgi noskaidrot Dzintara iedomātos skaitļus.

2006./2007. mācību gads

3.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Apzīmēsim tukšajās rūtiņās ierakstāmos skaitļus, kā parādīts 1.zīm., bet vienas rindiņas (kolonnas, diagonāles) skaitļu summu ar S.

16	a	b	c
11	13	d	e
f	8	9	15
g	h	14	12

1.zīm.

16	10	b	c
11	13	d	e
18	8	9	15
5	19	14	12

2.zīm.

Tad no lejupejošās diagonāles iegūstam, ka S=16+13+9+12=50. Tālāk no 3.horizontāles f=S-(8+9+15)=50-32=18; no 1.vertikāles g=S-(16+11+18)=50-45=5; no 4.horizontāles h=S-(5+14+12)=50-31=19; no 2.vertikāles a=S-(13+8+19)=50-40=10. Esam ieguvuši 2.zīmējumā attēloto ainu, kur abās pirmajās vertikālēs, abās pēdējās horizontālēs un lejupejošajā diagonālē ierakstīto skaitļu summas ir 50.

Lai izpildās uzdevuma nosacījumi, jāizvēlas skaitļi b;c;d;e tā, ka vienlaicīgi pastāv vienādības:

b+c=24 (1);
d+e=26 (2);
b+d=27 (3);
c+e=23 (4);
d+c=37 (5).

Atņemot no (3) vienādību (1), iegūstam d-c=3 (6); saskaitot (6) un (5), iegūstam 2d=40; d=20. Tālāk no (5) c=37-d=17; no (4) e=23-c=6; no (3) b=27-d=7. Pārbaude parāda, ka arī (2) un (1) izpildās; tiešām, d+e=20+6=26 un b+c=7+17=24. Tātad vienīgais uzdevuma atrisinājums redzams 3.zīmējumā.

16	10	7	17
11	13	20	6
18	8	9	15
5	19	14	12

3.zīm.

2. Pakāpeniski pārveidojam doto vienādību:

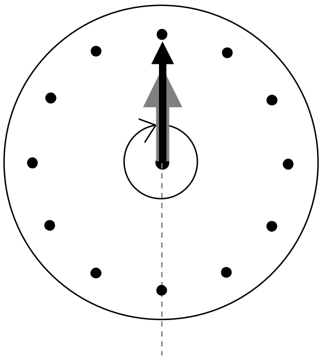
$$a^7b^5 + a^5b^7 = a^9b^3 + a^3b^9$$
$$a^3b^3\left(a^4b^2 + a^2b^4\right) = a^3b^3\left(a^6 + b^6\right)$$
$$a^3b^3\left(a^4b^2 + a^2b^4 - a^6 - b^6\right) = 0$$
$$a^3b^3\left(a^4\left(b^2 - a^2\right) - b^4\left(b^2 - a^2\right)\right) = 0$$
$$a^3b^3\left(a^4 - b^4\right)\left(b^2 - a^2\right) = 0$$
$$a^3b^3\left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2\right)\left(b^2 - a^2\right) = 0 \quad (1)$$

Ja vairāku skaitļu reizinājums ir 0, tad vismaz viens no šiem skaitļiem ir 0. Saskaņā ar doto $a \neq 0$. Tā kā $a^2 > 0$ un $b^2 \geq 0$, tad $a^2 + b^2 > 0$; tātad $a^2 + b^2 \neq 0$. Tāpēc no (1) izriet divas iespējas:

1) $b^3 = 0$; tad $b = 0$.
2) $(a^2 - b^2)(b^2 - a^2) = 0$; no šejienes seko, ka $a^2 - b^2 = 0$ jeb $(a-b)(a+b) = 0$. Tas iespējams divos gadījumos:
    21) $a - b = 0$; tad $b = a = 2007$;
    22) $a + b = 0$; tad $b = -a = -2007$.

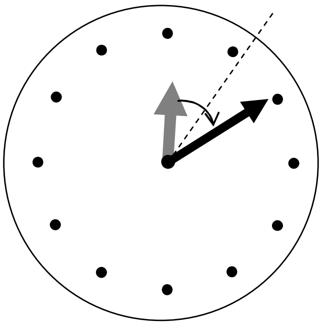
Atbilde: b ir viens (jebkurš) no skaitļiem 0; 2007; – 2007.

3. Uzdevuma atbilde atkarīga no tā, kā saprast jēdzienu „leņķis, ko veido pulksteņa stundu un minūšu rādītāji”. Atceramies: saskaņā ar skolas mācību grāmatas definīciju leņķa lielums noteikti lielāks par 0° un nepārsniedz 360° (pilnam leņķim). Stingri pieturoties pie šīs definīcijas, diennakts sākuma momentā (00st.00min.) abi rādītāji vispār var veidot tikai pilnu leņķi; tad šī leņķa bisektrise ir stars, kas no ciparnīcas centra iet uz iedaļu, kura atbilst laika momentam 06st.00min., skat.4.zīm.

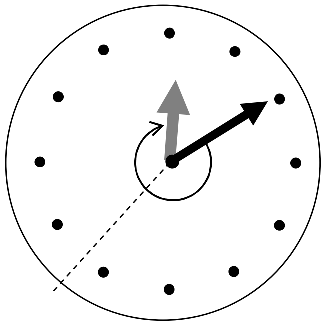


4.zīm.

Tikko minūšu rādītājs aizvirzīsies no stundu rādītāja, radīsies jau divi leņķi, ko veido rādītāji; atbilstoši būs arī divas bisektrises (skat. 5. un 6. zīm.), un nav skaidrs, par kuru no tiem uzdevumā jādomā. Domājot par 5.zīmējumā attēloto gadījumu,



5.zīm.

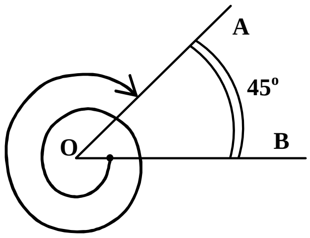


6.zīm.

būtu jāpieņem, ka bisektrise ir izdarījusi „lēcienu” par 180°; nav skaidrs, uz kuru pusi tas izdarīts. Domājot par 6.zīm. attēloto gadījumu, līdzīga situācija radīsies brīdī, kad minūšu rādītājs pirmo reizi „apdzīs” stundu rādītāju; tā kā leņķa lielums nav 0°, tad tam „lēcienveidīgi” jākļūst vienādam ar 360° (pilns leņķis), un bisektrisei no pozīcijas, kurā tā sakrīt ar abiem rādītājiem, lēcienveidīgi jāieņem pretēja pozīcija. Atkal nav skaidrs, vai jāuzskata, ka tā šo lēcienu izdarījusi pulksteņa rādītāju virzienā vai pretēji tam.

Tātad, **stingri pieturoties pie deviņgadīgās skolas mācību grāmatā dotajām definīcijām, uzdevums ir sastādīts nekorekti un vispār nav atrisināms.**

Vidusskolā lieto citu leņķa jēdzienu; leņķa lielums var būt arī lielāks par 360° (piem., 7.zīm. viens no leņķiem AOB ir 45° liels, bet otrs - $360^{\circ} + 315^{\circ} = 675^{\circ}$ liels). Izmantojot šo izpratni, uzdevumam ir sekojošs atrisinājums.



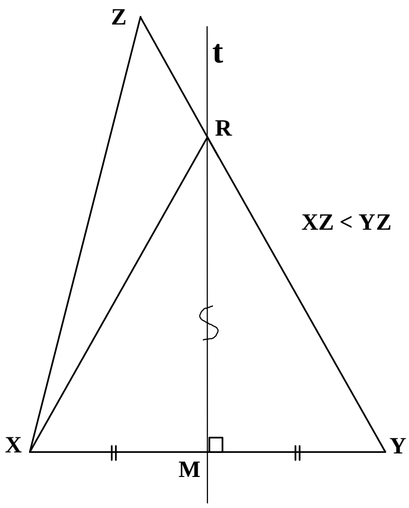
7.zīm.

Diennakts laikā minūšu rādītājs veic 24 apgriezienus ap centru (katru stundu – vienu). Stundu rādītājs veic divus apgriezienus ap centru. Tātad minūšu rādītājs apsteidz stundu rādītāju par $24-2=22$ pilniem apgriezieniem. Tā kā bisektrise attiecībā pret stundu rādītāju kustas divas reizes lēnāk nekā minūšu rādītājs, tad tā apsteigusi stundu rādītāju 11 reizes. Atceroties, ka stundu rādītājs veicis 2 pilnus apgriezienus, iegūstam: apskatāmā bisektrise diennakts laikā veikusi 2+11=**13 apgriezienus.**

4. Uzdevuma risinājums balstīts uz diviem cieši saistītiem faktiem.

I. Nogriežņa XY vidusperpendikuls sastāv tieši no visiem tiem punktiem Z, kam izpildās sakarība XZ=YZ.

II. Ja punkts Z atrodas tai pašā pusē no nogriežņa XY vidusperpendikula t, kurā atrodas X, tad XZ<YZ (skat. 8.zīm.).



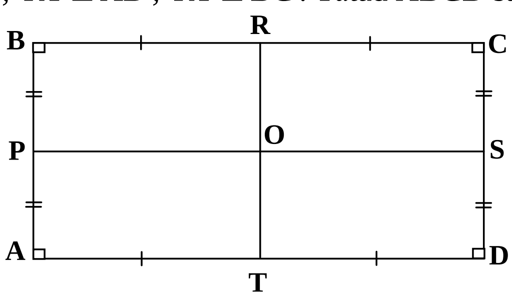
8.zīm.

Fakts I pierādīts skolas mācību grāmatā. Pamatosim faktu II.

Ja X un Z atrodas vienā pusē no t, tad Y un Z atrodas dažādās pusēs no t. Tad nogrieznis ZY krusto t; apzīmēsim krustpunktu ar R. Tad ΔXMR=ΔYMR (kk), tāpēc XR=YR. No trijstūru nevienādības XZ<XR+RZ=YR+RZ=YZ, k.b.j.

Tagad atrisināsim mūsu uzdevumu.

Apzīmēsim ar P, R, S, T taisnstūra ABCD malu viduspunktus (skat.9.zīm). Tad ΔBCS=ΔADS (kk), tāpēc BS=AS. No I seko, ka S atrodas uz AB vidusperpendikula, tātad $PS \perp AB$. Līdzīgi $PS \perp CD$; $RT \perp AD$; $RT \perp BC$. Tātad ABCD sadalīts 4 vienādos taisnstūros.

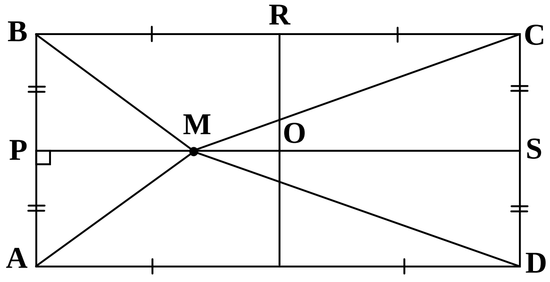


9.zīm.

Tālāk šķirosim dažādas punkta M atrašanās iespējas.

1) M sakrīt ar O. Tad AO=BO=CO=DO, jo vienādos taisnstūros diagonāles ir vienādas; no jebkuriem trim no šiem nogriežņiem var izveidot vienādmalu trijstūri.

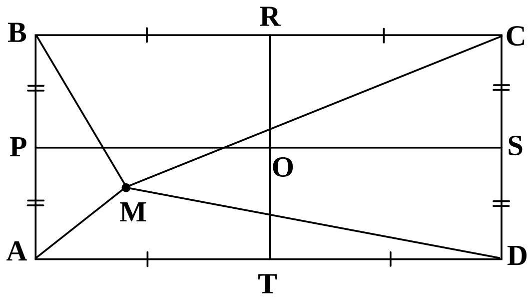
2) M pieder kādam no nogriežņiem PO, RO, SO, TO, bet nesakrīt ar O. Pieņemsim, ka M ir nogriežņa PO iekšējs punkts (10.zīm.).



10.zīm.

Tā kā PS un RT ir ABCD malu vidusperpendikuli, tad no I un II seko: AM=BM<CM=DM. No šīm sakarībām viegli iegūt: katri divi no garumiem CM, DM, BM kopā lielāki par trešo. No skolas kursa zināms, ka tādā gadījumā eksistē trijstūris, kura malas vienādas ar BM, CM un DM.

3) M nepieder nevienam no nogriežņiem PO, RO, SO, TO. Tad tas atrodas kādā no taisnstūriem, kuros sadalīts ABCD. Varam uzskatīt, ka M atrodas taisnstūrī APOT (citus gadījumu apskata līdzīgi).



10.zīm.

Apskatīsim nogriežņus BM, CM, DM. No II seko, ka CM>BM un CM>DM. Tāpēc CM+DM>BM (1); CM+BM>DM (2). Ja mēs vēl prastu pierādīt, ka BM+DM>CM (3), tad no nevienādībām (1), (2), (3) tāpat kā 2) gadījumā sekotu: eksistē trijstūris, kura malas vienādas ar BM, CM un DM.

Taisnstūra diagonāļu garumi ir lielāki par jebkuriem citiem attālumiem starp taisnstūra punktiem; tāpēc CM<BD. Savukārt no trijstūra nevienādības seko, ka BM+DM≥BD (patiesībā pat BM+DM>BD, jo M neatrodas uz diagonāles BD, bet mums tas šeit nav nepieciešams, tāpēc to nepierādīsim). Iegūstam, ka BM+DM≥BD>CM, no kurienes seko (3).

Līdz ar to uzdevums atrisināts.

5. Atbilde: jā, var.

Risinājums.

Mēģināsim vispirms noskaidrot, vai varētu gadīties, ka visiem šiem 33 skaitļiem ir vienādi ciparu daudzumi. Dalām 2006 ar 33: 2006:33=60 atl.26

Tātad 33 pēc kārtas ņemtos 60-ciparu skaitļos kopā būtu par 26 cipariem mazāk, nekā mums nepieciešams. Ja no šiem 33 skaitļiem 26 skaitļi būtu nevis 60-ciparu, bet 61-cipara skaitļi, vajadzīgais būtu sasniegts.

Tāpēc meklējamos skaitļus var izvēlēties šādi: ņemt **pirmos 26** skaitļus, kas satur 61 ciparu katrs, un **pēdējos** 33-26=**7** skaitļus, kas satur 60 ciparus katrs. Skaidrs, ka šie 33 skaitļi ir pēc kārtas sekojoši.

Lieku reizi pārliecināsimies, ka kopējais ciparu skaits ir vajadzīgais: $7\times 60+26\times 61=420+1586=2006$.

Tā kā gan 60-ciparu skaitļu, protams, ir **vairāk** nekā septiņi, gan 61-cipara skaitļu ir **vairāk** nekā divdesmit seši, tad augšminētā izvēle ir iespējama.

6. Atbilde: jā, eksistē.

Risinājums.

Ievērosim, ka $1024 = 2^{10}$. Par meklējamo skaitli var ņemt, piemēram, skaitli 42010000001024.

Tiešām, $42010000001024 = 4201\underbrace{0000000000}_{10\,\text{nulles}} + 1024 = 4201 \cdot 2^{10} \cdot 5^{10} + 2^{10} =$

$= 2^{10}\left(4201 \cdot 5^{10} + 1\right)$, kas, protams, dalās ar $2^{10} = 1024$.

7. Atbilde: a) 32 rūtiņas; b) 40 rūtiņas.

A. Piemērus ar 32 rūtiņām 9x9 rūtiņu kvadrāta gadījumā un ar 40 rūtiņām 10x10 rūtiņu kvadrāta gadījumā skat. 11. un 12. zīm.

	X	X	X		X	X	X	
	X		X		X		X	
	X	X	X		X	X	X	
	X	X	X		X	X	X	
	X		X		X		X	
	X	X	X		X	X	X	

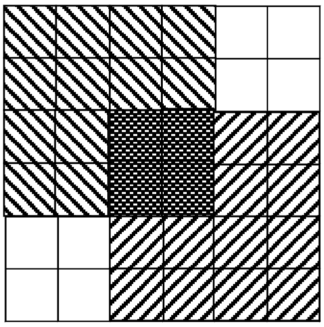
11.zīm.

		X	X			X	X		
		X	X			X	X		
		X	X			X	X		
		X	X			X	X		
		X	X			X	X		
		X	X			X	X		
		X	X			X	X		
		X	X			X	X		
		X	X			X	X		
		X	X			X	X		

12.zīm.

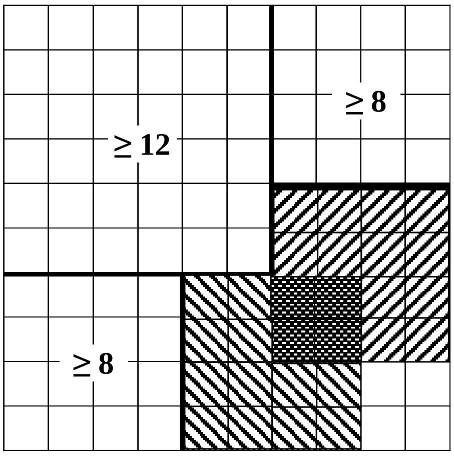
B. 9x9 rūtiņu kvadrātā viegli iezīmēt četrus 4x4 rūtiņu kvadrātus bez kopīgām rūtiņām; katrā no tiem jābūt vismaz 8 melnām rūtiņām. Tātad 9x9 rūtiņu kvadrātā jābūt vismaz 8x4=32 melnām rūtiņām.

Lai pierādītu, ka 10x10 rūtiņu kvadrātā jābūt vismaz 40 melnām rūtiņām, vispirms apskatīsim 6x6 rūtiņu kvadrātu (skat.13.zīm). Katrā no abiem slīpi iesvītrotajiem 4x4 rūtiņu kvadrātiem jābūt vismaz 8 melnām rūtiņām. Ne vairāk kā četras melnās rūtiņas var būt gan vienā, gan otrā no tiem. Tātad katrā 6x6 rūtiņu kvadrātā jābūt vismaz 8+8-4=12 melnām rūtiņām.



13.zīm.

Līdzīgi spriežot, abos 14.zīm. iesvītrotajos 4x4 rūtiņu kvadrātos kopā jābūt vismaz 8+8-4=12 melnām rūtiņām; tāpēc visā 10x10 rūtiņu kvadrātā jābūt vismaz 12+8+8+12=40 melnām rūtiņām.



14.zīm.

8. Atbilde: 12 fotogrāfijas.

Risinājums.

A. Attēlosim katru prezidentu ar punktu un savienosim katrus divus punktus ar līniju. No katra punkta iziet 7 līnijas, tātad tajā sanāk kopā 7 līniju gali. Tātad pavisam ir $8 \cdot 7 = 56$ līniju gali. Tā kā katrai līnijai ir 2 gali, tad līniju ir $56 : 2 = 28$. Tātad pavisam ir 28 prezidentu pāri; katram no šiem pāriem jābūt redzamam uz kādas fotogrāfijas.

Ja uz fotogrāfijas ir 2 prezidenti, tad tā satur vienu prezidentu pāri; ja uz fotogrāfijas ir 3 prezidenti, tad tā satur trīs prezidentu pārus (ja, piemēram, uz tās ir prezidenti A, B, C, tad tā satur prezidentu pārus AB, AC, BC).

Apzīmēsim divu prezidentu fotogrāfiju skaitu ar x, bet triju prezidentu fotogrāfiju skaitu ar y. Tā kā katram divu prezidentu pārim jābūt redzamam tieši uz vienas fotogrāfijas, tad

$$x + 3y = 28 \quad (1)$$

Katram prezidentam jābūt redzamam kopā ar 7 citiem. Tā kā katrā 3 prezidentu fotogrāfijā viņš redzams kopā ar diviem citiem, tad katram prezidentam jāparādās uz vismaz vienas divu prezidentu fotogrāfijas. Tā kā pavisam ir 8 prezidenti, tad jābūt vismaz $8 : 2 = 4$ divu prezidentu fotogrāfijām jeb

$$x \geq 4 \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko, ka $3y = 28 - x \leq 28 - 4 = 24$, tāpēc

$$y \leq 8 \qquad (3)$$

No (1) un (3) seko, ka $x + y = (x + 3y) - 2y = 28 - 2y \geq 28 - 2 \cdot 8 = 28 - 16 = 12$.

Tātad vismaz 12 fotogrāfijas ir nepieciešamas.

B. Ja prezidentus apzīmēsim ar A, B, C, D, E, F, G, H, tad viegli pārbaudīt, ka fotogrāfijas ABC, CDE, EFG, GHA, BEH, ADF, HFC, BDG, AE, BF, CG, DH apmierina uzdevuma prasības.

Šis piemērs iegūts, attēlojot prezidentus kā regulāra 8-stūra virsotnes un veidojot 8 trijstūrus un 4 nogriežņus ar virsotnēm šī astoņstūra virsotnēs tā, lai būtu novilktas visas astoņstūra malas un diagonāles.

9. Apzīmēsim rindā novietotās figūriņas no kreisās uz labo pusi ar F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7. Pirmajā svēršanā uz kreisā kausa novietojam F3 un F4, uz labā – F7. Apskatām trīs iespējamos gadījumus.

A. Kreisais kauss ir smagāks. Tad rindā nav 1kg, 2kg vai 3kg smagās figūriņas (pārbaudiet paši visas iespējas un pārliecinieties par to). Otrajā svēršanā uz kreisā kausa novietojam F1 un F2, uz labā – F3. Ja kreisais kauss ir smagāks, rindā nav 1kg smagās figūriņas; ja kausi ir līdzsvarā, rindā nav 2kg smagās figūriņas; ja labais kauss ir smagāks, rindā nav 3kg smagās figūriņas.

B. Kausi ir līdzsvarā. Tad rindā nav 4kg vai 8kg smagās figūriņas (pārliecinieties paši, pārbaudot visas iespējas). Otrajā svēršanā uz kreisā kausa novietojam F1 un F3, uz labā – F4. Ja rindā trūkst 4kg smagās figūriņas, smagāks ir labais kauss; ja rindā trūkst 8kg smagās figūriņas, svari ir līdzsvarā.

C. Labais kauss ir smagāks. Tad rindā nav 5kg, 6kg vai 7kg smagās figūriņas (pārliecinieties paši, pārbaudot visas iespējas). Otrajā svēršanā uz kreisā kausa novietojam F4 un F7, uz labā – F5 un F6. Ja rindā trūkst 5kg smagās figūriņas, uz leju nosveras labais kauss; ja trūkst 6kg smagās figūriņas, svari ir līdzsvarā; ja trūkst 7kg smagās figūriņas, uz leju nosveras kreisais kauss.

10. Atbilde: nē, tas nav iespējams.

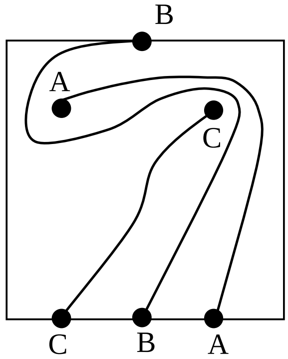
Risinājums.

Sareizinot divniekus, pieciniekus un septītniekus, iegūst skaitli, kas nedalās ar 3. Bet 2007 dalās ar 3, tātad skaitlis, kura ciparu summa ir 2007, dalās ar 3. No šejienes seko minētā atbilde.

2006./2007. mācību gads

4.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Jā, var. Skat., piem., 1.zīm.



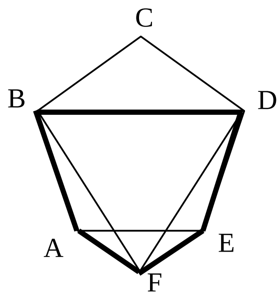
1.zīm.

2. Atbilde: nē, nav taisnība.

Risinājums: līdzīgām figūrām **visu** atbilstošo garumu attiecības ir vienādas (šo attiecību kopējo vērtību sauc par figūru līdzības koeficientu). Piemēram, ja ΔABC malas ir divas reizes garākas par atbilstošajām ΔMNK malām, tad arī ΔABC mediānas, bisektrises, attālums starp ievilktās un apvilktās riņķa līnijas centriem utt. ir divas reizes garāks par ΔMNK mediānām, bisektrisēm, attālumu starp ievilktās un apvilktās riņķa līnijas centriem utt.

Skaidrs, ka 2l pudele ir lielāka par 0,5l pudeli, jo tām ir dažādi tilpumi (tas jau redzams arī „ar neapbruņotu aci”). Tāpēc pudeļu līdzības gadījumā 2l pudelē **visiem** garumiem jābūt lielākiem par atbilstošajiem garumiem 0,5l pudelē. **Bet korķi šīm pudelēm ir vienādi** (acīmredzot, ražošanas vienkāršošanas nolūkos). Tāpēc pudeles nav savā starpā līdzīgas (matemātiskā izpratnē).

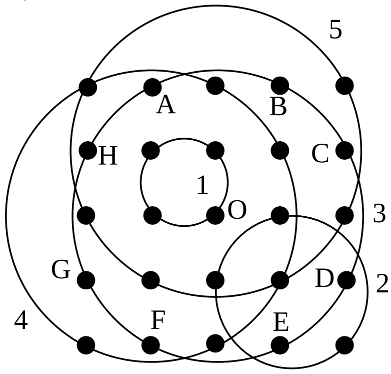
3. Jā, eksistē. Skat., piem., 2.zīm. attēloto piecstūri ABDEF, kas izveidots no regulāra piecstūra ABCDE un regulāra trijstūra BDF.



2.zīm.

Šeit $AE = AB$ (jo ABCDE ir regulārs piecstūris, kuram tātad visas malas vienādas), $BF = BD$ un $DF = BD$ (jo BDF ir regulārs trijstūris, kuram tātad visas malas vienādas), $AD = BD$ un $BE = BD$ (jo ABCDE ir regulārs piecstūris, kuram tātad visas diagonāles vienādas).

4. Jā, var. Skat., piem., 3.zīm.



3.zīm.

Pamatosim šī zīmējuma pareizību.

1. četri punkti, caur kuriem iet līnija 1, ir kvadrāta virsotnes un tātad **atrodas** uz vienas riņķa līnijas,
2. trīs punkti, caur kuriem iet līnija 2, nav uz vienas taisnes un tātad atrodas uz vienas riņķa līnijas,
3. punkti A,B,C,D,E,F,G,H visi atrodas attālumā $\sqrt{5}$ no režģa centra O un tātad atrodas uz vienas riņķa līnijas (zīmējumā līnija 3; pieņemam, ka attālums starp diviem blakus punktiem šajā režģī ir 1),
4. riņķa līnijas 4 resp. 5 iegūstamas no līnijas 3, pabīdot to par attālumu 1 pa kreisi resp. uz augšu.

5. Atbilde: 1004 skaitļus.

Risinājums. A. Ja izvēlamies 1004 skaitļus 1004; 1005; 1006; ... ;2006; 2007, pat divkāršots mazākais skaitlis $2004+2004=2008$ ir lielāks par lielāko no izvēlētajiem skaitļiem. Tāpēc šie skaitļi apmierina uzdevuma prasības.

B. Parādīsim, ka vairāk par 1004 skaitļiem izvēlēties nevar. Pieņemsim, ka kaut kāda skaitļu sistēma apmierina uzdevuma prasības. Pastāv divas iespējas.

B1. Lielākais no izvēlētajiem skaitļiem ir pāra skaitlis 2n, n - naturāls. Tā kā $2n \le 2007$, tad $n \le 1003\frac{1}{2}$, tāpēc $n \le 1003$. Neviens no skaitļiem, kas lielāki par 2n, nav izvēlēts. Skaitļus, kas mazāki par 2n un atšķiras no n, sadalām pāros ar summu 2n. Šādu pāru ir n-1:

1; 2n-1
2; 2n-2
3; 2n-3
.
.
.
n-1; n+1.

No katra pāra var būt izvēlēts ne vairāk kā viens skaitlis. Tā kā ir izvēlēts arī skaitlis 2n un **varbūt** ir izvēlēts skaitlis n, tad izvēlēto skaitļu daudzums nepārsniedz (n - 1) + 1 + 1 = n + 1. Tā kā $n \le 1003$, tad šis daudzums nepārsniedz 1004.

B2. Lielākais no izvēlētajiem skaitļiem ir nepāra skaitlis 2n+1, n – naturāls. Tā kā $2n+1 \le 2007$, tad $2n \le 2006$ un $n \le 1003$. Neviens no skaitļiem, kas lielāki par 2n+1, nav izvēlēts. Skaitļus, kas mazāki par 2n+1, sadalām pāros ar summu 2n+1. Šādu pāru ir n:

1 un 2n
2 un 2n-1
3 un 2n-2
.
.
.
n un n+1.

No katra pāra var būt izvēlēts augstākais viens skaitlis. Tā kā **ir** izvēlēts arī skaitlis 2n+1, tad izvēlēto skaitļu daudzums nepārsniedz n+1. Tā kā $n \le 1003$, tad šis daudzums nepārsniedz 1004.

6. Atbilde: jā, eksistē. Piemēram, tādi ir skaitļi 2874009600; 5748019200; 8622028800; 11496038400; 14370048000. Lasītājs, kas nav slinks, var viegli pārbaudīt, ka tie apmierina uzdevuma prasības ☺

Parādīsim, kā šie skaitļi iegūti.

Pieņemsim, ka x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - patvaļīgi atšķirīgi naturāli skaitļi. Apskatīsim to summas pa trīs. Tādu summu ir 10:

$x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_4, x_1+x_2+x_5, x_1+x_3+x_4,\ x_1+x_3+x_5,\ x_1+x_4+x_5,$
$x_2+x_3+x_4, x_2+x_3+x_5, x_2+x_4+x_5, x_3+x_4+x_5.$

Apzīmēsim ar R visu šo summu reizinājumu un apskatīsim skaitļus $x_1 \cdot R$; $x_2 \cdot R$; $x_3 \cdot R$; $x_4 \cdot R$; $x_5 \cdot R$. Šie skaitļi apmierina uzdevuma prasības. Apskatīsim, piemēram, trīs skaitļus $x_1 \cdot R$; $x_2 \cdot R$; $x_3 \cdot R$. To reizinājums ir $(x_1 x_2 x_3) \cdot R^3$, bet to summa ir $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot R$. Ievērojam, ka $\frac{(x_1 x_2 x_3) \cdot R^3}{(x_1 + x_2 + x_3) \cdot R} = \frac{R}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot (x_1 x_2 x_3) \cdot R$. Skaitļi R un $x_1 x_2 x_3$ ir naturāli; R pēc definīcijas dalās ar $x_1 + x_2 + x_3$, tātad arī $\frac{R}{x_1 + x_2 + x_3}$ ir naturāls skaitlis. Tāpēc $(x_1 R) \cdot (x_2 R) \cdot (x_3 R)$ dalās ar $x_1 R + x_2 R + x_3 R$. Citiem skaitļu trijniekiem prasīto pārbauda tieši tāpat.

Mūsu norādītajā piemērā $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$. Summas pa trim ir 6; 7; 8; 8; 9; 10; 9; 10; 11; 12. Šo summu reizinājums ir $42 \cdot 64 \cdot 81 \cdot 132 \cdot 100 = 2688 \cdot 10692 \cdot 100 = 2874009600$, no kā arī iegūts augšminētais komplekts.

Lasītājs pats var sastādīt un atrisināt līdzīgus uzdevumus, kur skaitļi „5” un „3” aizstāti ar citiem.

7. Atbilde: uzvar Andris

Risinājums: Atstājot Bruno kaudzīti ar 7 konfektēm, Andris uzvar. Tiešām, tālāk spēle var risināties šādi:

Bruno ņem	Andris ņem
1	3
2	5
3	4
4	3
5	2

Četros pēdējos gadījumos spēle jau beigusies; pirmajā gadījumā Bruno palikusi kaudzīte ar 3 konfektēm, bet viņš to visu apēst nedrīkst. Tāpēc viņš ēd 1 vai 2 konfektes, un Andris ar nākošo gājienu uzvar.

Tagad parādīsim, ka Andris uzvar, atstājot Bruno kaudzīti ar 13 konfektēm. Ja tādā situācijā Bruno ņem 1; 2; 4 vai 5 konfektes, Andris ņem attiecīgi 5; 4; 2 vai 1 konfekti un reducē spēli uz jau apskatīto gadījumu. Ja turpretī Bruno no 13 konfekšu kaudzītes ņem 3 konfektes, tad Andris ņem 5 konfektes; paliek 5 konfekšu kaudzīte, ko Bruno visu apēst nedrīkst. Tāpēc Andris ar savu nākošo gājienu uzvarēs.

Tagad parādīsim, ka Andris uzvar, atstājot Bruno kaudzīti ar 20 konfektēm. Tiešām, ja šādā situācijā Bruno ēd x konfektes, kur $x \neq 1$, tad Andris ēd (7-x) konfektes un reducē spēli uz jau apskatīto 13 konfekšu gadījumu. Ja turpretī Bruno ēd 1 konfekti, tad Andrim paliek kaudzīte ar 19 konfektēm, un viņš ēd 3 konfektes, atstājot Bruno kaudzīti ar 16 konfektēm. Bruno nevar ēst 3 konfektes, tāpēc pēc viņa gājiena Andrim paliks kaudzīte, kurā konfekšu skaits būs viens no skaitļiem 15; 14; 12; 11, un Andris ar nākošo gājienu varēs atstāt Bruno attiecīgi 13; 13; 7; 7 konfektes; saskaņā ar iepriekšējo tas nodrošina Andrim uzvaru.

Tagad pierādīsim, ka Andris uzvar, atstājot Bruno kaudzīti ar 26 konfektēm. Viņš rīkojas tāpat kā 13 konfekšu kaudzītes gadījumā. Ja Bruno ēd 1; 2; 4 vai 5 konfektes, Andris reducē spēli uz jau aprakstīto 20 konfekšu kaudzītes gadījumu; ja Bruno ēd 3 konfektes, Andris ēd 5 konfektes un atstāj Bruno kaudzīti ar 18 konfektēm. Bruno var ēst augstākais 4 konfektes, tāpēc Andris ar savu nākošo gājienu atstāj Bruno kaudzīti ar 13 konfektēm un saskaņā ar iepriekšējo uzvar.

Tieši tāpat parāda, ka Andris uzvar, ar savu pirmo gājienu apēdot 2 konfektes un atstājot Bruno kaudzīti ar 33 konfektēm. Ja Bruno šādā situācijā ēd x konfektes ($x \neq 1$), tad Andris ēd (7-x) konfektes, atstājot Bruno kaudzīti ar 26 konfektēm, un uzvar saskaņā ar iepriekšējo. Ja turpretī Bruno ēd 1 konfekti, tad Andris ēd 3 konfektes un atstāj Bruno kaudzīti ar 29 konfektēm. Tālākās tabulā norādītās Andra atbildes uz Bruno iespējamiem gājieniem (Bruno nevar ēst 3 konfektes) reducē spēli uz situācijām, par kurām jau pierādīts, ka tās nodrošina uzvaru Andrim:

Bruno ēd	Andris ēd	Paliek
1	2	26
2	1	26
4	5	20
5	4	20

8. Viegli ievērot, ka viena no saknēm ir 1. Tiešām, ievietojot $x=1$ vienādojuma kreisajā pusē, iegūstam $118\cdot 1^2-2125\cdot 1+2007=(118+2007)-2125=2125-2125=0$.

Pārveidosim vienādojumu reducētā formā: $x^2-\frac{2125}{118}x+\frac{2007}{118}=0$.

Apzīmēsim otro sakni ar x_2. Pēc Vjeta teorēmas $1\cdot x_2=\frac{2007}{118}$, tāpēc $x_2=\frac{2007}{118}$.

Tātad vienādojuma sakņu kopa ir $\left\{1;\frac{2007}{118}\right\}$.

9. Atbilde: 9 skaitļi.

Piemērs. Skaitļi 110; 60; 55; 55; 55; 55; 55; 55; 50 apmierina uzdevuma prasības (to summa ir 550).

Pierādījums: Pierādīsim, ka citāds skaitļu daudzums nav iespējams. Apzīmēsim skaitļus uzrakstīšanas secībā ar $x_1;x_2;...;x_n$, bet to summu ar S. Tad $x_1\ge x_2\ge x_3\ge x_4\ge ...\ge x_n$.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem arī

$$x_1=\frac{S-x_1}{4}\text{, tātad } x_1=\frac{S}{5};$$

$$x_3=\frac{S-x_3}{9}\text{, tātad } x_3=\frac{S}{10};$$

$$x_n=\frac{S-x_n}{10}\text{, tātad } x_n=\frac{S}{11}.$$

No šejienes iegūstam

$$S=x_1+(x_2+x_3)+(x_4+...+x_{n-1}+x_n)\ge x_1+(x_3+x_3)+(x_n+...+x_n+x_n)=\frac{S}{5}+2\cdot\frac{S}{10}+(n-3)\cdot\frac{S}{11}$$

; no nevienādības $S\ge\frac{S}{5}+\frac{2S}{10}+\frac{(n-3)S}{11}$ seko (jo S>0) $1\ge\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{n-3}{11}$, $\frac{n-3}{11}\le\frac{3}{5}$, $n-3\le 6\frac{3}{5}$,

$n\le 9\frac{3}{5}$. Tā kā n – naturāls skaitlis, tad $\mathbf{n\le 9}$.

Līdzīgi

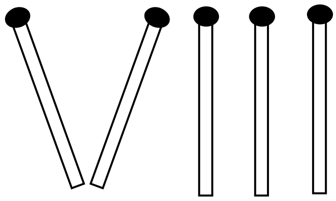
$$S=(x_1+x_2)+(x_3+x_4+...+x_{n-1})+x_n\le 2x_1+(n-3)x_n+x_n<2x_1+(n-2)x_3=\frac{2S}{5}+\frac{(n-2)S}{10}$$

, no kurienes seko $1<\frac{2}{5}+\frac{n-2}{10}, \frac{n-2}{10}>\frac{3}{5}, n-2>6$, **n > 8**.

No abiem izceltajiem apgalvojumiem seko n = 9, k.b.j.

10. Uzdevums zināmā mērā jāuztver kā joks. Vārdam „kubs” matemātikā ir vismaz divas dažādas nozīmes: a) ģeometriska figūra, b) skaitļa trešā pakāpe.

Skaidrs, ka kubu („piepildītu” ķermeni) no 5 sērkociņiem bez laušanas izveidot nevarēs, jo sērkociņš ir garāks par vajadzīgā kuba šķautnes garumu. Nevarēs izveidot arī kuba karkasu (tikai šķautnes), jo tādu ir 12, un nekādas divas no tām neatrodas uz vienas taisnes. Turpretī skaitļa $2^3=8$ pierakstu ar romiešu cipariem izveidot var:



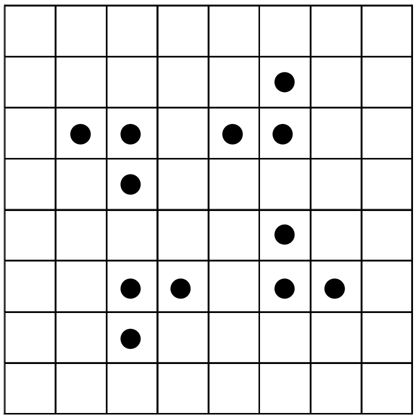
4.zīm.

Lasītājs pats var veidot arī dažādu kubu pierakstus ar arābu cipariem.

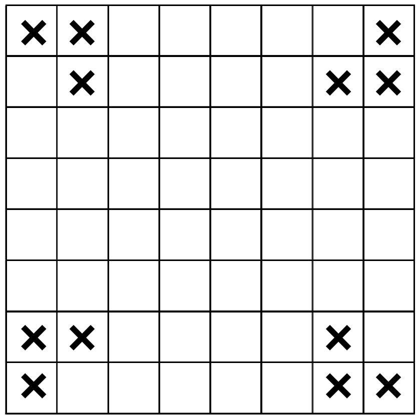
2006./2007. mācību gads

5.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: 12 zirdziņus.
Risinājums:
A. 12 zirdziņu izkārtojuma piemērs redzams 1. zīm.



1.zīm.



2.zīm.

B. Pierādīsim, ka vismaz 12 zirdziņi ir vajadzīgi.

Apskatīsim 2. zīm. Nekādas divas no tur atzīmētajām rūtiņām nevar apdraudēt ar vienu un to pašu zirdziņu, un neviens zirdziņš, kas atrodas uz kādas no šīm rūtiņām, neapdraud nevienu citu no šīm rūtiņām. Tāpēc to zirdziņu, kas vai nu atrodas uz šīm rūtiņām, vai tās apdraud, kopā ir vismaz 12.

2. Atbilde: 9 biedrības.

A. Apzīmēsim zēnus ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 14. Uzdevuma nosacījumus apmierina šāda biedrību sistēma:

1;2;3
4;5;6
7;8;9
10;11;12
13;14;1
2;3;4
5;6;7
8;9;10
11;12;13

B. Pierādīsim, ka vairāk par 14 biedrībām nevar būt. Pieņemsim, ka katra biedrība nodibinājusi savas apliecības. Tā kā neviens no 14 zēniem nav vairāk kā 2 biedrībās, tad kopā nav vairāk par $14 \cdot 2 = 28$ apliecībām.

Ja biedrību būtu vairāk par 9, tad to būtu vismaz 10; tad kopā būtu vismaz $10 \cdot 3 = 30$ apliecības. Tā ir pretruna.

3. Atbilde: $x = 3$; $y = 4$; $z = 5$.

Risinājums: Pārrakstām vienādojumu formā

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = 3 + \frac{5}{21}$$

$$x - 3 = \frac{5}{21} - \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$$

Tā kā y un z – naturāli skaitļi, tad labajā pusē gan mazināmais, gan mazinātājs ir robežās starp 0 un 1. Tāpēc arī labā puse pēc moduļa (absolūtās vērtības) ir **mazāka par 1.** Tā kā x ir naturāls skaitlis, tad $x-3$ ir vesels skaitlis. Vienīgais veselais skaitlis, kas pēc moduļa mazāks par 1, ir 0. Tāpēc $x-3=0$ (no šejienes seko, ka $x=3$) un $\frac{5}{21}=\frac{1}{y+\frac{1}{z}}$. No šīs vienādības iegūstam $y+\frac{1}{z}=\frac{21}{5}$ un tālāk $y+\frac{1}{z}=4+\frac{1}{5}$.

Tāpat kā iepriekš secinām, ka $y=4$ un $z=5$.

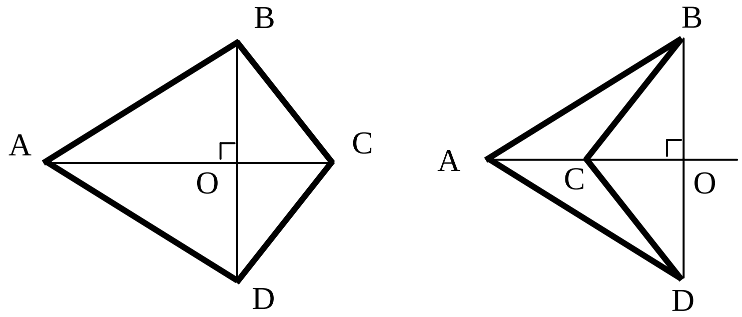
4. Ievērojam, ka $ab-bc+cd-da=(ab-ad)+(cd-cb)=a(b-d)-c(b-d)=(a-c)(b-d)=$

$=(c-a)(d-b)$.

Saskaņā ar doto $c-a$ un $d-b$ ir pozitīvi skaitļi. To reizinājums ir lielākais iespējamais, ja katrs reizinātājs ir lielākais iespējamais. Reizinātājs $c-a$ būs lielākais iespējamais tad, ja c būs iespējami liels, bet a – iespējami mazs, t.i., ja $c=5$ un $a=2$; tad $c-a=3$. Savukārt $d-b$ būs iespējami liels, ja d=6 un b=3; tad $d-b=3$.

Tātad izteiksmes lielākā iespējamā vērtība ir $3\cdot 3=9$.

5.



3.zīm. 4.zīm.

Apzīmēsim apskatāmo četrstūri ar ABCD. Ja tas ir izliekts (skat. 3.zīm.) un tā diagonāļu krustpunkts ir O, tad no Pitagora teorēmas seko, ka

$$AB^2=OA^2+OB^2 \quad (1)$$
$$CD^2=OC^2+OD^2 \quad (2)$$
$$BC^2=OB^2+OC^2 \quad (3)$$
$$AD^2=OA^2+OD^2 \quad (4)$$

Saskaitot (1) un (2), iegūstam

$$AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2 \quad (5)$$

Saskaitot (3) un (4), iegūstam

$$BC^2+AD^2=OB^2+OC^2+OA^2+OD^2 \quad (6)$$

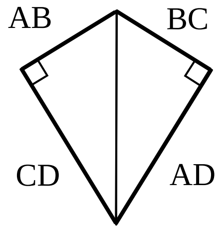
No (5) un (6) seko, ka

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2 \quad (7)$$

Līdzīgi vienādību (7) iegūst gadījumā, ja ABCD ir ieliekts četrstūris (skat. 4.zīm.)

Tagad izveidojam divus taisnleņķa trijstūrus. Vienam no tiem katešu garumi ir AB un CD, otram – BC un AD. Saskaņā ar (7) no Pitagora teorēmas seko, ka šiem trijstūriem hipotenūzu garumu kvadrāti ir vienādi; tāpēc vienādas ir arī hipotenūzas.

Saliekot šos trijstūrus hipotenūzām kopā, iegūstam vajadzīgo četrstūri (5.zīm.).

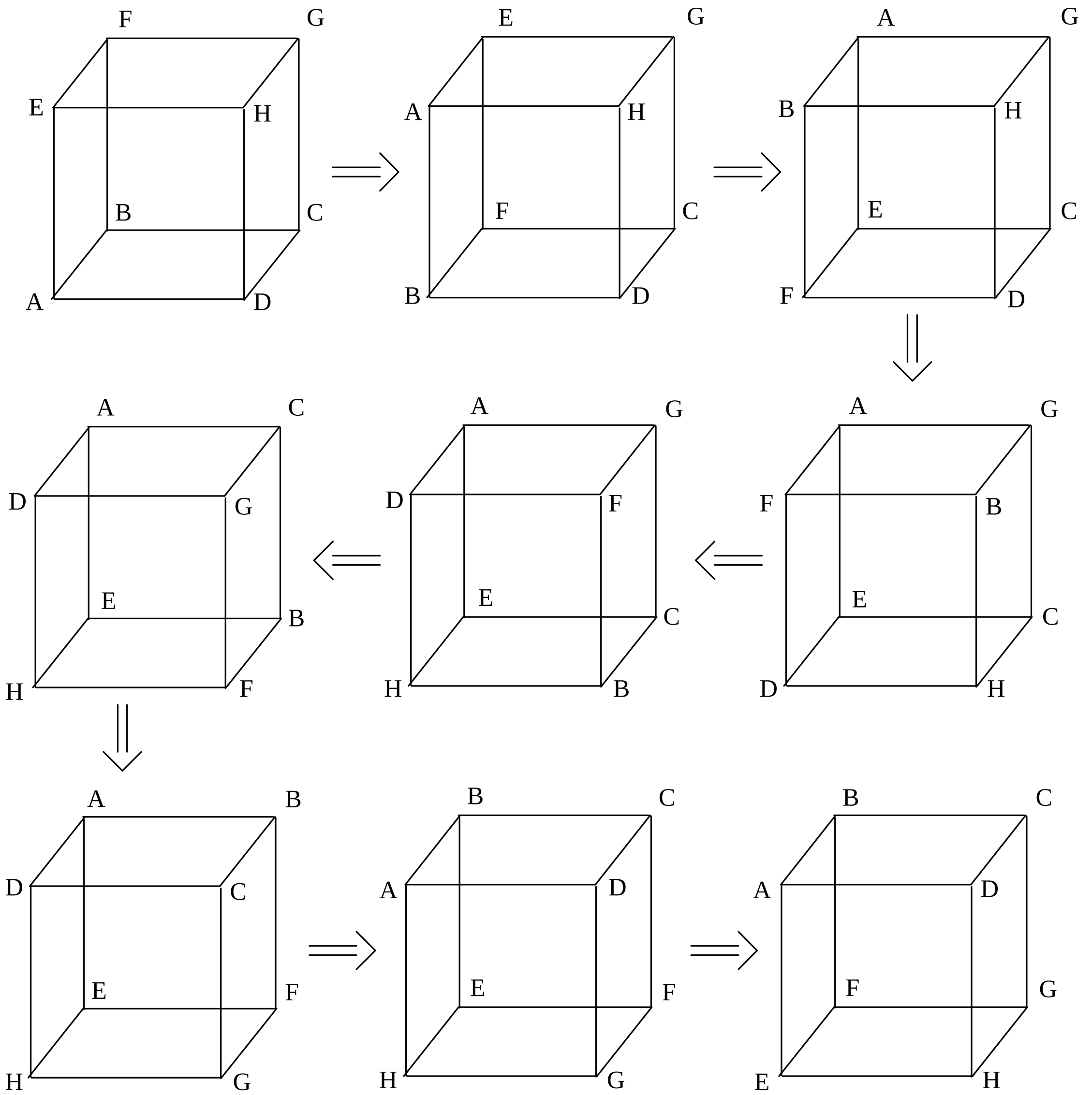


5.zīm.

6. Atbilde: jā, tā var gadīties.

Sauksim par gājienu tādu 4 skudru pārvietošanos, kuras atrodas vienā skaldnē un vienlaicīgi ar vienādiem ātrumiem rāpo katra pa citu šīs skaldnes šķautni.

Tad prasīto var sasniegt ar 8 gājieniem (skat. 6.zīm.)



6.zīm.

Lasītājs var patstāvīgi mēģināt samazināt skudru kopējo noieto ceļu (šai risinājumā tas ir $32 \cdot a$, kur a – kuba šķautnes garums), kā arī izpētīt, kādi skudru izvietojumi kuba virsotnēs vispār ir sasniedzami.

7. Apskatīsim jebkuru 4 rūtiņu veidotu kvadrātu ar tajā ierakstītiem skaitļiem (skat. 7.zīm.)

b	c
a	d

7.zīm.

Saskaņā ar uzdevumā doto $a + c = b + d$, no kurienes seko, ka $c - d = b - a$.

y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

8.zīm.

Apskatīsim divas blakus esošas rūtiņu rindas un tajās ierakstītos skaitļus (8.zīm). Pielietojot iepriekš iegūto rezultātu jebkuram 4 rūtiņu kvadrātam, kas atrodas šajās rindās, iegūstam $y_1 - x_1 = y_2 - x_2$, $y_2 - x_2 = y_3 - x_3$, . . . , $y_7 - x_7 = y_8 - x_8$. Apzīmēsim šo starpību kopējo vērtību ar d. Tad $y_1 - x_1 = d$, $y_2 - x_2 = d$, . . . , $y_8 - x_8 = d$ un tāpēc $y_1 = x_1 + d$, $y_2 = x_2 + d$, . . . , $y_8 = x_8 + d$, t.i., y rindiņas skaitļi iegūstami no x rindiņas atbilstošajiem skaitļiem, pieskaitot tiem vienu un to pašu lielumu d.

Skaidrs, ka tas attiecas uz **jebkurām divām blakus esošām rindiņām.** Tad tas attiecas arī uz **jebkurām divām (ne noteikti blakus esošām) rindiņām.** Tiešām, apskatīsim i-to un j-to rindiņu, $i < j$. Apzīmēsim ar d_i starpību starp i-tās un (i+1)-ās rindiņas atbilstošajiem skaitļiem; ar d_{i+1} - starpību starp (i+1)-ās un (i+2)-ās rindiņas atbilstošajiem skaitļiem; . . . ; ar d_{j-1} - starpību starp (j-1)-ās un j-tās rindiņas atbilstošajiem skaitļiem. Tad starpība starp i-tās un j-tās rindiņas atbilstošajiem skaitļiem ir $d_i + d_{i+1} + ... + d_{j-1}$ - viena un tā pati visiem skaitļu pāriem, kas atrodas i-tā un j-tā rindiņā vienā kolonnā.

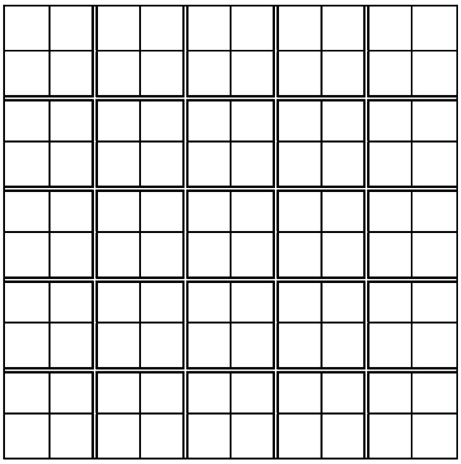
Apskatīsim patvaļīgu no rūtiņām sastāvošu taisnstūri un tā četras stūra rūtiņas ar tajās ierakstītajiem skaitļiem (skat. 9.zīm).

b	...	c
...	...	...
a	...	d

9.zīm.

Saskaņā ar nupat pierādīto, eksistē tāds skaitlis *D*, ka $b - a = c - d = D$. Tad $b = a + D$ un $c = d + D$, tātad $a + c = a + d + D$ un $b + d = a + D + d$, tātad $a + c = b + d$, k.b.j.

8. Ievērosim, ka, dalot naturālos skaitļus no 1 līdz 100 ieskaitot ar 4, tieši 25 reizes radīsies katrs no atlikumiem 0; 1; 2; 3. Varam rūtiņās rakstīt šos atlikumus, nevis pašus skaitļus. Tad blakus rūtiņās (t.i., rūtiņās ar kopīgu malu vai kopīgu stūri) nedrīkst būt 0 un 0; 2 un 2; 1 un 3.



10.zīm.

Sadalām kvadrātu 25 mazākos kvadrātos, kas katrs sastāv no 2x2 rūtiņām (skat. 10.zīm). Nevienā no tiem nedrīkst būt 2 nulles vai 2 divnieki. Tā kā pavisam jāizvieto 25 nulles un 25 divnieki, tad **katrā kvadrātā jābūt tieši vienai nullei un vienam divniekam.** Abās atlikušajās rūtiņās nevienā kvadrātā nedrīkst būt 1 un 3, tāpēc tajās **katrā kvadrātā ir vai nu 2 vieninieki, vai 2 trijnieki.** Bet tad iznāk, ka pavisam **lielajā kvadrātā jābūt pāra skaitam vieninieku un pāra skaitam trijnieku.** Tā ir pretruna ar to, ka gan vieninieku, gan trijnieku ir tieši 25. Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

9. Apzīmēsim $5n = A$. Ievērosim, ka $2 \cdot A = 2 \cdot 5n = 10n$ un skaitļiem *n* un 10*n* ir vienādas ciparu summas. Tātad n ciparu summa vienāda ar $2 \cdot A$ ciparu summu. Reizinot *A* ar 2, katrs cipars rada pārnesumu 1 uz nākošo šķiru, bez tam piecinieks pats par sevi veido reizinājumā ciparu 0, bet sešinieks – ciparu 2 (gan nullei, gan divniekam visās šķirās, izņemot pēdējo, tiek pieskaitīts pārnesums 1, tāpēc tie kļūst par 1 resp. 3). Tāpēc 2A ciparu summa ir $10 \cdot 0 + 10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 = 40$.

10. Atbilde: jā, var.

Piemēram, viņi var vienoties par šādu stratēģiju:

Andris izsaka minējumu, ka viņam paredzēta tāda pati ceļazīme kā Maijai, bet Maija – ka viņai paredzēta citāda ceļazīme nekā Andrim.

Pārbaudīsim, ka visos gadījumos mērķis ir sasniegts.

Andrim paredzēts braukt uz	Maijai paredzēts braukt uz	Andris saka, ka viņam paredzēts braukt uz	Maija saka, ka viņai paredzēts braukt uz	Pareizi uzmin
Parīzi	Parīzi	Parīzi	Romu	Andris
Parīzi	Romu	Romu	Romu	Maija
Romu	Parīzi	Parīzi	Parīzi	Maija
Romu	Romu	Romu	Parīzi	Andris

2006./2007. mācību gads

6.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. a) Apskatāmā skaitļa ciparu summa ir $2007 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 2007 + 9$. Skaitļa 2007 ciparu summa ir 9, tātad 2007 dalās ar 9. Tāpēc arī $2007 + 9$ dalās ar 9. Tāpēc arī apskatāmais skaitlis dalās ar 9.

b) Apskatīsim dalīšanas procesa sākumu:

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 (1) 1 ... : 9 = 1 2 3 4 5 6 7 9 0 1 ...
  9
 ---
  2 1
  1 8
  ---
    3 1
    2 7
    ---
      4 1
      3 6
      ---
        5 1
        4 5
        ---
          6 1
          5 4
          ---
            7 1
            6 3
            ---
              8 1
              8 1
              ---
                0 0
                0 0
                ---
                  1 1
                    9
                  ---
                    2 ...
```

Redzam, ka pēc pirmo deviņu vieninieku izmantošanas esam ieguvuši dalījumā ciparu virkni 12345679 un atlikumā nulli. Sākot „apstrādāt” nākošo ciparu (tas apvilkts ar aplīti), mēs it kā no jauna sākam dalīt no daudziem vieniniekiem sastāvošu skaitli. Tāpēc šāds process atkārtosies vēlreiz, vēlreiz, vēlreiz..., kamēr pietiks vieninieku.

Ievērosim, ka 2007 dalās ar 9: $2007 : 9 = 223$. Tāpēc, kad būsim „apstrādājuši” visus vieniniekus, dalījumā būsim 223 reizes ieguvuši ciparu virkni 12345679, kas viena no otras atdalītas ar nullēm. Tātad būsim arī ieguvuši 223 četriniekus. Dalīšanas procesa beigas risināsies šādi:

```
. . . 3 3 3 : 9 = ...  0 3 7
    .
    .
    .
   ---
    0 3
    0 0
    ---
      3 3
      2 7
      ---
        6 3
        6 3
        ---
```

Kā redzams, tur jauni četrinieki neparādās.

Tātad apskatāmajā dalījumā būs 223 četrinieki.

2. Apskatīsim divus atrisinājumus.

1.risinājums. Apzīmēsim apskatāmo skaitli ar S. No tā, ka $S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$ un katrā iekavā ir pozitīvs skaitlis, seko, ka $S > 0$. Savukārt no tā, ka $S = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) - \frac{1}{100}$ un katrā iekavā ir pozitīvs skaitlis, seko, ka $S<1$. Tātad $0<S<1$. Bet starp nulli un vieninieku veselu skaitļu nav. Tātad *S* nav vesels skaitlis.

2.risinājums. Iedomāsimies, ka esam „noveduši daļas pie kopsaucēja”, turklāt pie mazākā iespējamā. Tad katrai daļai ir kāds papildreizinātājs (katrai savs), ar kuru jāpareizina gan tās skaitītājs, gan saucējs, lai visi saucēji kļūtu vienādi. No visiem skaitļiem 2, 3, 4, 5, ... , 99, 100 skaitlis 64 dalās ar vislielāko daudzumu divnieku – ar sešiem (tiešām, $64=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$), bet visi citi skaitļi satur mazāku daudzumu reizinātāju 2. Tātad mazākajā iespējamā kopsaucējā jābūt sešiem reizinātājiem 2. Tāpēc skaitļa $\frac{1}{64}$ papildreizinātājs būs nepāra skaitlis, bet visiem citiem skaitļiem 1, $\frac{1}{2}$, ... , $\frac{1}{63}$, $\frac{1}{65}$, $\frac{1}{66}$, ... , $\frac{1}{100}$ papildreizinātāji būs pāra skaitļi. Tāpēc, uzrakstot summu ar vienu daļsvītru, **saucējā būs pāra skaitlis**, bet skaitītājā būs 99 pāra saskaitāmie un viens nepāra saskaitāmais; tātad **skaitītājā būs nepāra skaitlis**. Tā kā nepāra skaitlis nedalās ar pāra skaitli, tad daļas vērtība nav vesels skaitlis.

3. Atbilde: no jebkura.

Risinājums: skaidrs, ka no jebkura vairākciparu naturāla skaitļa, pakāpeniski svītrojot tā ciparus no beigām, var iegūt naturālu viencipara skaitli: Apskatīsim sekojošu pārveidojumu virkni:

1 → **2** → **4** → **8** → 16 → 32 → **3** → **6** → 12 → 24 → 48 → 96 → **9** → 18 → 36 → 72 →
→ **7** → 14 → 28 → 56 → **5** → 10 → **1**

No šīs virknes redzams, ka, „kustoties pa apli”, no jebkura naturāla vienciparu skaitļa var iegūt skaitli 56.

Tāpēc, ja parādīsim, ka no 56 var iegūt 27, mūsu atbilde būs pamatota.

To, ka no 56 var iegūt 27, parāda pārveidojumu virkne:

56 → 112 → 11 → 22 → 44 → 88 → 176 → 17 → 34 → 68 → 136 → 272 → 27.

Līdz ar to uzdevums atrisināts.

4. Galvenās grūtības šī uzdevuma risinājumā rada tas, ka 8 minētās taisnes var plaknē novietoties ļoti dažādos veidos, un nepieciešams dot risinājumu, kas aptvertu visas iespējas.

Apskatīsim kvadrātisku tabulu, kas sastāv no 8x8 rūtiņām, un tās rindas apzīmēsim ar burtiem a; b; c; d; e; f; g; h. Ar šiem pašiem burtiem apzīmēsim arī kolonnas (skat.1.zīm.).

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		7	6	5	4	3	2	1
b	7		5	4	3	2	1	6
c	6	5		3	2	1	7	4
d	5	4	3		1	7	6	2
e	4	3	2	1		6	5	7
f	3	2	1	7	6		4	5
g	2	1	7	6	5	4		3
h	1	6	4	2	7	5	3	

1.zīm.

Ievērosim, ka

1) katrā rindiņā sastopami visi skaitļi no 1 līdz 7, katrs vienu reizi,

2) katrā kolonnā sastopami visi skaitļi no 1 līdz 7, katrs vienu reizi,

3) ja rūtiņa atrodas rindiņā un kolonnā, kas apzīmētas ar vienādiem burtiem, tad šajā rūtiņā nekāds skaitlis nav ierakstīts,

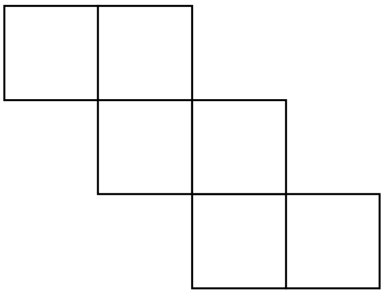
4) skaitļi tabulā ir ierakstīti simetriski attiecībā pret neaizpildīto diagonāli, t.i.: ja x un y – dažādi burti, tad rindas x un kolonnas y kopējā rūtiņā ierakstīts tāds pats skaitlis kā rindas y un kolonnas x kopējā rūtiņā.

Šī tabula parāda, kā var pierakstīt skaitļus taišņu krustpunktiem.

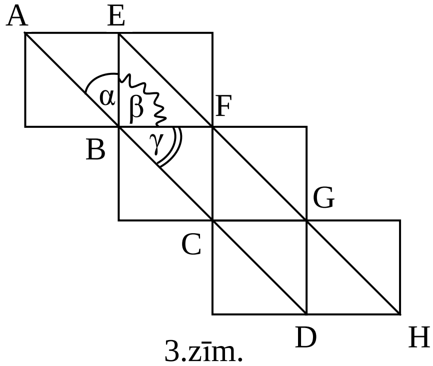
Apzīmēsim taisnes ar burtiem a; b; c; d; e; f; g; h. Ja x un y – dažādi burti, tad taišņu x un y krustpunktam pierakstām tādu pašu skaitli, kāds ierakstīts tabulas „x-tās rindiņas" un „y-ās kolonnas" kopējā rūtiņā.

Īpašība 1) garantē to, ka uz katras taisnes visi skaitļi būs dažādi; īpašība 3) atspoguļo to, ka taisnes pati sevi nekrusto; īpašība 4) garantē to, ka katram krustpunktam pieraksta tikai vienu skaitli (taisnes x krustpunktam ar taisni y paredzēts tas pats skaitlis, kas taisnes y krustpunktam ar taisni x). Īpašība 2) izsaka to pašu, ko 1); tā automātiski seko no 1) un 4).

5. Viegli saprast, ka, salokot no 6 vienādiem kvadrātiem sastāvošo 2.zīm. attēloto figūru, iegūst kuba virsmu.



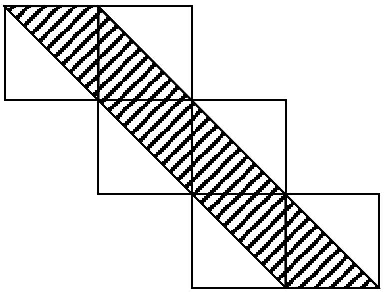
2.zīm.



3.zīm.

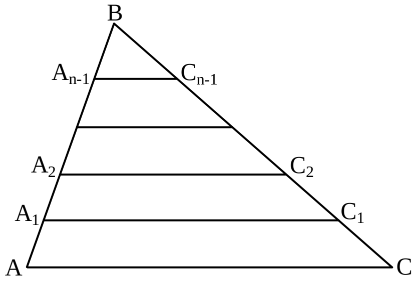
Novelkam katrā kvadrātā pa diagonālei, kā parādīts 3.zīm. Katrs kvadrāts sadalās divos vienādos vienādsānu taisnleņķa trijstūros. Tāpēc $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\gamma = 45^\circ$. Tātad $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, t.i., abas diagonāles BA un BC savā starpā veido izstieptu leņķi. Tātad punkti A, B, C ir uz vienas taisnes. Līdzīgi iegūstam, ka uz vienas taisnes ir punkti B, C un D. Tā kā caur B un C iet tikai viena taisne, tad visi 4 punkti A, B, C, D ir uz vienas taisnes (uz tās, kas iet caur B un C). Līdzīgi pierāda, ka visi četri punkti E, F, G, H ir uz vienas taisnes. **Tātad nogriežņi AE, EF, FG, GH, HD, DC, CB, BA veido četrstūri.** Pierādīsim, ka tas ir paralelograms. Tiešām, AE⊥BE un BF⊥BE; tāpēc **AE||BF**. Līdzīgi **BF||CG** un **CG ||DH**. No izceltajām sakarībām seko, ka AE||DH. Tā kā bez tam AE=DH (visi 6 kvadrāti ir vienādi), tad malas AE un DH ir savstarpēji paralēlas un vienādas; tāpēc AEHD ir paralelograms. Tas satur tieši pusi no katra kvadrāta laukuma.

Uzlīmējot šādu paralelogramu uz kuba virsmas izklājuma (skat.4.zīm.) un pēc tam šo izklājumu salokot, iegūstam vajadzīgo.

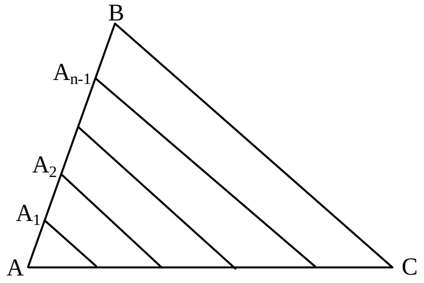


4.zīm.

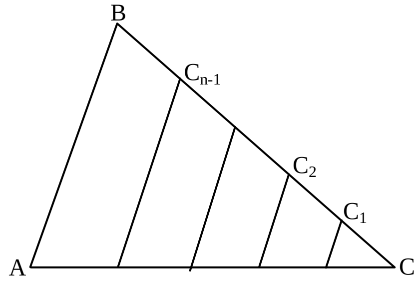
6. Apskatām patvaļīgu trijstūri ABC un sadalām katru no tā malām AB un BC n vienādās daļās. Pēc Talesa teorēmas taisnes A_1C_1, A_2C_2, ... , $A_{n-1}C_{n-1}$ paralēlas pamatam AC (skat.5.zīm.).



5.zīm.



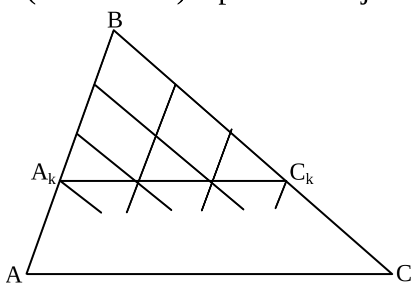
6.zīm.



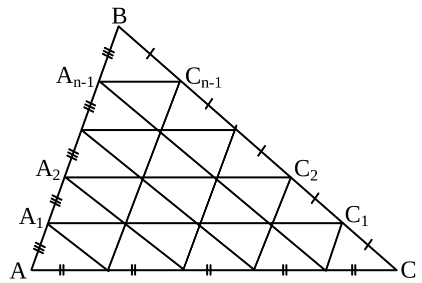
7.zīm.

Ja caur punktiem A_1, A_2, ... , A_{n-1} velk taisnes paralēli malai BC, tās sadala AC n vienādās daļās (skat.6.zīm.). Tāpat notiek, ja caur punktiem C_1, C_2, ... , C_{n-1} velk taisnes paralēli BA (skat. 7.zīm.). Arī tas seko no Talesa teorēmas.

No šejienes seko, ka taisnes, kas redzamas 6. un 7.zīmējumā, krusto katru no nogriežņiem AC, A_1C_1, A_2C_2, ... , $A_{n-1}C_{n-1}$ **vienos un tajos pašos punktos**, kas dala šo nogriezni attiecīgā skaitā vienādu daļu (skat.8.zīm.): apskatām trijstūrus ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3 utt.



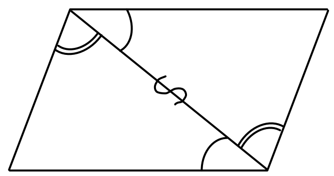
8.zīm.



9.zīm.

Tāpēc, novelkot visas taisnes, kas redzamas 5., 6. un 7. zīmējumā, trijstūris ABC sadalās mazos trijstūrīšos, kam malas paralēlas ΔABC malām un kas viens ar otru saskaras vai nu pa veselu malu, vai tikai ar vienu virsotni, vai arī nesaskaras nemaz (skat.9.zīm.).

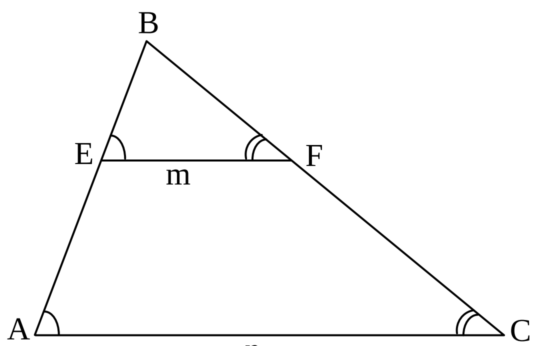
Katriem diviem blakus trijstūrīšiem viena mala ir kopīga, bet citas – pa pāriem paralēlas (skat.10.zīm.). No malu paralelitātes seko iekšējo šķērsleņķu vienādība. Tāpēc šie trijstūri ir vienādi pēc pazīmes *lml*.



10.zīm

Tā kā vienādi ir **katri** divi blakus esoši trijstūrīši, tad **visi** mazie trijstūrīši, kas redzami 9.zīm., ir savā starpā vienādi.

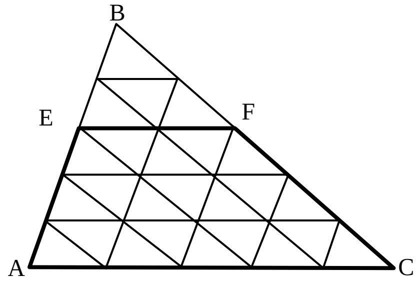
Apskatīsim tagad uzdevumā minēto trapeci *AEFC*. Pieņemsim, ka $AC=n$, $EF=m$ un $n>m$ (skat.11.zīm.).



11.zīm.

Pagarinām trapeces sānu malas līdz krustpunktam *B*. Sadalām katru ΔABC malu *n* vienādās daļās un novelkam līnijas, kā parādīts 9.zīm. **Tad *EF* ir viena no līnijām, kas vilktas paralēli *AC*.** Tiešām, $\Delta EBF \sim \Delta ABC$, tāpēc $\frac{BE}{BA}=\frac{EF}{AC}=\frac{m}{n}$, tātad $BE=\frac{AB}{n}\cdot m$; tas nozīmē, ka *BE* satur tieši *m* nogrieznīšus, kas veidojas uz malas *AB*. Līdzīgi spriež par *BF*.

Tā kā viss trijstūris *ABC* ar novilktajām līnijām sadalīts vienādos trijstūros, tad tāpat sadalīta arī trapece *AEFC* (skat.12.zīm.).



12.zīm.

7. Ja, piemēram, $a \geq 2$, tad $2-a \leq 0$ un $c(2-a) \leq 0 < 1$. Līdzīgi apskata gadījumus, kad $b \geq 2$ vai $c \geq 2$.

Atliek apskatīt gadījumu, kad $0<a<2$, $0<b<2$ un $0<c<2$.

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tad

$$\begin{aligned} a(2-b) &> 1 \\ b(2-c) &> 1 \qquad (1) \\ c(2-a) &> 1 \end{aligned}$$

Visām nevienādībām (1) abās pusēs ir pozitīvi skaitļi. Tāpēc tās drīkst sareizināt savā starpā. Sareizinot un samainot iegūtajā nevienādībā reizinātājus vietām, iegūstam

$$[a(2-a)]\cdot[b(2-b)]\cdot[c(2-c)]>1 \qquad (2)$$

Ievērosim, ka patvaļīgam *x* ir spēkā nevienādība

$x(2-x)=2x-x^2=1-\left(x^2-2x+1\right)=1-(x-1)^2$, tāpēc

$$x(2-x)\leq 1 \qquad (3)$$

Ievērojot (3), iegūstam

$$\begin{aligned} a(2-a) &< 1 \qquad (4) \\ b(2-b) &< 1 \qquad (5) \\ c(2-c) &< 1 \qquad (6) \end{aligned}$$

Tā kā mēs apskatām gadījumu, kad 0< *a*, *b*, *c* <2, tad visām nevienādībām (4), (5), (6) abās pusēs ir pozitīvi skaitļi. Tāpēc tās drīkst reizināt savā starpā. Iegūstam

$$[a(2-a)]\cdot[b(2-b)]\cdot[c(2-c)]<1 \qquad (7)$$

Bet nevienādības (2) un (7) „runā pretī" viena otrai. Tātad iegūta pretruna un mūsu pieņēmums, ka neviena no uzdevumā minētajām nevienādībām nav pareiza, ir aplams. Tātad vismaz viena no tām ir pareiza, k.b.j.

8. Vispirms pierādīsim, ka $\boldsymbol{x+y+z>11}$. Tiešām, ja būtu $x+y+z\leq 11$, tad $28\cdot x+30\cdot y+31\cdot z<31\cdot x+31\cdot y+31\cdot z=31(x+y+z)\leq 341<365$, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad tiešām $x+y+z>11$.

Tagad pierādīsim, ka $\boldsymbol{x+y+z<13}$. Tiešām, ja būtu $x+y+z\geq 13$, tad $28\cdot x+30\cdot y+31\cdot z=28\cdot x+28\cdot y+28\cdot z+2\cdot y+3\cdot z=28(x+y+z)+2y+3z\geq 28\cdot 13+2y+3z=$

$=364+2y+3z\geq 364+2+3=369>365$ (jo $y\geq 1$ un $z\geq 1$). Tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad tiešām $x+y+z<13$.

No abiem izceltajiem apgalvojumiem seko, ka vienīgā **varbūt iespējamā** $x+y+z$ vērtība ir 12, jo $x+y+z$ ir naturāls skaitlis un citu naturālu skaitļu, kas vienlaicīgi būtu gan lielāki par

11, gan mazāki par 13, nav. Piemērs x=1; y=4; z=7 parāda, ka vienādība $x+y+z=12$ tiešām ir iespējama (atcerieties par dienu skaitu dažādos mēnešos parastā gadā!).

9. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Pieņemsim pretējo, ka tā ir gadījies. Tad eksistē veiksmīgs olimpiādes dalībnieks V, kurš nav atrisinājis nevienu vieglo uzdevumu. Tātad viņš ir atrisinājis tikai grūtus uzdevumus (varbūt pat ne pilnīgi visus grūtos uzdevumus!). Tā kā V ir veiksmīgs, tad ir vairāk tādu uzdevumu, kurus viņš ir atrisinājis, nekā tādu uzdevumu, kurus viņš nav atrisinājis. Tātad **grūto uzdevumu ir vairāk nekā vieglo** (jo pat tikai to grūto uzdevumu, kurus V ir atrisinājis, ir vairāk nekā vieglo uzdevumu un to grūto uzdevumu, kurus V nav atrisinājis, kopā).

Bet tādā gadījumā dalībnieks, kas ir atrisinājis visus grūtos uzdevumus (un varbūt vēl dažus vieglos), nevar būt neveiksmīgs, jo viņa atrisināto uzdevumu ir vairāk nekā neatrisināto, tātad vairāk nekā puse visu uzdevumu. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

10. Cipariņš var pārgriezt katru tableti uz pusēm un no rīta iedzert pa vienai pusītei no katras tabletes, bet vakarā – atlikušās pusītes.

Ievērosim, ka, šādi rīkojoties, Cipariņš praktiski izmanto saskaitīšanas komutativitāti: lai kādā kārtībā saskaitītu 4 saskaitāmos, no kuriem divi ir $\frac{1}{2}x$ un divi ir $\frac{1}{2}y$, iegūst summu $x+y$.