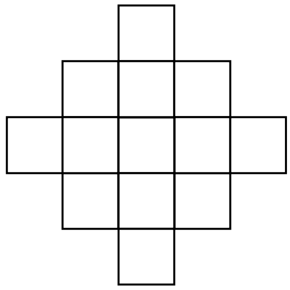
"Profesora Cipariņa kluba" 2007./08.m.g.

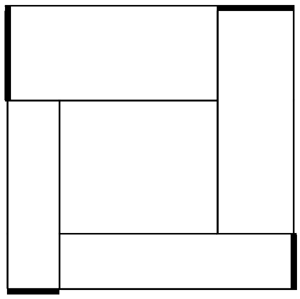
1.nodarbības uzdevumi

1. Ierakstīt visās 1.zīm. parādītās figūras rūtiņās pa vienam veselam skaitlim tā, lai katrā no 3 rūtiņām sastāvošā taisnstūrī ierakstīto skaitļu summa būtu 1. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



1.zīm.

2. Kvadrāts, kura malas garums ir 5m, sadalīts 5 taisnstūros, kā parādīts 2.zīm. Tumšāk iezīmēto nogriežņu garumu summa ir 6 m. Aprēķināt vidējā taisnstūra apkārtmēru (perimetru).



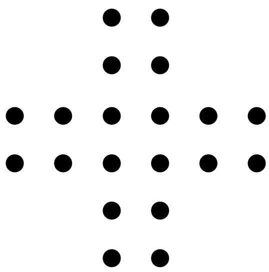
2.zīm.

3. Cik daļās riņķa līnija un kvadrāta kontūrs var sadalīt plakni?

4. Pa apli novietoti 8 grozi. Tajos kopā ir a) 2008 āboli; b) 2007 āboli. Vai var gadīties, ka katros divos blakus esošos grozos ābolu skaits atšķiras tieši par 1?

5. Divos naturālos skaitļos ciparus aizstāja ar burtiem (vienādus – ar vienādiem, dažādus – ar dažādiem). Ir zināms, ka skaitlis VAUVAURRR dalās ar 56, bet skaitlis KRAA dalās ar 24. Parādīt vienu piemēru, kad šie nosacījumi izpildās. Vai tie var izpildīties, ja neviens cipars nav 0?

6. Kvadrātisku rūtiņu režģī atzīmētas 20 rūtiņu virsotnes (skat. 3.zīm.). Nodzēsiet iespējami maz atzīmēto virsotņu tā, lai nekādas četras atlikušās nebūtu viena kvadrāta virsotnes.



3.zīm.

7. Gar aleju, kas ved no viņu mājiņas uz Sniegbaltītes pili, rūķīši grib iestādīt vismaz 500 kokus. Turklāt viņi vēlas, lai no katriem 3 pēc kārtas iestādītiem kokiem vismaz 1 būtu bērzs, no katriem 4 vismaz 1 – kļava, no katriem 5 vismaz

1 –ozols, no katriem 6 vismaz 1 – liepa un no katriem 7 vismaz 1 – egle. Vai to var izdarīt?

8. Sešiem draugiem katram bija pa 6 āboliem. Katrs no viņiem uzdāvināja dažus ābolus citiem (dāvanā saņemtos ābolus tālāk nedāvina). Rezultātā viņiem visiem bija atšķirīgi ābolu daudzumi. Vai var gadīties, ka katrs no draugiem uzdāvināja citiem mazāk ābolu, nekā viņam pašam bija beigās?

9. Klasē mācās 25 skolēni. Pierādīt: vismaz 2 no viņiem dzimšanas dienu datumi atšķiras ne vairāk kā par 2 nedēlām.

10. Triju brāļu mājas visas atrodas 1 km attālumā cita no citas. Kur uzcelt māju viņu māsai, lai attālumu summa no māsas mājas līdz visu brāļu mājām būtu vismazākā iespējamā?

2. nodarbība

1. Jānītis sareizināja piecus pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Vai reizinājuma ciparu summa var būt 2?

2. Viena klade un divi zīmuļi kopā maksā vairāk par trim burtnīcām, bet trīs klades un divi zīmuļi – vairāk par četrām burtnīcām. Pierādīt, ka piecas klades un seši zīmuļi kopā maksā vairāk par desmit burtnīcām.

3. Dotas sešas pēc ārējā izskata vienādas lodītes. Uz tām uzrakstīts attiecīgi 1g; 2g; 3g; 4g; 5g; 6g (katrs uzraksts – uz citas lodītes). Pieci uzraksti atbilst patiesībai, bet viena lodīte ir smagāka, nekā uz tās rakstīts. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar divām svēršanām var noskaidrot, kura ir „īpašā” lodīte?

4. Dots, ka trijstūrī *ABC* visi leņķi vienādi savā starpā. Zināms, ka punkts *M* apmierina sakarības $\angle MBC = 75^0$ un $\angle MAC = 45^0$. Pierādīt, ka nogrieznis *MC* perpendikulārs nogrieznim *AC*.

5. Dots, ka *a*, *b*, *c*, *d* – naturāli skaitļi un katrs no skaitļiem $abc - d$, $abd - c$, $acd - b$ un $bcd - a$ dalās ar 4. Pierādīt, ka arī skaitlis $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ dalās ar 4.

6. Vai trijstūri var sagriezt a) trijos, b) četros, c) 2007 ieliektos piecstūros?

7. Dots, ka $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2 = 1$ un $ad + be + cf = 0$. Pierādīt, ka $(a + b + c)^2 + (d + e + f)^2 \le 3$.

8. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām: dažas no tām nokrāsotas baltas, citas – sarkanas. Zināms, ka tieši 3 stūra rūtiņas ir sarkanas. Pierādīt: var atrast tādu 2×2 rūtiņu kvadrātu, kurā ir nepāra skaits sarkanu rūtiņu.

9. Cik ir dažādu 12ciparu virkņu, kas vienlaicīgi apmierina sekojošus nosacījumus:

a) katrā virknē ir tieši 6 nulles un 6 vieninieki,
b) nevienā virknes sākuma fragmentā nuļļu daudzums nav lielāks par vieninieku daudzumu?

Piezīme. Par virknes sākuma fragmentu sauc vienu vai vairākus (vienalga, cik) tās pirmos locekļus. Piemēram, burtu virknes *abcd* sākuma fragmenti ir *a*; *ab*; *abc*; *abcd*.

10. Atrast mazāko *n* ar īpašību: lai kā arī izvēlētos *n* skaitļus no kopas $\{1; 2; 3; \ldots; 16\}$, starp izvēlētajiem būs divi tādi, kuru kvadrātu summa ir pirmskaitlis.

3. nodarbība

1. Divu naturālu skaitļu summa ir 2101. Ja vienā no šiem skaitļiem izsvītro vienu ciparu, iegūst otru skaitli. Kas tie ir par skaitļiem?

2. Tabulas rūtiņās ierakstīti skaitļi, kā parādīts 1. zīmējumā. Andris izvēlējās sev četras rūtiņas, bet Maija sev – citas četras rūtiņas. Izrādījās, ka Andra izvēlētajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 3 reizes lielāka nekā Maijas izvēlētajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa. Kura rūtiņa palika neizvēlēta?

8	14	25
16	20	5
4	7	11

1. zīm.

3. Vai var pa apli izrakstīt 8 dažādus naturālus skaitļus tā, lai neviens no tiem nepārsniegtu 20 un lai katri divi blakus uzrakstīti skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 5, vai par 7?

4. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise *AN*; dots, ka $AN = AC$. Uz šīs bisektrises atlikts punkts *M* tā, ka $CM = NB$. Pierādīt, ka leņķi *CMN* un *ABC* vienādi savā starpā.

5. Uz katras no 50 kartītēm uzrakstīti divi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100; visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi. Katrai kartītei aprēķināja uz tās uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Pierādīt: visu aprēķināto reizinājumu apgriezto lielumu summa ir mazāka par 1.

6. Rindā stāv 2007 šillišallas. Katrs šillišalla apgalvo: „vairāk nekā trešdaļa no tiem, kas stāv no manis pa kreisi, ir meļi.” Cik rindā ir meļu? (Uzskatām: meļi melo **vienmēr**, bet tie, kas nav meļi, nemelo **nekad**.)

7. Rindā izrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 40, katrs tieši vienu reizi. Katrīna izvēlējās 10 pāra skaitļus, bet Matīss – 10 nepāra skaitļus. Izrādījās, ka abu bērnu izvēlēto skaitļu summas ir vienādas. Vai noteikti var atrast vienu Katrīnas izvēlēto skaitli un vienu Matīsa izvēlēto skaitli tā, lai abu šo skaitļu summa būtu 41?

8. Dambretes turnīrā bija 7 dalībnieki. Katrs spēlēja ar katru citu tieši vienu reizi. Turnīra beigās izrādījās: nav tādu triju dalībnieku, kas visi savā starpā nospēlējuši neizšķirti. Kāds ir lielākais iespējamais neizšķirtu skaits turnīrā?

9. Šaha zirdziņš, sākot no kaut kāda lauciņa, secīgi izdarīja 31 gājienu; nevienā lauciņā viņš neatradās vairāk kā vienu reizi. Pēc tam visus 32 lauciņus, kuros zirdziņš pabija (ieskaitot sākotnējo), izgrieza. Pierādīt: ir palikuši tādi divi neizgriezti lauciņi *A* un *B*, ka zirdziņš var ar vienu gājienu nonākt no *A* uz *B*.

10. Trijstūris sagriezts vairākos izliektos daudzstūros; neviens no tiem nav trijstūris. Pierādīt: no šiem daudzstūriem var atrast divus ar vienādu malu skaitu.

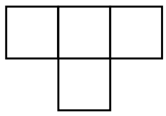
4. nodarbība

1. Viens smilšu pulkstenis „iztek” 6 minūtēs, otrs – 8 minūtēs. Kā ar šo pulksteņu palīdzību Sniegbaltīte var izcept kūku, ja zināms, ka tai jācepas tieši 10 minūtes?

2. Vai kvadrātu var sagriezt 2008 kvadrātos tā, lai nekādi 5 no griežot iegūtajiem nebūtu savā starpā vienādi?

3. Uz galda atrodas divas konfekšu kaudzītes. Andris un Maija pamīšus ēd pa patvaļīgam daudzumam konfekšu no vienas kaudzītes (katrā gājienā katrs bērns izvēlas, no kuras kaudzītes un cik konfekšu viņš ēdīs). Sāk Andris. Tas, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš uzvar, pareizi spēlējot?

4. Vai kvadrātu, kas sastāv no a) 9×9, b) 8×8, c) 10×10 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, var sagriezt tādās figūrās, kāda parādīta 1.zīm.? Figūras var būt pagrieztas arī citādi.



1.zīm.

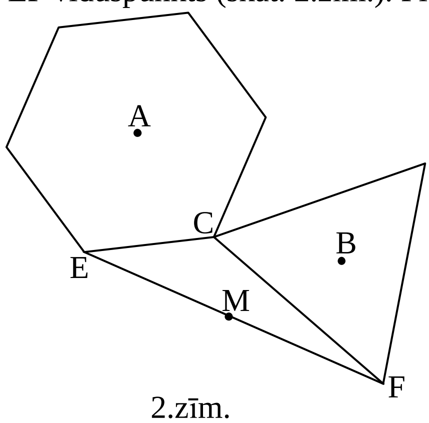
5. Gunārs sareizināja visus naturālos skaitļus no 1 līdz 25 ieskaitot un rezultātā izsvītroja visas nulles. Kāds ir iegūtā skaitļa pēdējais cipars – pāra vai nepāra?

6. Dots, ka $a+b+c=0$ un $ab+ac+bc=0$. Pierādīt, ka $a^3+b^3+c^3=0$.

7. Kāds lielākais skaits sakņu var būt vienādojumam $\left|x^2+ax+b\right|+\left|x^2+cx+d\right|=\left|x^2+ex+f\right|$? (Šeit x – mainīgais, bet a, b, c, d, e, f – kaut kādi fiksēti skaitļi.)

8. Naturālu skaitļu virknē katrs loceklis, sākot ar trešo, vienāds ar kaut kādu divu iepriekšējo locekļu summu. Pierādīt, ka virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu, kas nav pirmskaitļi.

9. Regulāram sešstūrim ar centru A un regulāram trijstūrim ar centru B ir kopīga virsotne C; punkts M ir EF viduspunkts (skat. 2.zīm.). Pierādīt, ka $\angle AMB=90°$.



2.zīm.

10. Katrīnai jāatrod divdesmit skaitļu „11” reizinājums (citiem vārdiem, jāaprēķina 11^{20}). Viņa nedrīkst izmantot kalkulatoru, datoru, reizināšanas tabulas u.tml. Viņas rīcībā ir rūtiņu lapa ar izmēriem 30×40 rūtiņas; katrā rūtiņā drīkst ierakstīt augstākais vienu ciparu. Vai viņa var izpildīt uzdevumu? (Piem., 3.zīm. parādīts, kā 4×5 rūtiņas lielā taisnstūrī var sareizināt 23 un 67).

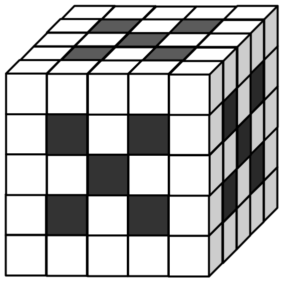
		2	3
		6	7
	1	6	1
1	3	8	
1	5	4	1

3.zīm.

5. nodarbība

1. Andrim ir taisnstūrveida papīra lapa, kas sadalīta 36 paralēlās joslās; joslas pamīšus izkrāsotas melnas un baltas. Ar vienu gājienu Andris var pārkrāsot vienu joslu citā krāsā. Ja tā rezultātā vairākas pēc kārtas sekojošas sākotnējās joslas tagad ir vienā krāsā, tad turpmāk tās uzskata par vienu joslu.
Ar kādu mazāko gājienu skaitu Andris var panākt, lai visa lapa būtu balta?

2. Kubs sastāv no $5\times5\times5$ vienādiem mazākiem kubiņiem. Daži kubiņi ir melni; melnie kubiņi izvietoti taisnās rindās, kas paralēlas lielā kuba šķautnēm, pa 5 kubiņiem katrā rindā (skat. 1. zīm.) Cik ir melno kubiņu?



1.zīm.

3. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 25 (katrā rūtiņā – cits skaitlis).
Vai var gadīties, ka katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir

a) pāra skaitlis,
b) nepāra skaitlis?

4. Spēle notiek kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas. Andris un Maija pamīšus raksta rūtiņās sava vārda pirmos burtus (Andris – A, Maija – M). Katrā rūtiņā drīkst atrasties augstākais viens burts. Ja divām rūtiņām ir kaut viena kopīga virsotne, tajās nedrīkst atrasties dažādi burti. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Spēli sāk Andris. Kurš uzvar, pareizi spēlējot?

5. Daži no skaitļiem no 1 līdz 105 izrakstīti vienā rindā cits aiz cita bez atstarpēm, citi – otrā rindā. Iegūti divi „gari” naturāli skaitļi. Vai var gadīties, ka tie ir vienādi?

6. Pierādiet, ka vienādmalu trijstūri var sagriezt n vienādsānu trijstūros, ja $n \geq 4$, n – naturāls. (**Piezīme**: arī vienādmalu trijstūri uzskatām par vienādsānu.)

7. Vai pastāv piecciparu naturāls skaitlis, kam nav citu ciparu kā 1; 4; 7 un kas dalās ar

a) 8,
b) 9?

8. Jaungada dienā katrs no 7 rūķīšiem uzdāvināja Sniegbaltītei dažus dārgakmeņus: viens – dimantus, otrs – rubīnus, trešais – smaragdus, ceturtais – topāzus, piektais – safīrus, sestais – ametistus, septītais – hrizolītus. Visi uzdāvinātie dārgakmeņu daudzumi bija dažādi. Turpmāk katru dienu katrs rūķītis dāvināja Sniegbaltītei 1, 2 vai 3 tā paša veida dārgakmeņus, ko Jaungada dienā. Kādā laika posmā katru dienu Sniegbaltītei visi dārgakmeņi bija dažādā skaitā, pie tam šai posmā bija gan tāda diena, kad viņai visvairāk bija dimantu, gan tāda, kad – rubīnu, ..., gan tāda, kad – hrizolītu. Kāds ir mazākais iespējamais šī laika posma dienu skaits?

9. Sadalīt reizinātājos izteiksmi $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

10. Apskatām kvadrātfunkciju $f(x) = x^2 + px + q$. Dots, ka $a+b=c+d$ un $f(a) = f(b)$. Pierādīt, ka $f(c) = f(d)$.

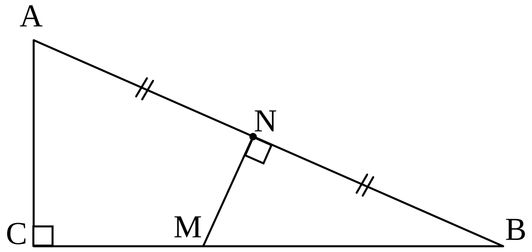
6. nodarbība

1. Atrodiet kaut vienu naturālu skaitli ar īpašību: pārliekot tā ciparus citā kārtībā un saskaitot iegūto skaitli ar sākotnējo, iegūst 20052008.

2. Visi naturālie skaitļi pēc kārtas tiek izrakstīti „pa spirāli” rūtiņu lapā tā, kā parādīts 1.zīm.:

	17	16	15	14	13	
	18	5	4	3	12	
	19	6	1	2	11	
	20	7	8	9	10	
	21	22	23	24	25	**...**

1.zīm.



2.zīm.

Cik rūtiņas horizontālā un cik – vertikālā virzienā no skaitļa 1 būs „nobīdīts” skaitlis 2008?

3. Dots, ka $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = 30°$, N ir AB viduspunkts, $NM \perp AB$. Pierādīt, ka $NM = \frac{1}{3}BC$ (skat. 2.zīm.).

4. Dots, ka x, y un z ir naturāli skaitļi un gan $xy + 2y + 4$, gan $yz + 2z + 4$ dalās ar 7. Pierādīt, ka arī $zx + 2x + 4$ dalās ar 7.

5. Vai kvadrātu ar izmēriem 5×5 var pilnīgi pārklāt, izmantojot trīs kvadrātus, katru ar izmēriem 4×4? Vai to var izdarīt, ja visu četru kvadrātu malām jābūt savstarpēji paralēlām / perpendikulārām?

6. Atrodiet kaut vienu tādu racionālu skaitli r, ka gan r, gan $r + 5$, gan $r + 10$ ir racionālu skaitļu kvadrāti.

7. Vai pozitīviem skaitļiem x, y, z, t var vienlaicīgi izpildīties sakarības $(x + y) < 2(z + t)$ un $(x^2 + y^2) > 9(z^2 + t^2)$?

8. Regulāra desmitstūra virsotnēs ierakstīti divciparu naturāli skaitļi (pa vienam katrā virsotnē). Pierādīt: var novilkt tādu taisni, ka tās abās pusēs esošo skaitļu summas atšķiras viena no otras ne vairāk kā par 90.

9. Katram skolēnam kādā klasē ir tieši 5 draugi – klasesbiedri (draudzības ir abpusējas). Ja apskata jebkurus divus draugus, tad vienam no viņiem ir tieši 2 reizes vairāk kompaktdisku nekā otram. Vai visiem skolēniem kopā var būt tieši 2008 kompaktdiski?

10. Sniegbaltīte uzdāvināja katram no 7 rūķīšiem pa 5 konfektēm: „Vāverīti”, „Margrietiņu” un „Lācīti”. Pierādīt: ir divi tādi rūķīši, kam viņa uzdāvināja vienādus konfekšu komplektus.