"Profesora Cipariņa kluba" 2006./07. m.g.

1. nodarbība

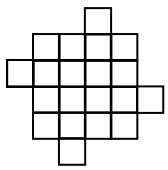
1. Jānītis sareizināja visus naturālos skaitļus no 1 līdz 12 ieskaitot un rezultātam pieskaitīja 1. Vai iegūtais skaitlis dalās ar 13? Centieties atrast dažādus risinājumus!

2. Vai skaitļus a) no 1 līdz 9 ieskaitot, b) no 1 līdz 10 ieskaitot var sadalīt 3 grupās tā, lai visām grupām būtu vienādas skaitļu summas? c) Kādiem n tā var sadalīt naturālos skaitļus no 1 līdz n?

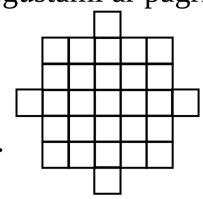
3. Ciemi A, B, C, D atrodas kvadrāta virsotnēs. Kur jāuzbūvē profesora Cipariņa vasarnīca, lai līdz visiem ciemiem noejamo attālumu summa būtu mazākā iespējamā? (Cipariņš vienmēr pārvietojas pa taisni).

4. Vai eksistē tādi divi viensotram sekojoši naturāli skaitļi, kam abiem ciparu summas dalās ar 4? Bet ar 3?

5. Parādīt, ka 1.zīm. redzamo figūru, kas sastāv no vienādām kvadrātiskām rūtiņām, var sadalīt 4 vienādos daudzstūros tā, ka dalījuma līnijas iet pa rūtiņu malām. Centieties atrast vismaz 7 dažādus sadalījumus, kas viens no otra nav iegūstami ar pagriešanu.



1.zīm.



2.zīm.

6. Andris un Bruno pamīšus liek uz apaļa galda pa vienai 1 santīma monētai. Monētas nedrīkst saskarties. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Pirmais iet Andris. Kurš no zēniem uzvar, ja abi spēlē bez kļūdām?

7. Gunārs sareizināja 300 skaitļus „5”, bet Dzintars – 500 skaitļus „3”. Kurš ieguva lielāku rezultātu?

8. Ciemi A, B, C, D atrodas kvadrāta virsotnēs dotajā secībā. Ciemos A un C dzīvo votivapas, ciemos B un D – šillišallas. Kur Maijiņai uzbūvēt savu mājiņu, lai attālumu summa līdz votivapām būtu tāda pati kā līdz šillišallām?

9. Vai eksistē tādi divi viensotram sekojoši naturāli skaitļi, kam abiem ciparu summa dalās ar 2006?

10. Kādā mazākajā daudzumā taisnstūru var sagriezt 2.zīm. redzamo figūru? Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.

2. nodarbība

1. Klasē ir gan zēni, gan meitenes. Matemātikas pulciņu apmeklē trešdaļa zēnu un sestdaļa meiteņu. Kuru skolēnu ir vairāk – to, kuri apmeklē, vai to, kuri neapmeklē matemātikas pulciņu?

2. Kvadrātiska režģa veidā izvietoti 25 punkti. Tie visi jāpārsvītro ar taisnēm, kas nav paralēlas režģa malām. Kāds ir mazākais taišņu skaits, ar kuru to var izdarīt?

3. Īstas nesaīsināmas daļas vērtība lielāka par $\frac{1}{3}$. Tās skaitītājam pieskaitot kādu naturālu skaitli, bet saucēju reizinot ar šo pašu skaitli, daļas vērtība nemainās. Kurām daļām piemīt šīs īpašības?

4. Vai skaitļus 25; 38; 47; 68; 289; 578; 601; 3456 var izvietot pa apli tā, lai katriem diviem blakus skaitļiem būtu kopīgs cipars?

5. Doti divi trauki, kuru ietilpības ir 5 litri un 7 litri. Kā, izmantojot tikai šos traukus, var vienā no tiem ieliet tieši 6*l* ūdens? (Pieejamais kopējais ūdens daudzums ir neierobežots.)

6. Trīs veselu skaitļu summa ir 0. Pierādīt, ka to kubu summa dalās ar 3.

7. Trijstūris ABC ir regulārs. Uz tā malas AC ņemti punkti M un N tā, ka AM = MN = NC un M atrodas starp A un N; uz malas BC ņemts punkts K tā, ka BK = AM. Aprēķināt leņķu BMK un BNK lielumu summu.

8. Rindā uzrakstīti 7 naturāli skaitļi. Pierādiet: nemainot skaitļu kārtību, bet pievienojot tiem iekavas, reizināšanas zīmes un saskaitīšanas zīmes, var panākt, ka iegūtās izteiksmes vērtība dalās ar 10.

9. Pierādiet: no jebkuriem 51 divciparu naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus, kuru summa vienāda ar 100. Vai to noteikti var izdarīt, ja skaitļu ir 50?

10. Dzintars iedomājies piecus naturālus skaitļus; apzīmēsim tos ar A, B, C, D ,E. Ar vienu gājienu Andris var nosaukt Dzintaram piecus naturālus skaitļus a, b, c, d, e un uzzināt no Dzintara summas aA + bB + cC + dD + eE vērtību.
Ar kādu mazāko gājienu skaitu Andris noteikti var noskaidrot Dzintara iedomātos skaitļus?

3. nodarbība

1. Ierakstīt tukšajās rūtiņās pa vienam skaitlim tā, lai visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas (skat. 1. zīm.)

16			
11	13		
	8	9	15
		14	12

1. zīm.

2. Dots, ka $a^7b^5 + a^5b^7 = a^9b^3 + a^3b^9$ un $a = 2007$. Aprēķināt b.

3. Cik apgriezienu diennaktī veic tā leņķa bisektrise, ko veido pulksteņa stundu un minūšu rādītāji?

4. Punkts M atrodas taisnstūra ABCD iekšpusē. Pierādīt: eksistē trijstūris, kura malas vienādas ar trim no nogriežņiem AM, BM, CM, DM.

5. Vai var izvēlēties 33 viens otram sekojošus naturālus skaitļus tā, lai tie kopā saturētu tieši 2006 ciparus?

6. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kas dalās ar 1024 un kura decimālais pieraksts nemainās, izlasot to no otra gala (kā, piemēram, skaitļiem 111; 12321; 620026 utt.)?

7. Kvadrāts sastāv no a) 9x9, b) 10x10 rūtiņām. Kāds mazākais rūtiņu daudzums jānokrāso melnas, lai katrā 4×4 rūtiņas lielā „apakškvadrātā” vismaz puse rūtiņu būtu melnas?

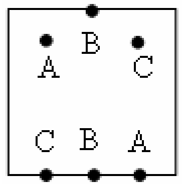
8. Sanāksmē piedalījās 8 valstu prezidenti. Viņi fotografējās grupās pa 2 un pa 3. Katri divi prezidenti kopā redzami tieši vienā fotogrāfijā. Kāds ir mazākais iespējamais fotogrāfiju skaits?

9. Andrim ir 8 pēc ārējā izskata vienādas figūriņas, kuru masas ir 1 kg, 2 kg, . . ., 8 kg. Viņš novietoja septiņas no tām rindā masu pieaugšanas secībā (no kreisās uz labo pusi). Maijas rīcībā ir sviras svari bez atsvariem. Kā Maija var noskaidrot, kura figūriņa neatrodas rindā, izdarot divas svēršanas?

10. Vai, sareizinot vairākus divniekus, pieciniekus un septītniekus, var iegūt skaitli, kura ciparu summa ir 2007?

4. nodarbība

1. Vai ar vienādiem burtiem apzīmētos punktus var savienot ar līnijām, kam nav kopīgu punktu un kas atrodas kvadrāta iekšpusē (skat. 1. zīm.)?



1.zīm.

2. Vai taisnība, ka 2 litru „Coca-cola” pudele formas ziņā ir tieši tāda pati kā 0.5 litru „Coca-Cola” pudele, tikai lielāka? (Ģeometrijas valodā runājot: vai šīs pudeles ir līdzīgas?).

3. Vai eksistē piecstūris, kam katra diagonāle vienāda ar kādu no malām?

4. Kvadrātiska režģa formā izvietoti 25 punkti. Vai var novilkt 5 riņķa līnijas tā, lai katrs punkts atrastos uz vismaz vienas no tām?

5. Apskatām naturālos skaitļus no 1 līdz 2007 ieskaitot. Kādu lielāko daudzumu šo skaitļu var izvēlēties, lai vienādība a+b=c nebūtu spēkā nekādiem izvēlētiem skaitļiem a, b, c?

6. Vai eksistē tādi 5 dažādi naturāli skaitļi, ka katru triju skaitļu reizinājums dalās ar šo triju skaitļu summu?

7. Uz galda atrodas 35 konfektes. Andris un Bruno pamīšus ņem no 1 līdz 5 konfektēm; pirmais konfektes ņem Andris. Ar savu kārtējo gājienu neviens no zēniem nedrīkst ņemt tikpat daudz konfekšu, cik iepriekšējā gājienā paņēmis pretinieks. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot?

8. Atrisināt kvadrātvienādojumu: $118x^2 - 2125x + 2007 = 0$.

9. Rindā uzrakstīti vairāki naturāli skaitļi (starp tiem var būt arī vienādi) tā, ka neviens skaitlis nav lielāks par iepriekšējo. Pirmais skaitlis ir 4 reizes mazāks par visu pārējo skaitļu summu. Trešais skaitlis ir 9 reizes mazāks par visu pārējo skaitļu summu. Pēdējais skaitlis ir 10 reizes mazāks par visu pārējo skaitļu summu. Cik skaitļu uzrakstīts?

10. Vai var salikt kubu no 5 vienādiem sērkociņiem, kurus nedrīkst lauzt?

5. nodarbība

1. Kādu mazāko daudzumu zirdziņu var novietot uz šaha galdiņa tā, lai visas brīvās rūtiņas būtu apdraudētas?

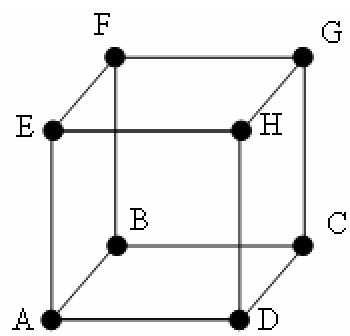
2. Klasē ir 14 zēni. Viņi izveidojuši dažādas slepenas biedrības. Katrā biedrībā ir vismaz 3 zēni; neviens zēns nav vairāk kā 2 biedrībās; nekādas divas biedrības nesastāv no vieniem un tiem pašiem zēniem. Kāds ir lielākais iespējamais biedrību skaits?

3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{68}{21}$.

4. Dots, ka $2 \le a \le 3 \le b \le 4 \le c \le 5 \le d \le 6$. Atrast lielāko iespējamo izteiksmes ab-bc+cd-da vērtību.

5. Kāda četrstūra diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras. Pierādiet, ka eksistē četrstūris ar tādiem pašiem malu garumiem, kam divi leņķi ir 90^o lieli.

6. Kuba virsotnēs atrodas pa vienai skudrai (skat. 1.zīm.). Skudras var pārvietoties tikai pa šķautnēm un mainīt kustības virzienu tikai virsotnēs; nevienā punktā vienlaicīgi nedrīkst būt 2 vai vairāk skudras. Vai var gadīties, ka skudras A un E, B un F, C un G, D un H vienlaicīgi apmainījušās vietām?



1.zīm.

7. Katrā šaha galdiņa rūtiņā ierakstīts pa skaitlim. Ir zināms: jebkurā 2x2 rūtiņu kvadrātā, saskaitot tos skaitļus, kas ierakstīti diagonāli pretējās rūtiņās, iegūst vienādas summas (dažādiem 2x2 rūtiņu kvadrātiem šīs summas var būt dažādas). Pierādiet, ka tāda pati īpašība ir spēkā katrā no rūtiņām sastāvošā taisnstūrī.

8. Kvadrāts sastāv no 10x10 rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 100 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai nekādās divās rūtiņās ar kopēju malu vai kopēju stūri ierakstīto skaitļu summa nedalītos ar 4?

9. Atrast naturāla skaitļa n ciparu summu, ja zināms, ka skaitļa 5n pieraksts sastāv no 10 pieciniekiem un 10 sešiniekiem.

10. Andris un Maija piedalās televīzijas uzvedumā. Organizatori sagatavojuši 2 bezmaksas ceļazīmes uz Parīzi un 2 – uz Romu. Katram no abiem dalībniekiem slepenībā no otra pasaka, kāda ceļazīme paredzēta otram; pēc tam katram jāmin, kāda ceļazīme paredzēta viņam pašam, taču neviens no dalībniekiem nedzird otra minējumu.

Vai Andris un Maija var iepriekš vienoties par tādu minēšanas stratēģiju, lai vismaz viens no viņiem uzminētu savu ceļazīmi?

6.nodarbība

1. Naturālam skaitlim n ir 2010 cipari. Pirmie 2007 cipari ir vieninieki, bet trīs pēdējie cipari – trijnieki.
   a) pierādiet, ka šis skaitlis dalās ar 9;
   b) cik reizes cipars 4 parādās dalījumā, ko iegūst, n dalot ar 9?
2. Vai skaitlis $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$ ir vesels?
3. Jebkuru naturālu skaitli n ar vienu gājienu atļauts vai nu reizināt ar 2, vai arī nosvītrot tam pēdējo ciparu. No kuriem skaitļiem n ar šādiem gājieniem, vajadzības gadījumā lietojot tos vairākkārt, var iegūt skaitli 27?
4. Plaknē novilktas 8 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu.
   Pierādiet: taišņu krustpunktiem var tā pierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 7 (katram krustpunktam vienu skaitli), ka uz katras no 8 taisnēm visi skaitļi būs dažādi.
5. Vai uz kuba virsmas var uzlīmēt vienu paralelogramu tā, lai tas pārklātu tieši pusi no katras skaldnes laukuma? Paralelogramā nedrīkst izdarīt iegriezumus, un tas nedrīkst uzklāties virsū pats sev.
6. Trapeces pamatu garumi centimetros izsakās ar veseliem skaitļiem. Pierādīt: šo trapeci var sagriezt vienādos trijstūros.
7. Dots, ka a, b, c – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka ir pareiza vismaz viena no nevienādībām $a(2-b)\leq 1,\ b(2-c)\leq 1,\ c(2-a)\leq 1$.
8. Dots, ka x, y, z – naturāli skaitļi un 28x+30y+31z=365. Pierādīt, ka x+y+z=12.
9. Matemātikas olimpiādē bija jārisina vairāki uzdevumi. Uzdevumu sauc par grūtu, ja to atrisināja mazāk nekā puse olimpiādes dalībnieku, un par vieglu pretējā gadījumā. Olimpiādes dalībnieku sauc par veiksmīgu, ja viņš atrisinājis vairāk nekā pusi visu uzdevumu, un par neveiksmīgu pretējā gadījumā.
   Vai var vienlaicīgi būt tā, ka kāds veiksmīgs olimpiādes dalībnieks nav atrisinājis nevienu vieglo uzdevumu, bet kāds neveiksmīgs olimpiādes dalībnieks atrisinājis visus grūtos uzdevumus?
10. Profesors Cipariņš sasaldējās. Ārsts viņam iedeva divas tabletes zāļu pret klepu un divas tabletes zāļu pret iesnām, pieteikdams, ka gan no rīta, gan vakarā jāiedzer pa vienai tabletei katru zāļu. Visas 4 tabletes ir vienāda izskata baltas apaļas ripiņas. Diemžēl Cipariņš sabēra visas 4 tabletes vienā trauciņā un vairs nespēj tās atšķirt vienu no otras.
    Kā Cipariņam izpildīt ārsta ieteikumus?