2008./2009. mācību gads

1.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Kartīti pirmajam ciparam var izvēlēties 9 veidos. Pēc tam, kad tas izdarīts, kartīti otrajam ciparam var izvēlēties 8 veidos (jāizvēlas citu kartīti nekā to, kas jau izmantota pirmajam ciparam). Tādā ceļā varam iegūt $9 \cdot 8 = 72$ skaitļus (visus divciparu skaitļus, kam cipari ir atšķirīgi no nulles un dažādi). Vēl var izveidot arī skaitļus 66 un 99, jo gan kartīti $\boxed{6}$, gan kartīti $\boxed{9}$ var novietot katru divās dažādās pozīcijās.

Tāpēc Andris var salikt $72 + 2 = 74$ skaitļus.

2. Nē, nevar. Ja tā gadītos, tad skolēnu skaits skolā nepārsniegtu $36 \cdot 29 = 1044 < 1045$ - pretruna ar doto.

3. Atbilde: a) nē, b) nē, c) jā.

Risinājums: a) ar katru gājienu tabulā ierakstīto skaitļu summa aug par 4. Sākumā tā ir 10, tātad visu laiku paliek pāra skaitlis. Ja vienlaicīgi visās rūtiņās būtu nepāra skaitļi, tad šī summa (deviņu nepāra skaitļu summa) būtu nepāra skaitlis – pretruna.

b) ar katru gājienu tieši viens no skaitļiem a, b, c, d palielinās par 1; ar katru gājienu par 1 palielinās arī skaitlis x (skat. 1. zīm.). Tāpēc gājienu izpildes rezultātā lielums $a + b + c + d - x$ nemainās. Sākumā tas ir $1+1+2+1-1=4$; beigās tam jābūt $8+9+11+10-36=2$. Tā kā $2 \neq 4$, minētā situācija nav iespējama.

a		b
	x	
d		c

1. zīm.

c) jāizdara 4 gājieni, kas „skar” skaitli a; 5 gājieni, kas „skar” skaitli b; 6 gājieni, kas „skar” skaitli c; 6 gājieni, kas „skar” skaitli d. Pārliecinieties patstāvīgi, ka vajadzīgais tiek iegūts.

4. Ērtības labad sauksim 1 vai 2 atšķirīgas konfektes (ja tādas ir) par viltotām, bet citas – par īstām. Līdz ar profesoru mēs varam rīkoties, piemēram, šādi.

Sadalīsim visas konfektes 4 daļās pa 502 konfektēm katrā. Apzīmēsim šīs daļas ar burtiem *A*, *B*, *C*, *D*.

Pirmajā svēršanā nosvērsim *A* un *B*. Vispirms pieņemsim, ka

$A = B$. Tas nozīmē, ka vai nu šajās daļās viltoto konfekšu nav vispār, vai arī katrā no tām atrodas pa vienai viltotai konfektei. Tāpēc otrajā svēršanā salīdzināsim *B* ar *C*.

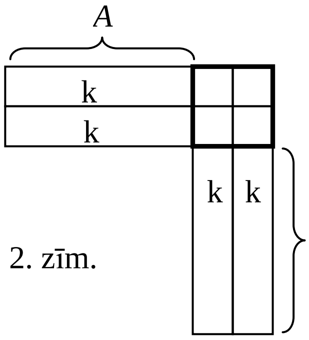
Ja $B = C$, tad kļūst skaidrs, ka grupās *A*, *B* un *C* viltoto konfekšu nav, un ar trešo svēršanu salīdzinām *C* ar *D*. Ja arī šoreiz svari nostājas līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka viltoto konfekšu vispār nav. Ja svari nosveras, tad skaidrs, ka viltotās konfektes (vai konfekte) atrodas grupā *D* un tās (tā) ir smagākas (-a), ja kauss, uz kura atradās grupa *D*, nosvērās uz leju; pretējā gadījumā viltotās (-ā) konfektes (-e) ir vieglākas (-a) par pārējām.

Ja $B \neq C$, tad tas nozīmē, ka grupās *A* un *B* ir vai nu pa vienai viltotai konfektei katrā, vai arī grupā *C* ir vismaz viena viltota konfekte. Lai to noskaidrotu, sadalīsim grupu *A* uz pusēm un ar trešo svēršanu salīdzināsim abas šīs grupas *A* daļas savā starpā. Ja svari paliks līdzsvarā, tad tas nozīmēs, ka viltotā konfekte (vai arī viltotās konfektes) atrodas kopā *C*. Šīs konfektes tipu parāda tas, kādā virzienā otrajā svēršanas reizē pārvietojās kauss, uz kura tika uzliktas grupas *C* konfektes: ja tas nosvērās uz leju, tad viltotā konfekte ir smagāka par īsto konfekti, bet, ja otrās svēršanas laikā tas pacēlās uz augšu, tad viltotā konfekte ir vieglāka par īsto. Savukārt, ja trešās svēršanas rezultātā svari nesaglabā līdzsvara stāvokli, tad skaidrs, ka grupās *A* un *B* ir pa vienai viltotajai konfektei. Viltotās konfektes tipu šajā gadījumā noteiksim atkarībā no tā, kādā stāvoklī atradās svaru kauss ar grupas *B* konfektēm pēc otrās svēršanas: ja šis kauss nosvērās uz leju, tad viltotā konfekte ir smagāka par īsto, bet, ja pacēlās uz augšu, tad viltotā konfekte ir vieglāka par īsto konfekti.

Citi svēršanu rezultāti ir reducējami uz šiem diviem gadījumiem, tāpēc tos tuvāk neapskatīsim.

Ievērosim, ka mēs noskaidrojam vajadzīgo, pašas viltotās konfektes (ja tādas ir) neatrodot.

5. a) Acīmredzami katrā nākošajā „āķī”ir par 2 kvadrātiņiem vairāk nekā iepriekšējā (skat. 2. zīm):

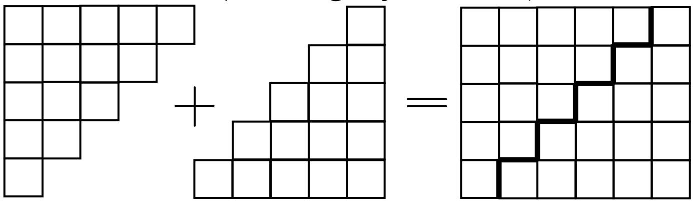


2. zīm.

rajonos A un B kvadrātiņu daudzumi abos „āķos” ir vienādi, bet izceltajā kvadrātā ārējā „āķī” ir par 2 kvadrātiņiem vairāk nekā iekšējā. Tāpēc „āķos” daudzumi ir secīgi nepāra skaitļi: $3;\ 3+2=5;\ 5+2=7$ utt.

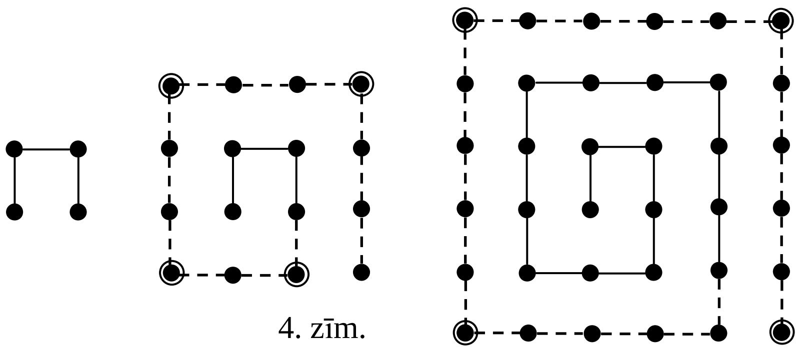
Kreisajā apakšējā stūrī esošais iesvītrotais kvadrātiņš un $(n-1)$ „āķi” kopā satur $1+3+5+7+...+(2\cdot n-1)$ kvadrātiņus. Tā kā tie kopā veido kvadrātu, kam gar katru malu ir n mazo kvadrātiņu malas, tad šo kvadrātiņu skaits ir $n\times n=n^2$, k.b.j.

b) viena no iespējām redzma 3. zīm. (attēlots gadījums $n=5$):


3. zīm.

6. Līnija skar katru punktu tieši vienu reizi (ieskaitot sākuma un beigu punktus). Pavisam ir 10 000 punktu. Līnjā ir 10 000 – 1 = 9999 vienu vienību gari posmi: no 1. punkta uz 2. punktu, no 2. punkta un 3. punktu, ..., no 9999. punkta uz 10 000. punktu. Tātad līnijas garums ir 9999.

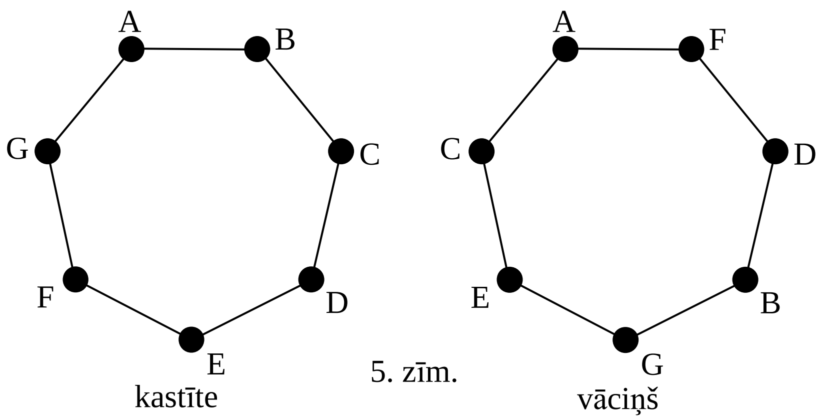
Apskatīsim pētāmā tipa lauztās līnijas kvadrātiem, kas satur 2×2, 4×4, 6×6 utt. punktus (skat. 4. zīm.)


4. zīm.

Kā redzma, katrā nākošajā kvadrātā līnijai ir par 4 stūriem vairāk nekā iepriekšējā (4. zīm. tie apvilkti).

Kvadrātu virknē $2\times2 \rightarrow 4\times4 \rightarrow 6\times6 \rightarrow 8\times8 \rightarrow ... \rightarrow 98\times98 \rightarrow 100\times100$ ir pavisam 49 pārejas no viena kvadrāta uz nākošo. Tā kā pirmajai lauztajai līnijai ir 2 stūri, tad pēdējai ir $2+49\cdot4=198$ stūri.

7. Skat., piem., 5. zīm. Krāsas apzīmētas ar burtiem.



5. zīm.

8. Tā kā $\overline{bca}$ dalās ar 9, tad ciparu summa $b+c+a$ dalās ar 9. Tāpēc skaitļa $\overline{cab}$ ciparu summa $c+a+b$ dalās ar 9; tātad skaitlis $\overline{cab}$ dalās ar 9. Skaitlis $\overline{cab}$ dalās gan ar 9, gan ar 11. Tā kā skaitļiem 9 un 11 vienīgais kopīgais naturālais dalītājs ir 1, tad secinām: $\overline{cab}$ dalās ar $9 \cdot 11 = 99$.
Apskatām visas iespējas:

$\overline{cab}$	$\overline{abc}$
$99 \cdot 2 = 198$	981
$99 \cdot 3 = 297$	972
$99 \cdot 4 = 396$	963
$99 \cdot 5 = 495$	954
$99 \cdot 6 = 594$	945
$99 \cdot 7 = 693$	936
$99 \cdot 8 = 792$	927
$99 \cdot 9 = 891$	918

Citu iespēju nav, jo $\overline{cab}$ ir trīsciparu skaitlis. Viegli pārbaudīt, ka no iespējamām $\overline{abc}$ vērtībām tikai 945 dalās ar 7. **Tātad *a* = 9; *b* = 4; *c* = 5.**

9. Apskatām visus pirmskaitļus, **ar kuriem** dalās kaut viens no skaitļiem n^2+1, $n=1;2;3;...$. Piemēram, šādi pirmskaitļi ir $1^2+1=\mathbf{2}$; $2^2+1=\mathbf{5}$; $4^2+1=\mathbf{17}$; tā kā $5^2+1=\mathbf{26}$, kas dalās ar 13, tad šāds pirmskaitlis ir arī **13**, utt. Pierādīsim, ka šādu pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz. Tad noteikti starp tiem ir arī tādi, kas lielāki par $1\,000\,000$.

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda, t.i., pieņemsim, ka šādu pirmskaitļu ir pavisam *k*. Apzīmēsim tos ar $p_1; p_2; ...; p_{k-1}; p_k$. Izveidosim to reizinājumu un apzīmēsim to ar *m*; tātad $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Skaidrs, ka *m* ir naturāls skaitlis. Apskatām skaitli m^2+1. Tā kā $m^2+1>1$, tad tas dalās ar kādu pirmskaitli.Saskaņā ar to, kā tika izvēlēti skaitļi $p_1; p_2; ...; p_k$, skaitlis m^2+1 dalās ar kādu no šiem skaitļiem. Tātad $(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k)^2+1$ dalās ar kādu no skaitļiem $p_1; p_2; ...; p_k$.

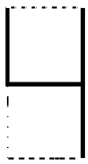
Bet tas nav iespējams: pirmais saskaitāmais dalās ar jebkuru no $p_1; ...; p_k$, bet otrais – vieninieks – nedalās ne ar vienu no tiem, tātad 1 paliek atlikumā. Iegūta pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un mūs interesējošo pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.

10. Tā kā jūsu vēstules ar pašu sastādītajiem uzdevumiem turpina pienākt, pārskatu par tiem dosim citreiz.

2008./2009. mācību gads

2.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Var nodzēst **a)** trīs augšējos nogriežņus, **b)** trīs apakšējos nogriežņus, **c)** trīs nogriežņus, atstājot ciparu „4" (skat. 1.zīm.). Skaitlis „4" ir „divi kvadrātā": $4 = 2\times 2$. Šādus skaitļus matemātikā sauc par kvadrātiem (dažreiz – par pilniem kvadrātiem).


1.zīm.

2. Atbilde: ar 6 griezieniem.

Risinājums.

A. Ar 6 griezieniem mērķi var sasniegt, piemēram, šādi. Vispirms ar 3 griezieniem sadalām kubu astoņos kubos, kuru izmēri ir $2\times 2\times 2$ katram (daļas pat nav jāpārkārto). Pēc tam saliekam šos kubus vienu virs otra tā, ka izveidojas „tornis" ar izmēriem $2\times 2\times 16$, un ar diviem griezieniem sagriežam to četros „torņos", kam izmēri ir $1\times 1\times 16$ un kas katrs sastāv no 8 atsevišķiem gabaliņiem, kuru izmēri ir $1\times 1\times 2$. Saliekam šos gabaliņus vienu otram blakus tā, ka tie veido „plāksnīti" ar izmēriem $2\times 1\times 32$, un ar sesto griezienu sasniedzam vajadzīgo.

Piezīme: iespējami arī citi paņēmieni.

B. Pierādīsim, ka ar 5 vai mazāk griezieniem nepietiek. No sākuma ir viens nesagriezts kubs. Katrs griezziens sadala katru iepriekš nesagrieztu daļu ne vairāk kā divās. Tāpēc pēc 1. griezziena nav vairāk par $1\times 2 = 2$ daļām, pēc 2. griezziena – par $2\times 2 = 4$ daļām, pēc 3. griezziena –par $4\times 2 = 8$ daļām, pēc 4.griezziena –par $8\times 2 = 16$ daļām; pēc 5.griezziena nav vairāk par $16\times 2 = 32$ daļām. Tā kā beigās jāiegūst 64 daļas, tad ar 5 vai mazāk griezieniem nepietiek.

3. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums: Atceramies: ar 3 dalās **visi tie** un **tikai tie** naturālie skaitļi, kam ciparu summa dalās ar 3. Tā kā A ciparu summa ir 7 un 7 nedalās ar 3, tad A nedalās ar 3. Tad arī skaitlis $7\cdot A$ nedalās ar 3. Bet, ja $7\cdot A$ ciparu summa būtu 24, tad tas dalītos ar 3, jo 24 dalās ar 3. Tāpēc $7\cdot A$ ciparu summa nevar būt 24.

4. Sadalām $\{1; 2; ...; 2008\}$ grupās G_0, G_1, ..., G_7 atkarībā no tā, kādu atlikumu dod skaitļi, dalot ar 8. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tad no dotajiem 756 skaitļiem ne vairāk kā viens ir grupā G_0 un ne vairāk kā viens ir grupā G_4. Tāpēc grupās G_1, G_2, G_3, G_5, G_6, G_7 kopā ir vismaz 754 dotie skaitļi. Tā kā $754 = 3\cdot 251 + 1$, tad vai nu G_1 un G_7, vai G_2 un G_6, vai G_3 un G_5 kopā satur vismaz 252 dotos skaitļus. Tā kā katrā grupā G_i ir tieši 251 skaitlis, tad attiecīgajā pārī abas grupas satur vismaz pa vienam dotajam skaitlim. Bet tad abu šo skaitļu summa dalās ar 8 – pretruna ar pieņēmumu.

5. Atbilde: 321.

Risinājums.

A. Ja $a = b = 10$ un $c = 11$, tad $a + b + c = 31$ un $a^2 + b^2 + c^2 = 10^2 + 10^2 + 11^2 = 100 + 100 + 121 = 321$.

B. Pierādīsim, ka mazāku summu par 321 iegūt nevar.

Neviens no apskatāmajiem trim naturālajiem skaitļiem nevar būt mazāks par 1 vai lielāks par 31. Tātad katram no tiem ir tikai galīgs skaits iespējamu vērtību. Tāpēc arī pašu apskatāmo skaitļu trijnieku ir tikai galīgs skaits. Tātad starp tiem noteikti **ir** viens (vai vairāki) tādi, kuram (vai kuriem) skaitļu kvadrātu summa ir vismazākā. Apzīmēsim vienu no šādiem trijniekiem ar $(x; y; z)$, pie tam varam uzskatīt, ka

$$x \le y \le z \qquad (1)$$

Pierādīsim, ka $x \le 10$. Tiešām, ja būtu $x > 10$, tad $x \ge 11$; bet tad $x + y + z \ge 11 + 11 + 11 = 33 > 31$ - pretruna ar uzdevumā doto.

Līdzīgi pierāda, ka $\mathbf{z \ge 11}$.

Pierādīsim, ka $z - x \le 1$. Tiešām, pieņemsim no pretējā, ka $z - x > 1$. Parādīsim, ka tādā gadījumā naturālu skaitļu trijniekam $(x+1;\ y;\ z-1)$ kvadrātu summa būtu mazāka nekā trijniekam $(x;\ y;\ z)$. Tiešām, mums jāpārbauda nevienādība

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 < x^2 + y^2 + z^2 \qquad (2)$$

Ekvivalenti pārveidojot, pakāpeniski iegūstam

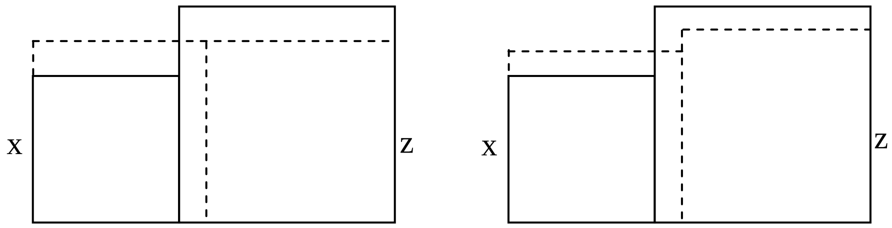
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 < x^2 + y^2 + z^2$$

$$2 < 2(z - x),$$

kas saskaņā ar mūsu pieņēmumu ir patiesība. Iznāk, ka skaitļu trijnieka $(x;\ y;\ z)$ kvadrātu summa **nav** mazākā iespējamā; tā ir pretruna ar to, kā šo trijnieku izvēlējāmies. Tātad mūsu pieņēmums par to, ka $z - x > 1$, ir nepareizs, un tiešām $z - x \le 1$.

No $x \le 10$, $z \ge 11$ un $z - x \le 1$ seko, ka $x = 10$ un $z = 11$. No šejienes $y = 31 - x - z = 10$. Tātad mazākā kvadrātu summa tiešām tiek iegūta, ja divi no apskatāmajiem skaitļiem ir 10, bet trešais no tiem ir 11.

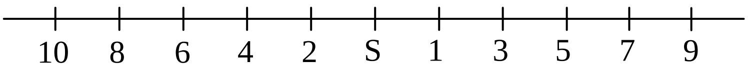
Piezīme. Nevienādību (2) var pierādīt arī citādi, piem., no 2.zīm. Izdomājiet patstāvīgi, kā to izdarīt.



2.zīm.

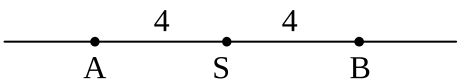
6. Atbilde: a) var, **b)** nevar.

Risinājums. a) skat.3.zīm, kur ar skaitļiem atzīmētas Cipariņa atrašanās vietas pēc 1., 2., ..., 10. soļa.



3.zīm.

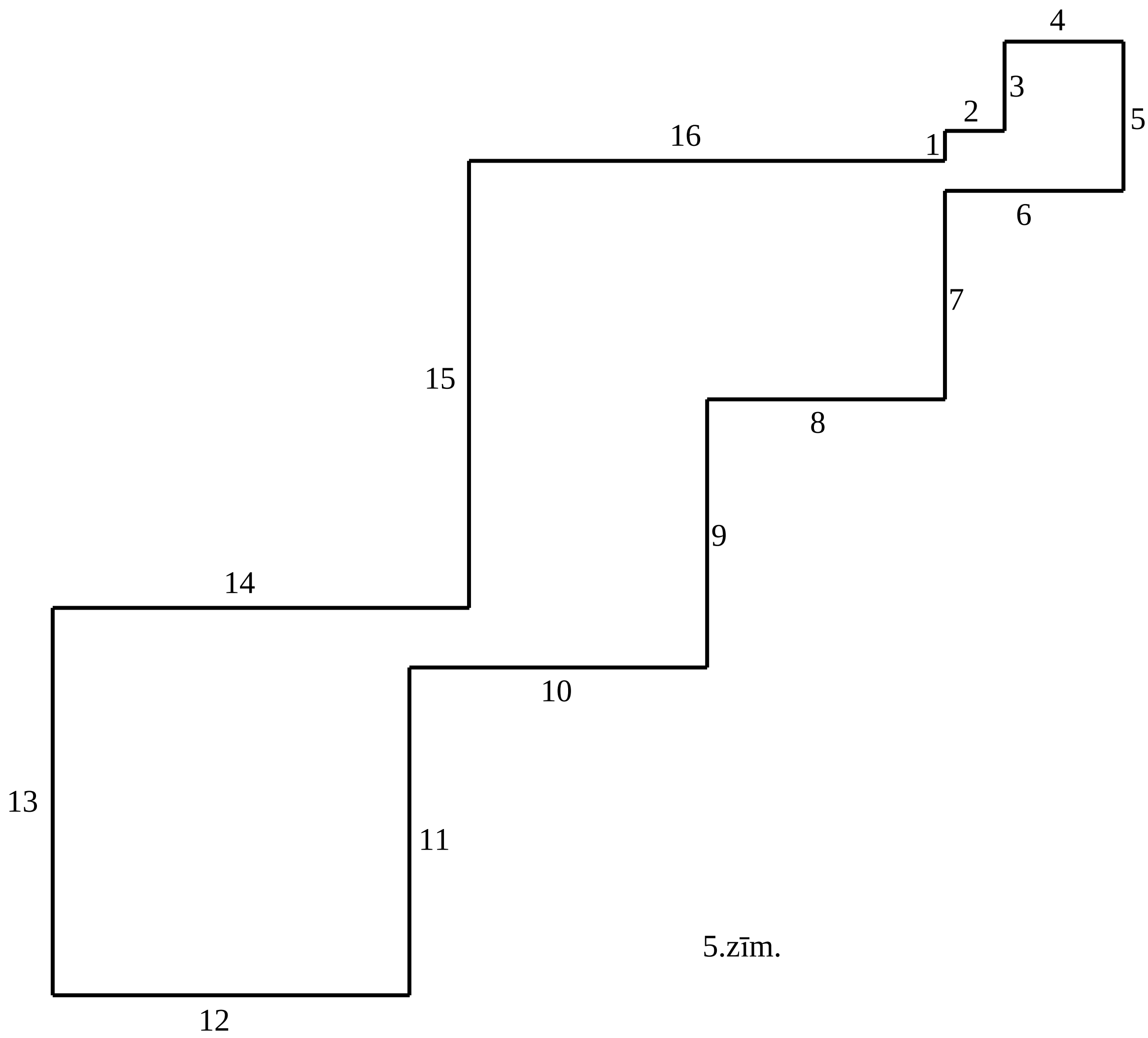
b) pieņemsim, ka Cipariņš to var izdarīt. Atzīmēsim ar A un B tādus skaitļus ass punktus, ka $AS = SB = 4$ (skat. 4.zīm.).



4.zīm.

Tad attālums starp A un B ir 8 un Cipariņš pēc 9.soļa atrodas kādā no nogriežņa AB punktiem. Cipariņa kārtējā soļa garums ir 10; tas ir lielāks par AB garumu, tāpēc ar 10.soli Cipariņš noteikti izies ārpus AB, tāpēc nonāks no S tālāk nekā attālumā 4.

7. Jā, var. Skat., piem., 5.zīm.



5.zīm.

8. Attēlosim spēlētājus ar krāsainiem punktiem: vienas klases spēlētājus – ar sarkaniem, otras klases – ar ziliem, trešās klases – ar dzelteniem. Izvēlēsimies šos punktus tā, lai nekādi trīs no tiem neatrastos uz vienas taisnes. (To var panākt, piemēram, izvēloties tos visus uz vienas riņķa līnijas.) Ja divi spēlētāji savā starpā spēlējuši, novilksim starp atbilstošajiem punktiem taisnes nogriezni.

Tā kā katrs spēlētājs no vienas klases var spēlēt ar katru spēlētāju no pārējām klasēm, tad starp pirmās un otrās klases spēlētājiem var notikt $5 \times 5 = 25$ spēles; līdzīgi spriežam par spēlēm starp pirmo un trešo, kā arī otro un trešo klasi. Tātad pavisam varētu notikt 75 spēles, tātad varētu novilkt 75 taisnes nogriežņus. Novilkts 51 nogrieznis, tātad nenovilkti palikuši 24 nogriežņi.

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda: pieņemsim, ka uzdevumā minētos *A*, *B*, *C* atrast nevar. Tas nozīmē: lai kā arī paņemtu trīs dažādu krāsu punktus *A*, *B*, *C*, vismaz viens no nogriežņiem *AB*, *BC* un *CA* nav novilkts. Teiksim, ka šis nenovilktais nogrieznis **sabojā trijstūri *ABC***.

Ievērosim, ka katrs nenovilkts nogrieznis *XY* sabojā 5 trijstūrus, proti, visus trijstūrus *XYZ*, kur *Z* – jebkura no „trešās krāsas" virsotnēm, t.i., tās krāsas virsotnēm, kurā nav ne *X*, ne *Y*. Tātad, pat ja katrs no 24 nenovilktajiem nogriežņiem sabojātu citus piecus trijstūrus, kopā tie sabojātu ne vairāk par $24 \cdot 5 = 120$ trijstūriem. Bet pavisam ir $5 \cdot 5 \cdot 5$ trijstūri *ABC*, jo gan *A*, gan *B*, gan *C* var izvēlēties piecos veidos (katru no citas krāsas punktu grupas). Tātad kopējais trijstūru skaits ir 125, un $125 > 120$. Tāpēc ir tādi trijstūri, kas nav sabojāti. Katrs šāds trijstūris dod mums vajadzīgos trīs spēlētājus. Iegūta pretruna ar pieņēmumu, ka tādus spēlētājus nevar atrast. Tātad pieņēmums ir bijis nepareizs, un tādus spēlētājus atrast var. Tas arī bija jāpierāda.

9. Katrīna var izvēlēties, piemēram, $a = 100$, $b = 10$ un $c = 1$. Tad Maijas aprēķinātā summa $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$ būs trīsciparu skaitlis, kurā Maijas iedomātie viencipara skaitļi *x*, *y* un *z* parādīsies kā cipari. Skaidrs, ka, uzzinot šo trīsciparu skaitli no Maijas, Katrīna uzreiz redzēs Maijas iedomātos skaitļus.

Piemērs. Ja Maijas iedomājusies $x = 2$, $y = 7$ un $z = 1$, tad viņai jāpaziņo Katrīnai skaitlis $100 \cdot 2 + 10 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 200 + 70 + 1 = 271$, un Katrīna, dzirdot to, uzreiz saprot, ka Maijas iedomātie skaitļi ir 2; 7; 1.

10. Piemēram, tā, kā parādīts 6.zīm.

A2	D4	B1	C3
B3	C1	A4	D2
C4	B2	D3	A1
D1	A3	C2	B4

6.zīm.

2008./2009. mācību gads

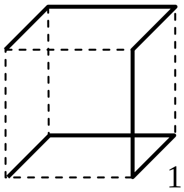
3.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Ja naturāls skaitlis *n* nebeidzas ar ciparu 9, tad skaitļa $n+1$ ciparu summa ir par 1 lielāka nekā *n* ciparu summa (skaitlim $n+1$ pēdējais cipars ir par 1 lielāks nekā skaitlim *n*, bet pārējie cipari, ja tādi ir, abiem skaitļiem sakrīt).

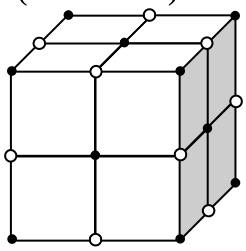
Tā kā vai nu *n*, vai $n+1$ noteikti nebeidzas ar ciparu 9, tad vai nu *n* un $n+1$ ciparu summas, vai arī $n+1$ un $n+2$ ciparu summas atšķiras viena no otras par 1. Tāpēc tās abas nevar dalīties ar 11. Tātad nav 3 viens otram sekojošu naturālu skaitļu, kam visiem ciparu summas dalītos ar 11.

Divus šādus skaitļus var atrast daudzos veidos. Kā piemērs der 28099999 un 28100000.

2. Kuba virsotnes prasītajā veidā apstaigāt var (skat.1.zīm.).



1.zīm.



2.zīm.

Kuba virsotnes un skaldņu centrus prasītajā veidā apstaigāt nevar. Nokrāsosim virsotnes un skaldņu centrus melnus, bet šķautņu viduspunktus – zaļus. Tad pavisam kopā ir $8+6=14$ melni punkti un 12 zaļi punkti. Staigājot tikai pa šķautnēm un „krustiem”, no melna punkta nonāk zaļā un no zaļa – melnā. Tā kā melnie un zaļie punkti maršrutā parādās pamīšus, tad to daudzumi maršrutā nevar atšķirties viens no otra vairāk kā par 1. Bet $14-12=2>1$. Tātad prasītais maršruts nav iespējams.

3. Viegli pārbaudīt, ka $35^2=1225$; $335^2=112225$; $3335^2=11122225$; $33335^2=1111222225$.

Pamatojoties uz šiem piemēriem, rodas doma, ka katram naturālam *n*

$$\Big(\underbrace{333...3}_{n}5\Big)^2=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5.$$

Pierādīsim to.

Ievērosim, ka $\underbrace{333...3}_{n}5=\underbrace{333...3}_{n}\cdot 10+5=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{99...9}_{n}\cdot 10+5=\frac{10}{3}\cdot\left(10^n-1\right)+5=$

$=\frac{1}{3}\left(10^{n+1}+5\right).$

Ceļot šo skaitli kvadrātā, iegūstam

$$\frac{1}{9}\left(10^{2n+2}+2\cdot 10^{n+1}\cdot 5+25\right)=\frac{1}{9}\left(10^{2n+2}+10^{n+2}+25\right)=\frac{1}{9}\left(10^{2n+2}-1\right)+\frac{1}{9}\left(10^{n+2}-1\right)+3=$$

$$=\underbrace{111...1}_{2n+2}+\underbrace{1...1}_{n+2}+3=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5\text{, k.b.j.}$$

Tātad ar cipariem 1; 2; 5 var pierakstīt bezgalīgi daudzu naturālu skaitļu kvadrātus.

4. Pieņemsim, ka Katrīna iedomājās naturālu skaitli *n* un tā dalītāju *d*; tad $n=k\cdot d$, k – kaut kāds naturāls skaitlis. Uzdevuma nosacījumus var pierakstīt ar vienādību $k\cdot d-5(d+10)=1$,

ko var pārveidot par $d(k-5)=51$.

No šejienes redzam, ka *d* ir skaitļa 51 dalītājs. Tātad pastāv viena no 4 iespējām:

- $d=1$; tad $k-5=51$, $k=56$ un $n=56\cdot 1=56$;
- $d=3$; tad $k-5=17$, $k=22$ un $n=22\cdot 3=66$;
- $d=17$; tad $k-5=3$, $k=8$ un $n=8\cdot 17=136$;
- $d=51$; tad $k-5=1$, $k=6$ un $n=6\cdot 51=306$

Tātad Katrīnas iedomātais skaitlis ir 56; 66; 136 vai 306.

5. Atbilde: nē nevar.

Risinājums. Pieņemsim no pretējā, ka tādi cipari *a*, *b*, *c* pastāv. Iegūstam vienādību

$$(10a+b)(10b+c)(10c+a)=(10c+b)(10b+a)(10a+c).$$

Atverot iekavas, iegūstam

$$1001abc+100(a^2b+b^2c+c^2a)+10(a^2c+c^2b+b^2a)=$$
$$=1001abc+100(a^2c+c^2b+b^2a)+10(a^2b+b^2c+c^2a),$$

no kurienes seko

$$90(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-c^2b-b^2a)=0 \text{ jeb}$$
$$90(b-a)(c-b)(a-c)=0$$

Skaidrs, ka šāda vienādība dažādiem *a*, *b*, *c* nevar pastāvēt, tāpēc mūsu pieņēmums ir nepareizs.

6. No $3n+1$ līdz $4n$ ieskaitot ir *n* naturāli skaitļi. Tā kā $n>1$, tad šo skaitļu ir vismaz divi. Viens no tiem ir 4*n*; pārējie (tādu ir vismaz viens) ir mazāki par 4*n*.

Skaitļa 4*n* apgrieztais lielums ir $\frac{1}{4n}$; pārējo skaitļu apgrieztie lielumi ir **lielāki** par $\frac{1}{4n}$. Tā kā tiek saskaitīti *n* skaitļi, no kuriem viens ir $\frac{1}{4n}$, bet pārēji (vismaz viens) ir lielāki par $\frac{1}{4n}$, tad summa ir **lielāka** par $n\cdot\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}$, k.b.j.

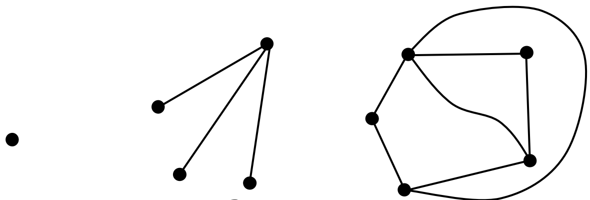
7. Viegli pārliecināties, ka katra Andra izmērītā nogriežņa *a* garums ir lielāks par visu to izmērīto nogriežņu garumu summu, kuri ir īsāki par *a*: $1<2$, $1+2<4$, $1+2+4<8$ utt. Tāpēc nekādi Andra izmērītie nogriežņi neveido noslēgtu maršrutu: tā būtu pretruna ar teorēmu par lauztas līnijas garumu.

Tāpēc astoņiem Andra izmērītajiem nogriežņiem kopā ir vismaz 9 galapunkti, un kopējais atzīmēto punktu skaits nav mazāks par 9. Deviņi atzīmēti punkti var būt, piemēram, skaitļu ass punkti 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256. Tiešām, $2-1=1$; $4-2=2$; $8-4=4$; $16-8=8$; $32-16=16$; $64-32=32$; $128-64=64$; $256-128=128$.

Pamatosim augstāk izcelto apgalvojumu. Pierādīsim visā matemātikā svarīgu rezultātu.

Lemma par ciklu. *Ja pavisam ir n punkti, $n\geq 2$, un novilktas vismaz n līnijas, katra no kurām savieno divus no šiem punktiem, tad var atrast dažas līnijas, kuras veido noslēgtu gredzenu.*

Pieņemsim no pretējā, ka šāda noslēgta gredzena nav. Apskatāmā punktu un līniju sistēma var sastāvēt no viena vai vairākiem fragmentiem; vienā fragmentā iekļausim punktus, no kuriem var aiziet no katra uz katru pa apskatāmajām līnijām, un šos punktus savienojošās līnijas. Piemēram, 3.zīm. parādītā sistēma sastāv no 3 fragmentiem (viens no tiem satur tikai vienu punktu).



3.zīm.

Balstoties uz izdarīto pieņēmumu, pierādīsim, ka katrā fragmentā līniju ir mazāk nekā punktu. Tad arī kopējais līniju skaits būs mazāks nekā kopējais punktu skaits, bet tā būs pretruna: dots, ka līniju ir vismaz tikpat, cik punktu (t.i., vismaz *n*). Līdz ar to lemma par ciklu būs pierādīta.

Apskatīsim vienu fragmentu. Ņemsim vienu tā punktu *A* un nokrāsojam to sarkanu. Ja no *A* neziet neviena līnija, vajadzīgais pierādīts (fragmentā ir 1 punktus un 0 līnijas, un $1>0$). Ja ir kāda līnija *AB*, nokrāsojam to sarkanu.

4.zīm.

Ja no *A* un *B* citas līnijas vairs neiziet, vajadzīgais pierādīts: fragmentā ir 2 punkti, 1 līnija un $2>1$. Ja kāda līnija ir, nokrāsojam to sarkanu. **Tā noteikti iet uz citu punktu nekā jau apskatītie *A* un *B*, citādi veidotos gredzens.**

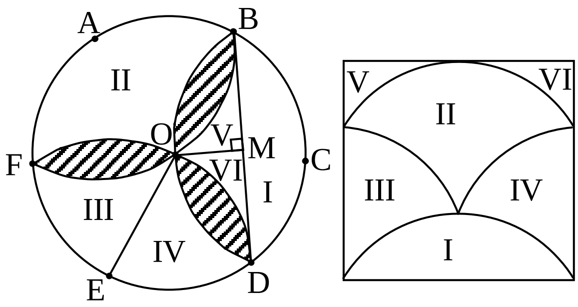
Iegūstam sarkanajā krāsā klāt **vienu** jaunu punktu un **vienu** jaunu līniju.

Tā kā iepriekš punktu sarkanā krāsā bija vairāk nekā līniju, tad arī tagad punktu sarkanajā krāsā joprojām ir vairāk nekā līniju.

Līdzīgi turpinām, kamēr viss fragments nokrāsots sarkans. Tā kā katrā solī gan nokrāsoto punktu, gan nokrāsoto līniju daudzums palielinājās par 1, bet sākumā nokrāsoto punktu bija vairāk nekā līniju, tad arī beigās ir tāpat. Līdz ar to vajadzīgais pierādīts.

Tagad skaidrs, kā iegūt apgalvojumu par vismaz 9 galapunktiem Andra izmērītajos nogriežņos. Ja tur būtu ne vairāk par 8 galapunktiem, tad saskaņā ar lemmu par ciklu daži no šiem 8 nogriežņiem veidotu noslēgtu kontūru. Bet, kā jau redzējām risinājuma sākumā, tā nevar būt mērījumu skaitlisko vērtību dēļ.

8. Risinājuma **shēma** parādīta 5. un 6.zīm. Tiek izdarīti 3 taisni griezieni *OE*, *BD* un *OM*. Pēc tam daļas tiek saliktas tā, kā redzams 6.zīm.



5.zīm. 6.zīm.

Risinājums prasa rūpīgu pamatojumu. Ir vairāk vai mazāk „acīmredzams", ka *OE* un *OM* neskar iesvītrotos apgabalus; bet noteikti jāpierāda, ka *BD* neiet caur iesvītrotajiem apgabaliem. Jāpamato arī, kāpēc daļas var salikt kopā tā, kā parādīts 6.zīm. (t.i., kāpēc nerodas pārklāšanās vai nepaliek tukšas vietas) un kāpēc kopējā figūra iznāk taisnstūris.

Pagaidām atstājam to izdarīt jums patstāvīgi. Kārtējā grāmatā, kurā tiks publicēti visi 2008./09.m.g. matemātisko sacensību uzdevumi un to atrisinājumi, dosim arī pilnus pierādījumus.

9. Pieņemsim no pretējā, ka Gudrītis nav liels, un iegūsim pretrunu. Tātad Gudrītis nav ne garāks, ne smagāks par kādu rūķīti *A*. Tas nozīmē, ka *A* nav ne īsāks, ne vieglāks par Gudrīti. Bet tad *A* nevar būt mazs – pretruna.

Līdzīgi iegūst pretrunu no pieņēmuma, ka Gudrītis nav mazs.

10. Viena no iespējamām dežūru secībām Andrim, Maijai, Katrīnai un Imantam 15 dienu periodam ir šāda:

A, AM, M, MK, MKA, KA, K, KI, KAI, MKAI, MKI, MI, AMI, AI, I.

Savukārt viena no iespējamām dežūru secībām Andrim, Maijai, Katrīnai, Imantam un Zanei decembra 31 dienai ir šāda:

A, AM, M, MK, MKA, KA, K, KI, KAI, MKAI, MKI, MI, AMI,AI, I, IZ,
AIZ, AMIZ, MIZ, MKIZ, MKAIZ, KAIZ, KIZ, KZ, KAZ, MKAZ, MKZ,
MZ, AMZ, AZ, Z.

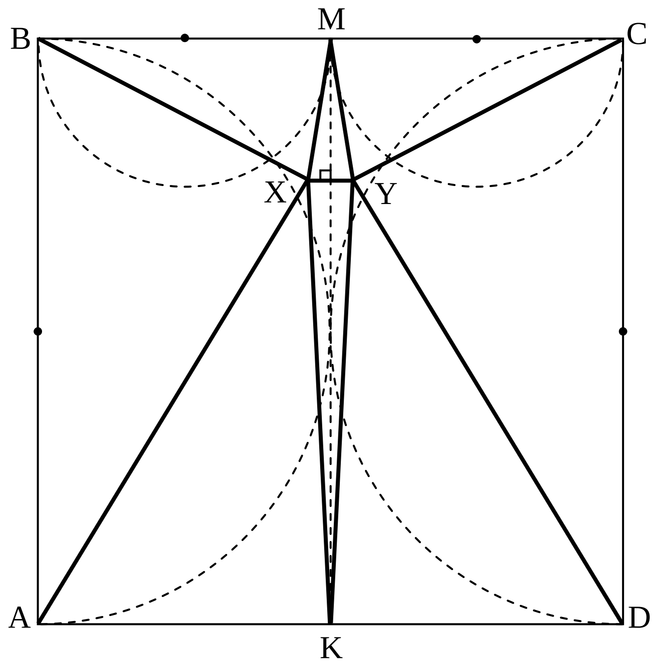
Pārbaudiet to patstāvīgi un padomājiet, kā saraksts 4 bērniem iegūts no saraksta 3 bērniem, bet saraksts 5 bērniem – no saraksta 4 bērniem. (Profesors Cipariņš būtiski balstījās uz to, ka $7=2^3-1$, $15=2^4-1$ un $31=2^5-1$.)

2008./2009. mācību gads

4.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

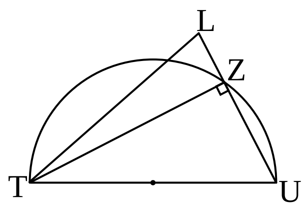
1. Naturāls skaitlis dalās ar 5 tad un tikai tad, ja tā pēdējais cipars ir vai nu 0, vai 5. Tad $S=0$ vai $S=5$. Ja būtu $S=0$, tad skaitlis *ASS* beigtos ar divām nullēm. Tad tas dalītos ar 100, tātad dalītos arī ar 4. Bet dots, ka *ASS* ar 4 nedalās. Tātad $S=5$.
Ja *OLA* dalītos ar 5, tad jābūt vai nu $A=0$, vai $A=5$. Tā kā $S=5$ un $A \neq S$, tad jābūt $A=0$. Bet tad skaitļa *ASS* pieraksts sāktos ar ciparu 0; tas nav iespējams. Iegūta pretruna.
Tātad *OLA* nevar dalīties ar 5.

2. Skat., piem., 1.zīm.



1.zīm.

Punkti *M* un *K* ir attiecīgi kvadrāta malu *BC* un *AD* viduspunkti. Skaidrs, ka *ABMK* ir taisnstūris. Pusriņķa līniju centri atrodas attiecīgi *AB*, *BM*, *MC*, *CD* viduspunktos; tātad *AB*, *BM*, *MC*, *CD* ir šo pusriņķa līniju diametri. Punkti *X* un *Y* izvēlēti tā, ka *MK* ir nogriežņa *XY* vidusperpendikuls.
Pamatosim, kāpēc visi 8 zīmējumā redzamie trijstūri ir šaurleņķu.
Lemma. Ja pusriņķa līnijas diametrs ir *TU* un nogrieznis *LU* krusto šo pusriņķa līniju, tad $\angle TLU < 90°$.

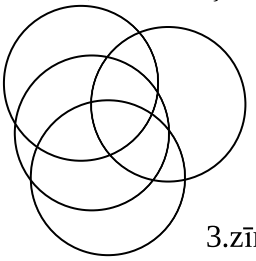


2.zīm.

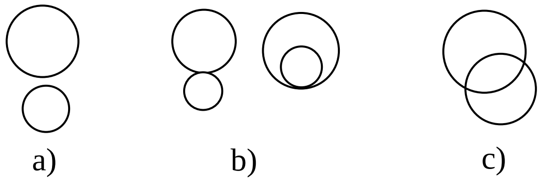
Tiešām (skat. 2.zīm.) $\angle TZU = 90°$ kā ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru. Tāpēc $\angle TZL = 180° - 90° = 90°$. Tāpēc ΔTZL ir taisnleņķa un $\angle TLZ < 90°$. Lemma pierādīta.
Apskatīsim ΔBXM :
a) $\angle BXM < 90°$ saskaņā ar lemmu,
b) $\angle MBX < \angle MBA = 90°$,
c) $\angle BMX < \angle BMK = 90°$.
Tātad ΔBXM ir šaurleņķu.
Līdzīgi pierāda, ka ΔBXA, ΔAXK, ΔKYD, ΔDYC, ΔCYM ir šaurleņķu.
Apskatīsim ΔXMY. Acīmredzami $\angle XMY < 90°$. Saskaņā ar *X* un *Y* izvēli ΔXMY ir vienādsānu, tāpēc tā leņķi pie pamata $\angle MXY$ un $\angle MYX$ ir šauri.
Tātad ΔXMY ir šaurleņķu.
Līdzīgi pierāda, ka ΔXKY ir šaurleņķu.

3. Atbilde: 14 daļās.

Risinājums. To, ka 14 daļas var būt, redzam 3.zīm. Pierādīsim, ka vairāk daļu būt nevar.



3.zīm.



4.zīm.

Risinājumā ļoti būtiska loma ir tam, ka divām dažādām riņķa līnijām var būt tikai 0, 1 vai 2 kopīgi punkti (skat. 4.zīm.). Starp citu, no tā redzam, ka divas riņķa līnijas var sadalīt plakni augstākais 4 daļās: visi iespējamie gadījumi redzami 4.zīm.

Padomāsim, par cik var palielināties apgabalu skaits, novelkot trešo riņķa līniju ω zīmējumā, kurā jau ir divas riņķa līnijas α un β.

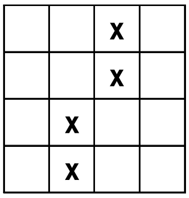
Riņķa līnijai ω ar α un β kopā var būt ne vairāk kā 4 kopīgi punkti. Tātad ω ar šiem punktiem sadalās augstākais 4 lokos. Katrs no šiem lokiem sadala kādu no iepriekšējām plaknes daļām divās mazākās. Citā ceļā daļu skaits nepalielinās. Tāpēc daļu skaits pieaug ne vairāk kā par 4.

Tāpēc 3 riņķa līnijas sadala plakni ne vairāk kā $4+4=8$ daļās.

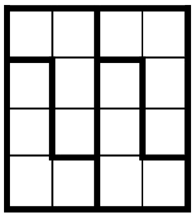
Novelkot vēl ceturto riņķa līniju, iegūstam augstākais $3\cdot 2=6$ kopīgus punktus ar iepriekšējām. Tātad ceturtā riņķa līnija sadalās augstākais 6 lokos, un šie loki palielina plaknes daļu skaitu ne vairāk kā par 6. Tāpēc 4 riņķa līnijas sadala plakni ne vairāk kā $8+6=14$ daļās.

4. Atbilde: 4 rūtiņas.

Risinājums. To, ka ar 4 rūtiņām pietiek, redzam 5.zīm.; viegli pārbaudīt visus iespējamos „L burta” novietojumus.



5.zīm.



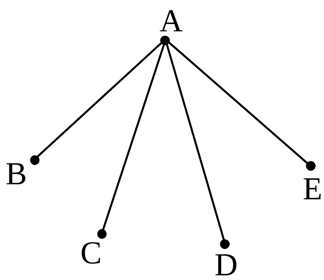
6.zīm.

Tā kā katrā no četriem „L burtiem”, kas redzami 6.zīm., nepieciešama cita melna rūtiņa, tad ar mazāk kā 4 melnām rūtiņām nepietiek.

5. Pierādīsim, ka minētā tipa trijstūru ir vismaz 2. Tā kā atrisinājums tiek drukāts uz balta fona, attēlosim nogriežņus taisnus (______) vai viļņotus (~~~~~~~~).

Šķirosim atsevišķas iespējas.

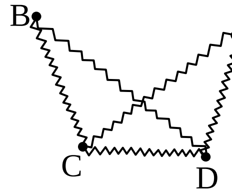
I Var gadīties, ka ir tāds punkts, no kura iziet 4 vai pat 5 viena veida nogriežņi. Apskatīsim četrus no tiem (skat. 7.zīm.). Varam pieņemt, ka šie nogriežņi ir taisni (otrs gadījums ir analoģisks).



7.zīm.

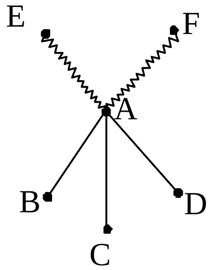
Ja kaut divi no sešiem nogriežņiem, kas savieno punktus *B*; *C*; *D*; *E* savā starpā, arī ir taisni, tad vajadzīgos divus trijstūrus ar taisnām malām jau esam ieguvuši (trešā virsotne tiem ir *A*). Tāpēc atliek iespēja, kad **augstākais** viens no šiem sešiem nogriežņiem ir taisns.

Varam pieņemt, ka visi 5 nogriežņi, izņemot **varbūt** *BE*, ir viļņoti (pārējie gadījumi ir analoģiski). Tad *BCD* un *ECD* ir „viļņoti” trijstūri.

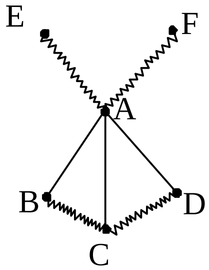


8.zīm.

II Nav tāda punkta, no kura iziet 4 vai 5 viena veida nogriežņi. Tad no katra punkta iziet 3 viena veida un 2 otra veida nogriežņi. Varam pieņemt, ka no *A* iziet 3 taisni un 2 viļņoti nogriežņi (skat. 9.zīm.); otrs gadījums ir analoģisks.



9.zīm.

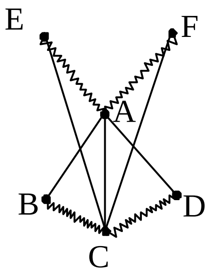


10.zīm.

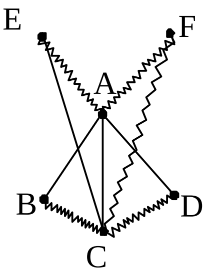
Ja kaut divi (vai visi trīs) no trim nogriežņiem *BC*, *CD*, *DB* arī ir taisni, esam ieguvuši divus „taisnus” trijstūrus (trešā virsotne tiem ir *A*). Tāpēc atliek gadījums, ja augstākais viens no tiem ir taisns, bet vismaz divi – viļņoti. Varam pieņemt, ka *CB* un *CD* ir viļņoti (skat. 10.zīm.); citi gadījumi ir analoģiski.

Tā kā mēs apskatām gadījumu, kad ne no viena punkta neiziet 4 vai 5 viena veida nogriežņi, tad pastāv divas iespējas:

II_1) abi nogriežņi *CE* un *CF* ir taisni (skat. 11.zīm.).



11.zīm.



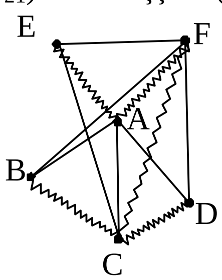
12.zīm.

Viegli redzēt: lai kādi būtu nogriežņi *EF* un *BD*, gan trijstūru pārī „*AEF* un *CEF*”, gan trijstūru pārī „*ABD* un *CBD*” būs pa vienam trijstūrim ar viena veida malām.

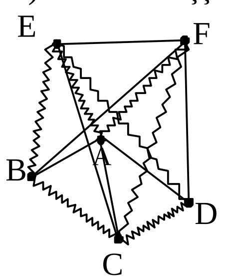
II_2) viens no nogriežņiem *CE* un *CF* ir taisns, otrs – viļņots; varam pieņemt, ka *CE* ir taisns (skat. 12.zīm.). Kā iepriekš iegūstam, ka atkarībā no *BD* veida vai nu *ABD*, vai *CBD* būs trijstūris ar viena veida malām. Centīsimies izvairīties no otra šāda trijstūra. Pakāpeniski iegūstam:

II_{21}) *EF* ir taisns (ΔAEF), *BF* ir taisns (ΔBCF) un *FD* ir taisns (ΔCFD), skat. 13.zīm.

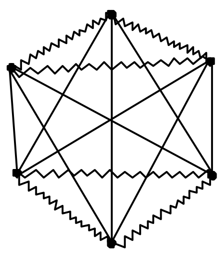
II_{21}) *BE* ir viļņots (ΔBEF) un *ED* ir viļņots (ΔEFD), skat. 14.zīm.



13.zīm.



14.zīm.



15.zīm.

Tagad redzam: ja *BD* ir taisns, tad otrais vajadzīgais trijstūris ir *BFD*, bet, ja *BD* ir viļņots, tad otrais vajadzīgais trijstūris ir *BED*.

Visi gadījumi apskatīti, uzdevums atrisināts.

Piezīme. Var gadīties, ka vairāk par diviem „vienkrāsainiem" trijstūriem nav; skat., piem., 15.zīm.

6. Apzīmēsim minētos 5 skaitļus ar $a < b < c < d < e$, to summu ar 2*S* (tātad $a+b+c+d+e=2S$) un domāsim, kuri skaitļi var būt vienā grupā ar *e*, lai šīs grupas skaitļu summa būtu *S*. Apzīmēsim šo grupu ar *G*. Šķirosim trīs iespējas.

I Grupa *G* varētu sastāvēt tikai no skaitļa *e*; tad $a+b+c+d=e=S$. Tādā gadījumā cita sadalījuma divās grupās ar vienādām summām nav, jo, pievienojot *e* kaut vienu citu skaitli, summa būs lielāka par *S*, bet atlikušo skaitļu summa – mazāka par *S*.

II Grupa *G* nevar saturēt visus 5 skaitļus (acīmredzams) un nevar arī saturēt 4 skaitļus, jo *e* jau viens pats lielāks par vienīgo atlikušo skaitli.

III Tātad grupa *G* noteikti satur vai nu *e* un vēl vienu skaitli (sauksim šādas grupas par mazām), vai arī *G* satur *e* un vēl divus skaitļus (sauksim šādas grupas par lielām). Šķirojam apakšgadījumus.

III_1 Gan Andra grupa G_A, gan Maijas grupa G_M ir mazas. Tā nevar būt, jo tad abās šajās grupās skaitlim *e* pievienots viens un tas pats cits skaitlis, tāpēc tās sakrīt; tad jāsakrīt arī otrajām abu bērnu izveidotajām grupām.

III_2 Gan Andra grupa G_A, gan Maijas grupa G_M ir lielas. Grupas G_A un G_M nevar abas saturēt vēl citu vienu un to pašu skaitli; tā kā to abu summas ir *S*, tad arī trešajiem skaitļiem tajās būtu jāsakrīt, un tad abu bērnu sadalījumi būtu vienādi.

Tā kā saskaņā ar doto $d+c>b+a$ un $d+b>c+a$, tad vienīgā iespēja ir: viena no grupām G_A un G_M ir $\{e; a; d\}$, otra - $\{e; b; c\}$. Tad iegūstam $e+a+d=S$ un $e+b+c=S$; saskaitot šīs vienādības, iegūstam $e+a+d+e+b+c=2S=a+b+c+d+e$, no kurienes seko $e=0$ - pretruna.

III_3 Viena no grupām G_A un G_M ir maza, otra – liela. Pieņemsim, ka viena no tām ir $\{e; \alpha\}$, bet otra ir $\{e; \beta; \gamma\}$; te *α*, *β*, *γ* ir kaut kādi no atlikušajiem 4 skaitļiem *a*; *b*; *c*; *d*. Tā kā $e+\alpha=S$ un $e+\beta+\gamma=S$, tad $e+\alpha=e+\beta+\gamma$ un $\alpha=\beta+\gamma$; tāpēc skaitļi α, *β*, *γ* visi ir dažādi.

Iegūstam $e+\alpha+e+\beta+\gamma=2S$ jeb

$(e+\alpha+\beta+\gamma)+e=2S=a+b+c+d+e$, jeb

$\boldsymbol{e+\alpha+\beta+\gamma=a+b+c+d}$ (*)

Tā kā *α*, *β*, un *γ* ir trīs no skaitļiem *a*; *b*; *c*; *d*, tad no (*) seko: *e* vienāds ar ceturto no šiem skaitļiem. Bet tā ir pretruna ar doto, ka visi skaitļi ir dažādi. Tātad uzdevumā minētā situācija nav iespējama.

Piezīme. Ja skaitļu skaits (apzīmēsim to ar *n* + 1) ir lielāks par 5 (tātad $n \ge 5$), uzdevumā minētā situācija ir iespējama. Apskatīsim skaitļu sistēmu

$$1;\ 2;\ 3;\ ...;\ n;\ (1+2+...+n)-6.$$

Vispirms pierādīsim, ka visi skaitļi tajā ir dažādi. Pietiek pierādīt, ka $(1+2+...+n)-6>n$ jeb, ka $1+2+...+(n-1)>6$. Tā kā $n \ge 5$, tad tiešām $1+2+...+(n-1) \ge 1+2+3+4=10>6$.

Tālāk ir acīmredzams, ka Andris var izvēlēties sadalījumu

{1; 2; 4; 5; ...; *n*} un {3; $(1+2+...+n)-6$ },

bet Maija – sadalījumu

{3; 4; 5; ...; *n*} un {1; 2; $(1+2+...+n)-6$ }.

7. Apzīmēsim $a-b=x$; $b-c=y$; $c-a=z$. Tad $x+y+z=0$.

Identisku pārveidojumu ceļā iegūstam

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}-2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}-2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}=$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\right)=$$

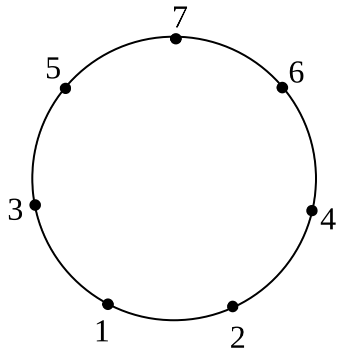
$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-2\cdot\frac{x+y+z}{xyz}=$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2,$$

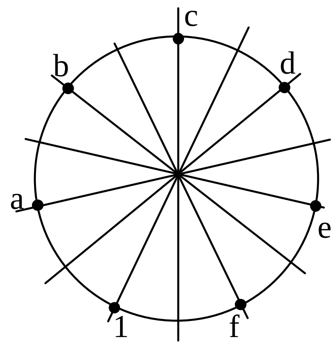
jo $x+y+z=0$, tāpēc lielums $2\cdot\frac{x+y+z}{xyz}$ anulējas.

Tā kā *x*, *y*, *z* – racionāli skaitļi, tad no vienādības $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$ seko vajadzīgais.

8. Skaidrs, ka der arī secība, kas **pretēja** uzdevumā dotajai (skat. 16.zīm.).



16.zīm.



17.zīm.

Pierādīsim, ka citu secību, izņemot uzdevuma nosacījumos minēto un 16.zīm. doto, nav.
Apskatāmajai punktu sistēmai ir 7 simetrijas asis; katra no tām iet caur riņķa līnijas centru un kādu no 7 punktiem. Izvēlēsimies skaitļa 1 atrašanās vietu un apzīmēsim pārējos skaitļus, kā parādīts 17.zīm.
Pastāv divas iespējas: vai nu $a > f$, vai $a < f$. Pieņemsi, ka ***a*** **>** ***f*** (otrs gadījums ir analoģisks).
Tad, aplūkojot asi, kas iet caur punktu ar skaitli 1, iegūstam ***b*** **>** ***e*** un ***c*** **>** ***d***.
Aplūkojot asi, kas iet caur punktu ar skaitli *c*, redzam, ka ***f*** **> 1**; tāpēc jābūt arī ***e*** **>** ***a*** un ***d*** **>** ***b***.
No izceltajām nevienādībām seko, ka

1 < ***f*** **<** ***a*** **<** ***e*** **<** ***b*** **<** ***d*** **<** ***c*** (*)

Tā kā skaitļi *f*; *a*; *e*; *b*; *d*; *c* ir tie paši skaitļi 2; 3; 4; 5; 6; 7, tad iegūstam 16.zīm. parādīto secību.
Līdzīgi, ja būtu $a < f$, mēs iegūtu uzdevuma nosacījumos doto secību.

9. Maija var uzvarēt, lietojot sekojošu stratēģiju. Viņa domās sadala visus ierakstāmos 100 skaitļus sekojošos pāros: (2; 3), (4; 5), (6; 7), ..., (96; 97), (98; 99), (100; 1). Tikko Katrīna ieraksta kādā rūtiņā vienu skaitli no kāda pāra, Maija ar atbildes gājienu ieraksta citā tās pašas rindiņas rūtiņā otru skaitli no šī paša pāra. Tā kā katrā rindiņā ir 10 (pāra skaits) rūtiņu, tad Maija šo plānu **var** realizēt. Kad visas rūtiņas būs aizpildītas, rindiņās ierakstītie mazākie skaitļi būs deviņi no pāra skaitļiem 2; 4; 6; 8; ...; 96; 98, kā arī vieninieks. Deviņu pāra skaitļu un viena nepāra skaitļa summa būs nepāra skaitlis, tātad Maija uzvarēs.

10. Jūsu vēstules ar pašu sastādītajiem uzdevumiem turpina pienākt. Par iesūtītajiem materiāliem runāsim vēlāk.

2008./2009. mācību gads

5.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Tā kā $1000\,000 = 100\times100\times100$, tad minēto sagriešanu var izdarīt, sadalot kubu 100 horizontālos slāņos, 100 „ziemeļu – dienvidu" virziena slāņos un 100 „austrumu – rietumu" virziena slāņos. Tādā gadījumā tiek izdarīti 99 horizontāli šķēlumi, 99 „ziemeļu – dienvidu" virziena šķēlumi un 99 „austrumu – rietumu" virziena šķēlumi. Katra šķēluma laukums vienāds ar kuba skaldnes laukumu (apzīmēsim to ar L), turklāt katrs šķēlums veido daļu no virsmas laukuma **divos** kubiņu slāņos. Tāpēc mazo kubiņu virsmas daļa, kas veidojas šķēluma rezultātā, ir (99+99+99)·2L. Pieskaitot vēl sākotnējā kuba skaldņu laukumus, iegūstam, ka visu mazo kubiņu kopējais virsmas laukums ir 3·99·2L+6L. Tā kā sākotnējā kuba virsmas laukums ir 6L, tad meklētā attiecība ir (3·99·2L+6L):6L=100.

2. Pārveidojot vienādojuma kreiso pusi, iegūstam $\frac{17}{30} = \frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}$, no kurienes seko

$$1\frac{13}{17} = x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} \qquad (1).$$

Tā kā y un z – naturāli skaitļi, tad $0 < \frac{1}{y+\frac{1}{z}} < 1$, pie tam $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}$ – racionāls skaitlis. Katram racionālam skaitlim ir viennozīmīgi noteikta tā veselā daļa un daļveida daļa, tāpēc no (1) seko $x=1$ un $\frac{13}{17} = \frac{1}{y+\frac{1}{z}}$, no kurienes

$$1\frac{4}{13} = y + \frac{1}{z} \qquad (2)$$

Līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka jābūt $y=1$ un $z=\frac{13}{4}$. Bet $\frac{13}{4}$ nav naturāls skaitlis. Tātad tādu *x*, *y*, *z*, par kādiem runāts uzdevumā, nav.

3. Apskatīsim 2 iespējas.

A. Skaitļa a pēdējais cipars ir 5. Viegli saprast: ja $a = b\cdot b$, kur b – naturāls skaitlis, un a beidzas ar ciparu 5, tad arī b beidzas ar ciparu 5. (Visus citus b pēdējos ciparus var pārbaudīt un konstatēt, ka neviens no tiem neder.) Tad $b = 10\cdot y + 5$, y – naturāls skaitlis; tāpēc $b^2 = (10y+5)^2 = 100y^2 + 100y + 25$. No tā redzam, ka skaitļa a priekšpēdējam ciparam jābūt 2; tātad $a = \overline{\underbrace{55\ldots5}_{98\ reizes}25}$.

Šī skaitļa ciparu summa ir $99\cdot5+2$; tātad tā dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad arī pats skaitlis a dod atlikumu 2, dalot ar 3 (atceramies, ka skaitlis un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus gan dalot ar 3, gan dalot ar 9). Pieņemsim, ka $a = b^2$, b – naturāls skaitlis. Padomāsim, kādu atlikumu dod b, dalot ar 3. Pastāv 3 iespējas.

A$_1$. Skaitlis b dod atlikumu 0, dalot ar 3, t.i., $b = 3m$, m – naturāls. Tad $b^2 = 9m^2$, tātad b^2 dod atlikumu 0, dalot ar 3. Tāpēc šī iespēja atkrīt.

A$_2$. Skaitlis b dod atlikumu 1, dalot ar 3, t.i., $b = 3m+1$, m – naturāls. Tad $b^2 = 9m^2 + 6m + 1$, tātad b^2 dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tāpēc arī šī iespēja atkrīt.

A$_3$. Skaitlis b dod atlikumu 2, dalot ar 3, t.i., $b = 3m+2$, m – naturāls. Tad $b^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$, tātad b^2 dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tāpēc arī šī iespēja atkrīt.

B. Skaitļa a pēdējais cipars ir atšķirīgs no 5. Tad $a = \overline{\underbrace{55\ldots5}_{99\ reizes}x}$, kur x – kaut kāds no 5 atšķirīgs cipars. Tātad $\underbrace{55\ldots5}_{99\ reizes}0 \le a \le \underbrace{55\ldots5}_{99\ reizes}9$.

Pārbaudīsim visas iespējas.

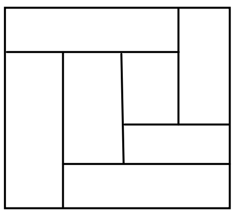
- Ja $a = \underbrace{55\ldots5}_{99}0$, tad a nav pilns kvadrāts; tiešām, a dalās ar 10, tātad tam būtu jādalās arī ar 100, bet tā nav.
- Skaitlis a nevar beigties ar cipariem 2; 3; 7; 8, jo neviena naturāla skaitļa kvadrāts ar tādiem nebeidzas.
- Skaitlis a nevar beigties ar ciparu 5 pēc uzdevumā dotā (ne visi a cipari ir piecinieki).
- Skaitlis a nevar beigties ar ciparu 6. Ja tā būtu, tad a ciparu summa būtu $99 \cdot 5 + 6$, kas dalās ar 3; tad arī a dalītos ar 3. Tā kā $a = b \cdot b$, b – naturāls, tad b dalās ar 3; tad $a = b \cdot b$ dalās ar $3 \cdot 3 = 9$. Tad a ciparu summai jādalās ar 9. Bet šī summa, kas ir $99 \cdot 5 + 6$, nedalās ar 9 (atlikumā paliek 6).
- Ja a beigtos ar 1 vai ar 9, tad a dotu atlikumu 3, dalot ar 4 ($a = \underbrace{55\ldots5}_{98}00 + 48 + 3$ resp. $a = \underbrace{5\ldots5}_{98}00 + 56 + 3$); savukārt, ja a beigtos ar 4, tad a dotu atlikumu 2, dalot ar 4 ($a = \underbrace{55\ldots5}_{98}00 + 52 + 2$). Pierādīsim, ka tā nevar būt. Tiešām, ja $a = b^2$ un b ir pāra skaitlis, $b = 2n$, tad $a^2 = (2n)^2 = 4n^2$, tātad a dod atlikumu 0, dalot ar 4. Savukārt, ja $a = b^2$ un b ir nepāra skaitlis, $b = 2n + 1$, tad $a^2 = 4(n^2 + n) + 1$, tātad a dod atlikumu 1, dalot ar 4.

Visi gadījumi pārbaudīti. Secinām, ka tāda skaitļa a, par kādu runāts uzdevumā, nav.

4. Apzīmēsim profesoru naudas daudzumus santīmos ar $A < B < C < D < E < F < G$. Pieņemsim, ka $E + F + G < 50$. **Tad noteikti jābūt $E \le 15$.** Tiešām, ja būtu $E \ge 16$, tad $F \ge 17$ (jo jābūt $F > E$) un $G \ge 18$ (jo jābūt $G > F$), bet tad $E + F + G \ge 16 + 17 + 18 \ge 51$ - pretruna.

No izceltā apgalvojuma savukārt pakāpeniski seko $D \le E - 1 \le 14$, $C \le D - 1 \le 13$, $B \le C - 1 \le 12$, $A \le B - 1 \le 11$; tātad $A + B + C + D \le 50$ un $E + F + G < 50$, iegūstam $A + B + C + D + E + F + G < 100$ - pretruna. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

5. Jā, var. Skat., piem., 1. zīm.



1. zīm.

6. Apzīmēsim $a = \frac{1}{A}$, $b = \frac{1}{B}$, $c = \frac{1}{C}$, $d = \frac{1}{D}$. Tad pierādāmā nevienādība pārveidojas par

$$\frac{1}{A+B} + \frac{1}{A+C} + \frac{1}{A+D} + \frac{1}{B+C} + \frac{1}{B+D} + \frac{1}{C+D} \le \frac{3}{4}$$

un tālāk par

$$\frac{4}{A+B} + \frac{4}{A+C} + \frac{4}{A+D} + \frac{4}{B+C} + \frac{4}{B+D} + \frac{4}{C+D} \le 3 \qquad (1)$$

Pieņemsim uz brīdi, ka pozitīviem x un y esam pierādījuši nevienādību $\frac{4}{x+y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(2)

Ievietojot šai nevienādībā $x = A,\ y = B$, iegūsim $\frac{4}{A+B} \le \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$. Līdzīgi iegūsim $\frac{4}{A+C} \le \frac{1}{A} + \frac{1}{C}$, $\frac{4}{A+D} \le \frac{1}{A} + \frac{1}{D}$, $\frac{4}{B+C} \le \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$, $\frac{4}{B+D} \le \frac{1}{B} + \frac{1}{D}$, $\frac{4}{C+D} \le \frac{1}{C} + \frac{1}{D}$.
Saskaitot šīs 6 nevienādības, iegūstam

$$\frac{4}{A+B} + \frac{4}{A+C} + \frac{4}{A+D} + \frac{4}{B+C} + \frac{4}{B+D} + \frac{4}{C+D} \le 3\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right) \qquad (3)$$

Tā kā saskaņā ar uzdevumā doto $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} = a + b + c + d = 1$, tad no (3) seko (1), kas arī bija jāpierāda.

Tātad atliek pierādīt (2).

Identisku pārveidojumu ceļā pakāpeniski iegūstam

$$\frac{4}{x+y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad (2)$$

$$\frac{4}{x+y} \le \frac{x+y}{xy}$$

Reizinām abas puses ar $(x + y)$ un *xy*; to drīkst darīt, jo *x* un *y* ir pozitīvi skaitļi.

$$4xy \le (x+y)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \ge 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$$

$$(x-y)^2 \ge 0$$

Pēdējā nevienādība ir pareiza, tāpēc pareiza ir arī sākotnējā (2). Uzdevums atrisināts.

7. Runājot par viencipara, divciparu, ... skaitļiem, automātiski tiek pieņemts, ka apskatām naturālos skaitļus. Trīsciparu naturālie skaitļi ir no 100 līdz 999 ieskaitot; to pavisam ir 900, un naturālo skaitļu virknē tie izvietoti pēc kārtas. Katrs trešais no tiem dalās ar 3. Tā kā 900 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus var sadalīt 300 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu trijniekos un katrā no tiem tieši viens skaitlis dalās ar 3, tad ir tieši 300 trīsciparu naturāli skaitļi, kas dalās ar 3. Tā kā ar 3 dalās tie un tikai tie naturālie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3, tad atbilde c) daļā ir **300**.

Trīsciparu naturāla skaitļa ciparu summa *S* ir naturāls skaitlis. Tā dalās ar 26, ja tās vērtība ir 26; 52; 78; ... .Tā kā neviens cipars nepārsniedz 9, tad $S \le 27$; tāpēc mūsu gadījumā b) daļā $S = 26$. Skaidrs , ka summa *S* var būt iegūta tikai kā $8+9+9 = 9+8+9 = 9+9+8$ (ņemot vērā saskaitāmo kārtību). Tāpēc b) daļas nosacījumus apmierina tikai skaitļi 899; 989; 998, un atbilde te ir **3**.

Apskatīsim jebkurus 10 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, no kuriem pirmais beidzas ar ciparu 0; tad pēdējais no tiem beidzas ar ciparu 9. Katram nākamajam no tiem ciparu summa ir par 1 lielāka nekā iepriekšējam. Tāpēc pusei no tiem ciparu summas ir pāra skaitļi, bet pusei – nepāra. Tātad katrā šādā desmitniekā pusei skaitļu ciparu summas ir nepāra skaitļi. Tā kā pavisam ir 90 šādi desmitnieki, tad ciparu summas dalās ar 2 tieši $\frac{900}{2} = 450$ trīsciparu naturāliem skaitļiem.

8. Feja aizdedzina reizē no abiem galiem zariņu A un no viena gala – zariņu B. Brīdī, kad zariņš A būs nodedzis pilnībā, būs pagājusi tieši pusstunda; tātad zariņam B būs atlikusi, ko degt, pusstunda. Šai brīdī aizdedzinām zariņu B no otra gala un sākam vārīt eliksīru. Brīdī, kad zariņš B būs nodedzis pilnībā, eliksīrs būs gatavs.

9. Skaidrs, ka uzrakstus var samainīt vairāk nekā vienā veidā, tāpēc pavisam bez bumbiņu izņemšanas prasīto noskaidrot nevarēs.

Alnis izņem vienu bumbiņu no kastītes, uz kuras **tagad** ir uzraksts MB. Viņam ir skaidrs, ka šai kastītē patiesībā ir vai nu divas melnas, vai divas baltas bumbiņas; tāpēc, redzot izņemtās bumbiņas krāsu, viņam ir skaidrs, kādas bumbiņas tajā ir.

Pieņemsim, ka Aļņa izņemtā bumbiņa ir balta. Tad no abām atlikušajām kastēm ar uzrakstiem MM un BB vienā ir divas melnas bumbiņas; saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, tā nevar būt kastīte ar uzrakstu MM, tātad tā ir kastīte ar uzrakstu BB. Tad kastītē ar uzrakstu MM ir viena melna un viena balta bumbiņa. Viss vajadzīgais noskaidrots.

Gadījumu, kad Aļņa izņemtā bumbiņa ir melna, analizē līdzīgi.

10. Atbilde: nē, tā gadīties nevar.

Risinājums. Pieņemsim, ka lodei ir ziemeļpols Z un dienvidpols D; tie ir diametrāli pretēji punkti. Apskatīsim ekvatoru; skaidrs, ka šajā riņķa līnijā var ievilkt vienādmalu trijstūri ABC. Tātad AB=BC=CA; skaidrs arī, ka ZA=ZB=ZC un DA=DB=DC.

Pieņemsim, ka muriburi no lodes punktiem A; B; C; D; Z pārceļas attiecīgi uz plaknes punktiem A_1; B_1; C_1; D_1; Z_1. Tad jābūt $A_1B_1= B_1\, C_1= C_1\, A_1$, t.i., $A_1B_1C_1$ – vienādmalu trijstūris. Jābūt arī $D_1A_1=D_1B_1=D_1C_1$, t.i., punktam D_1 jābūt $\Delta A_1B_1C_1$ apvilktās riņķa līnijas centram. Tas pats attiecas uz Z_1. Tas nozīmē, ka muriburiem no punktiem Z un D jāpārceļas uz vienu un to pašu punktu; tātad attālums starp viņiem, kas agrāk bija pozitīvs skaitlis, tagad ir 0 – pretruna.

2008./2009. mācību gads

6.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

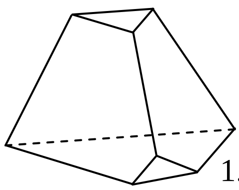
1. Uzdevumā ietverto frāzi „... samaksāja tik latu, cik flomāsterus var nopirkt par vienu latu" var saprast vismaz trejādi. Cik flomāsteru var nopirkt par vienu latu, ja viens flomāsters maksā, piemēram, 11 santīmu? Var sacīt, ka var nopirkt 9 flomāsterus, kas kopā maksā 99 santīmus, un viens santīms paliek pāri; var sacīt arī, ka par 1 latu flomāsterus nopirkt nevar, jo izdotā naudas summa nevar būt tieši 1 lats (100 nedalās ar 11); var arī sacīt, ka par 1 latu var nopirkt jebkuru daudzumu flomāsteru no 1 līdz 9 ieskaitot. Mēs izmantosim pirmo nostādni, kas sakrīt ar sarunvalodā pieņemto. Par vienu latu nopērkamo flomāsteru skaits noteikti ir naturāls skaitlis. Tātad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem Cipariņš izdeva naturālu skaitu latu: 1 latu, 2 latus, 3 latus, ... Apzīmēsim viena flomāstera cenu santīmos ar x; tātad Cipariņš samaksāja $25 \cdot x$ santīmus jeb $\frac{x}{4}$ latus. Tātad $\frac{x}{4}$ ir naturāls skaitlis, un x pieņem vienu no vērtībām 4; 8; 12; ... . Apzīmēsim $x = 4t$, t – naturāls. Tad par vienu latu nopērkamo flomāsteru skaits ir **lielākais naturālais skaitlis, kas nepārsniedz** $\mathbf{\frac{100}{x}}$.

Sastādām tabulu:

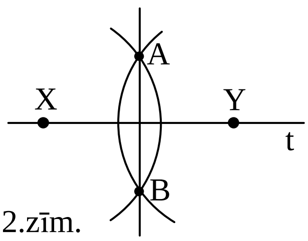
x	Izdoto latu skaits $\frac{x}{4}$	Lielākais naturālais skaitlis, kas nepārsniedz $\frac{100}{x}$
4	1	25
8	2	12
12	3	8
16	4	6
20	**5**	**5**
24	6	4
⋮	⋮	⋮

Skaidrs, ka, x vērtībai tālāk augot, iztērēto latu skaits $\frac{x}{4}$ būs ne mazāks par 6, bet lielākais naturālais skaitlis, kas nepārsniedz $\frac{100}{x}$, būs ne lielāks par 4; tāpēc šie lielumi nevarēs būt vienādi. Tātad vienīgā iespēja ir $x = 20$, t.i., viens flomāsters maksā 20 santīmus un Cipariņš izdeva 5 latus; tiešām, redzam, ka par 1 latu var nopirkt 5 flomāsterus.

2. Jā, eksistē. Skat., piem., 1.zīm., kur redzama trijstūra piramīda, kam nošķeltas divas virsotnes.



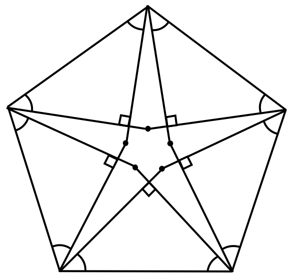
1.zīm.



2.zīm.

3. Skat., piem., 2.zīm. Uz taisnes t brīvi izvēlēti divi punkti X un Y un novilkti loki caur A, kuru centri ir šie divi punkti; loku otru krustpunktu apzīmējam ar B. Tā kā $XA = XB$, tad X atrodas uz AB vidusperpendikula; tā kā $YA = YB$, tad arī Y atrodas uz AB vidusperpendikula. Tātad taisne t ir AB vidusperpendikuls; tātad $AB \perp t$, kas arī bija vajadzīgs.

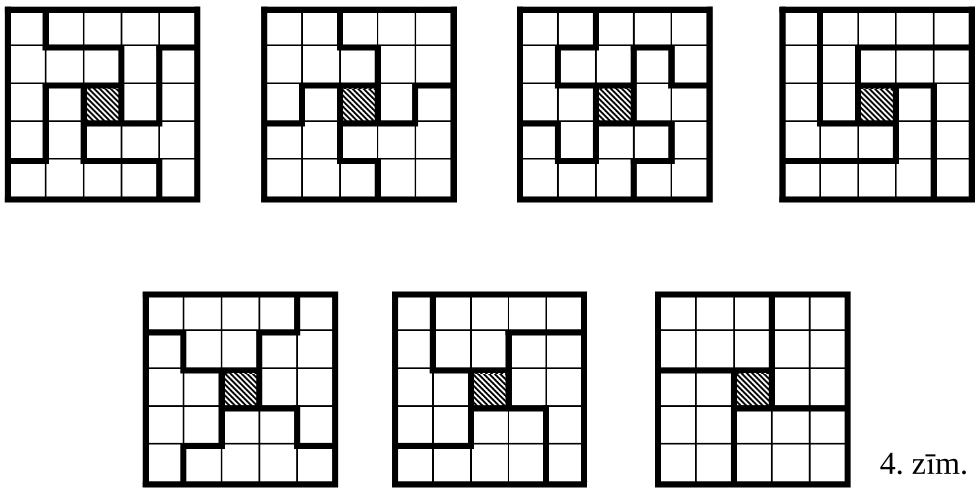
4. Skat., piem., 3.zīm.



3.zīm.

„Ārējās” virsotnes ir regulāra piecstūra virsotnes. Uz šī piecstūra malām kā hipotenūzām piecstūra iekšpusē konstruēti vienādsānu taisnleņķa trijstūri (tātad visi ar vienu lociņu apzīmētie leņķi ir $45°$ lieli); katešu pagarinājumu krustpunkti ir „iekšējās” virsotnes.

5. Skat., piem., 4.zīm., kur parādītas 7 iespējas; katrā no tām ir citas formas daļas.



4. zīm.

6. Pārveidojam vienādojumu formā

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+2}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right)\right)\right)=2009$$

Tā kā $1+\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}$, tālāk iegūstam

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)\right)\right)=2009$$

Līdzīgi tālāk pakāpeniski iegūstam

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+4}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)\right)=2009$$

$$\frac{5}{x+5}\left(1+\frac{4}{x+1}\right)=2009$$

$\frac{5}{x+1}=2009$, no kurienes $x+1=\frac{5}{2009}$ un $x=-\frac{2004}{2009}$.

7. Monētu, uz kuras uzrakstīts „*n* grami”, apzīmēsim ar n. Cipariņš vispirms nosver kopā 11 un 12. Ja iegūts rezultāts „23g”, tad viena no svērtajām monētām tiešām sver 11g, bet otra – 12g. Otrajā reizē Cipariņš nosver kopā 11 un 13. Rezultāts „24 grami” iespējams tikai, ja viena no svērtajām monētām sver 11g, bet otra – 13g. No abām izdarītajām svēršanām tagad zināms, ka 11, 12 un 13 ir „īstas”. (Ja kaut viena no šīm svēršanām dod citādu rezultātu, tad Cipariņš konstatē, ka ne visi uzraksti uz monētām ir pareizi, un tālākas svēršanas vairs neizdara.)

Tagad Cipariņš atliek malā monētas 11, 12 un 13 un izdara līdzīgus eksperimentus ar 14, 15 un 16. Ja arī tās izrādās „īstas”, tad pēdējā monēta 17 nevar svērt citādi kā 17g, un Cipariņš ir pārliecinājies, ka visi uzraksti ir pareizi. Ja otrajā eksperimentu sērijā tiek konstatēts, ka kāds uzraksts ir nepareizs, Cipariņš arī ir sasniedzis savu mērķi.

8. Atzīmēsim: ja divu skaitļu saskaitīšanā pārnesumi nerodas, tad summas ciparu summa ir vienāda ar summu, kuru iegūst, saskaitot savā starpā abu saskaitāmo ciparu summas. Ja turpretī kādā šķirā rodas pārnesumi (t.i., saskaitot ciparus šajā šķirā, iegūst divciparu skaitli $\overline{1a} = 10 + a$), tad rezultātā mēs rakstām tikai ciparu *a*, bet abu saskaitīto ciparu summas komponente 10 tiek pārnesta uz nākošo šķiru kā vieninieks; tātad rezultāta ciparu summa samazinās par 9, salīdzinot ar abu saskaitāmo visu ciparu summu. Nākošais pārnesums, ja tāds ir, atkal „samazina" rezultāta ciparu summu par 9, u.t.t.
No šejienes skaidrs, ka b) gadījums nav iespējams, jo $54 > 20 + 25$; c) gadījums nav iespējams, jo 22 gan ir mazāks par $20 + 25$, bet $(20 + 25) - 22 = 23$ nedalās ar 9. Savukārt a) gadījums ir iespējams (piem., $55555 + 44444 = 99999$), un arī d) gadījums ir iespējams (piem., $6667 + 83333 = 90000$).

9. Atbilde: Ls 20 000,- .
Risinājums. Šādas izmaksas var sasniegt, piemēram, tā, kā parādīts 5.zīm.

Darbinieks / Iekārta	A	B	C	D	E	F	G	H
1.	X	X	X	X				
2.	X	X	X		X			
3.	X	X	X			X		
4.	X	X	X				X	
5.	X	X	X					X

5.zīm.

Ja darbā ierodas visi 5 „šauri specializējušies" darbinieki D; E; F; G; H, tad visas iekārtas var darbināt. Ja daži no viņiem aiziet uz bibliotēku, tad viņu vietā ir tāds pats daudzums „universālu", kas katrs var aizvietot jebkuru iztrūkstošo, un atkal viss ir kārtībā.
Tagad parādīsim, ka ar mazāk nekā 20 apmācībām nepietiek. Tiešām, ja notikuši mazāk nekā 20 apmācības procesi, tad ar vismaz vienu iekārtu apmācīti strādāt **ne vairāk kā 3 darbinieki** (ja ar katru prastu strādāt vismaz četri, tad apmācību skaits būtu ne mazāks par $4 \cdot 5 = 20$). Ja kādu dienu neviena no viņiem nav darbā, attiecīgā iekārta stāv dīkā.

10. Atbilde: 14.
Risinājums. Skaitļi 2; 3; 4; ...; 15 apmierina uzdevuma prasības; pārbaudiet to patstāvīgi. Pieņemsim, ka izdevies atrast 15 šādus skaitļus; tad lielākais no tiem ir vismaz 16. No katriem 8 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 8; tāpēc arī viens no 8 lielākajiem mūsu apskatāmajiem skaitļiem dalās ar 8 (apzīmēsim to ar *x*). Pierādīsim, ka $x > 8$. Tiešām, ja **lielākais** no apskatāmajiem 15 skaitļiem ir vismaz 16, tad **8 lielākie** no šiem 15 skaitļiem visi ir vismaz 9; tātad arī *x* ir vismaz 9. Ja *x* dalās ar 8, tad $x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot q$, kur *q* – naturāls skaitlis, turklāt $q > 1$, citādi nebūtu spēkā sakarība $x > 8$. Tā kā *q* dalās ar vismaz vienu pirmskaitli (varbūt pats ir pirmskaitlis), tad *x* sadalās vismaz 4 pirmskaitļu reizinājumā – pretruna.