"Profesora Cipariņa klubs" 2008./09.m.g.

1.nodarbības uzdevumi

1. Andrim ir deviņas kartītes. Uz katras no tām uzrakstīts cipars no 1 līdz 9; visi uzrakstītie cipari ir dažādi. Cik dažādus divciparu skaitļus Andris var salikt no šīm kartītēm? **Skaitļi nav jāsaliek vienlaicīgi.**

2. Skolā ir 36 klases un 1045 skolēni. Vai var gadīties, ka nevienā klasē nav ne 30, ne vairāk skolēnu?

3. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām, kurās ierakstīti skaitļi, kā parādīts 1. zīmējumā. Ar vienu gājienu var izvēlēties no 2×2 rūtiņām sastāvošu kvadrātu un katrā šī kvadrāta rūtiņā esošajam skaitlim pieskaitīt vieninieku.

1	1	1
1	1	1
1	1	2

1. zīm.

8		9
	36	
10		11

2. zīm.

5	10	6
11	22	12
7	13	8

3. zīm.

Vai, lietojot šādus gājienus vairākkārt, ir iespējams

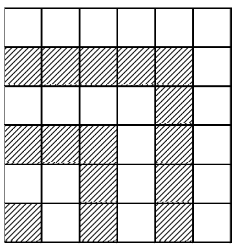
a) panākt, lai vienlaicīgi visās rūtiņās būtu nepāra skaitļi?

b) panākt, lai piecās rūtiņās būtu tādi skaitļi kā 2. zīm. (skaitļi citās rūtiņās var būt jebkuri)?

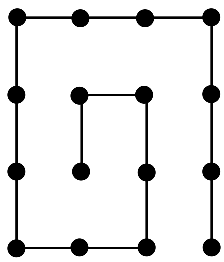
c) tādu ainu, kāda redzama 3. zīm.?

4. Pirmajā septembrī 2008 bērni atnesa profesoram Cipariņam pa konfektei „Gamma". Šīs konfektes ražo divas fabrikas; vienas fabrikas ražotās konfektes ir mazliet vieglākas nekā otras fabrikas ražotās. Pēc ārējā izskata konfektes atšķirt nevar. Profesors Cipariņš zina, ka vismaz 2006 bērni (varbūt pat visi) ir atnesuši vienādas konfektes, bet nezina, vai konfekšu vairākums ir vieglās vai smagās. Profesoram ir sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanām viņš var uzzināt, vai visas konfektes ir vienādas un, ja nav, tad vai vairākums ir vieglās vai smagās?

5. Pamatojoties uz 4. zīm., pierādīt teorēmu: ja n – naturāls skaitlis, tad $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$.



4. zīm.



5. zīm.

Pamēģiniet izdomāt zīmējumu, kas pierāda teorēmu: ja n – naturāls skaitlis, tad $1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

6. Ja punktu kvadrātiskā režģī attālums starp blakus esošiem punktiem ir 1, tad 5.zīm. attēlotās lauztās līnijas garums ir 15, un tai ir 6 stūri.

Kāds garums un cik stūru ir lauztai līnijai, kas līdzīgā veidā aizpilda 100×100 punktu lielu režģi?

7. Gan Sniegbaltītes rotaslietu kastīte, gan tās vāciņš ir regulāra septiņstūra formā.

Vai kastītes stūrus un vāciņa stūrus var nokrāsot 7 dažādās krāsās tā, lai neatkarīgi no tā, kā Sniegbaltīte uzliek kastītei vāciņu, vismaz vienā vietā saskārtos vienādi nokrāsoti stūri?

8. Kā var izvēlēties 3 dažādus nenulles ciparus a, b, c, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības: skaitlis $\overline{abc}$ dalās ar 7, skaitlis $\overline{bca}$ dalās ar 9, skaitlis $\overline{cab}$ dalās ar 11?

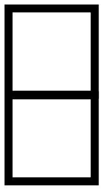
9. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka skaitlis n^2+1 dalās ar vismaz vienu pirmskaitli, kas lielāks par 1 000 000?

10. Sastādīt matemātisku uzdevumu, kas saistīts ar kādu šīs vasaras notikumu, un atsūtīt mums to līdz ar atrisinājumu. Interesantākos sasniegumus publicēsim.

"Profesora Cipariņa klubs" 2008./09.m.g.

2.nodarbības uzdevumi

1. Figūra 1.zīm. sastāv no 2 vienādiem kvadrātiem; tā izveidota no 7 vienādiem nogriežņiem.



1.zīm.

Atrodiet **trīs** dažādus veidus, kā nodzēst 3 no šiem nogriežņiem, lai paliktu pāri viens kvadrāts. (Uzskatām: ja diviem nogriežņiem ir kopīgs galapunkts un vienu no šiem nogriežņiem dzēš, tad kopīgais galapunkts paliek nenodzēsts.)

2. Kuba izmēri ir $4 \times 4 \times 4$. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var to sagriezt 64 kubiņos, kuru izmēri ir $1 \times 1 \times 1$? Katrs grieziens šķeļ griežamo ķermeni pa plakni. Pēc katra grieziena iegūtās daļas drīkst pārkārtot.

3. Naturāla skaitļa A ciparu summa ir 7. Vai skaitļa $7A$ ciparu summa var būt 24?

4. Doti 756 dažādi veseli pozitīvi skaitļi, no kuriem neviens nepārsniedz 2008. Pierādīt: no šiem skaitļiem var atrast divus, kuru summa dalās ar 8.

5. Triju naturālu skaitļu summa ir 31. Kāda ir mazākā iespējamā šo skaitļu kvadrātu summa?

6. Profesors Cipariņš dzīvo skaitļu ass punktā S. Kādu rītu viņš nolēma doties pastaigā, sperot 10 soļus: pirmo – ar garumu 1, otro – ar garumu 2, ..., desmito – ar garumu 10. (Soļu virzienus Cipariņš var izvēlēties patvaļīgi.) Vai var gadīties, ka Cipariņš pastaigas laikā nevienu brīdi nav attālinājies no sākumpunkta S

a) vairāk par 5,

b) vairāk par 4?

7. Vai var uzzīmēt plaknē slēgtu lauztu līniju, kurai ir 16 posmi, katri divi blakus posmi ir perpendikulāri viens otram, posmu garumi pēc kārtas ir 1; 2; 3; ...; 16 un pie tam līnija pati sevi nekrusto?

8. Skolas galda tenisa čempionātā piedalās triju klašu komandas; katrā ir pa 5 spēlētājiem. Katrā spēlē viens ar otru tiekas divi spēlētāji no dažādām klasēm. Katri divi spēlētāji savā starpā spēlē augstākais vienu reizi. Pašreiz ir notikusi 51 spēle. Pierādīt: noteikti var atrast tādus trīs spēlētājus A, B un C, ka savā starpā jau ir spēlējuši gan A ar B, gan B ar C, gan C ar A.

9. Maija iedomājusies trīs viencipara naturālus skaitļus x, y un z. Katrīna var viņai pateikt trīs savus iedomātus veselus skaitļus a, b un c (tie var arī nebūt viencipara) un lūgt, lai Maija pasaka summas $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$ vērtību. Vai Katrīna var izvēlēties skaitļus a, b, c tā, lai, dzirdot Maijas atbildi, viņa varētu noskaidrot gan x, gan y, gan z vērtību?

10. Tabula sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt vienu no burtiem A; B; C; D un vienu no cipariem 1; 2; 3; 4 tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:

a) katrā rindā, katrā kolonnā un katrā no abām diagonālēm sastopami gan visi četri burti, gan visi četri cipari,

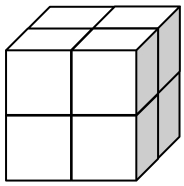
b) katrs burts un katrs cipars abi kopā sastopami tieši vienā rūtiņā?

"Profesora Cipariņa klubs" 2008./09.m.g.

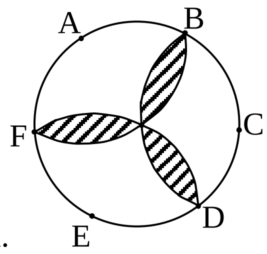
3.nodarbības uzdevumi

1. Vai pastāv 2 viens otram sekojoši naturāli skaitļi, katram no kuriem ciparu summa dalās ar 11?
Vai pastāv 3 tādi viens otram sekojoši naturāli skaitļi?

2. Vai var apstaigāt visas kuba virsotnes, ejot tikai pa kuba šķautnēm un nevienā vietā neesot vairāk kā vienu reizi? (Tas, starp citu, nozīmē, ka maršruta sākums ir citur nekā maršruta beigas.)
Vai var tā apstaigāt visas kuba virsotnes un visus skaldņu centrus, ja drīkst iet pa kuba šķautnēm un pa „krustiem", kas sadala katru skaldni tā, kā parādīts 1.zīm.?



1.zīm.



2.zīm.

3. Vai eksistē tādi 3 cipari, kas visi atšķiras no nulles un ar kuru palīdzību var pierakstīt bezgalīgi daudzus naturālu skaitļu kvadrātus? (Par kvadrātiem sauc skaitļus 1; 4; 9; 25; ..., t.i., skaitļus, ko iegūst, kādu naturālu skaitli reizinot pašu ar sevi.)

4. Katrīna izvēlējās kādu naturālu skaitli un vienu no tā dalītājiem, pieskaitīja dalītājam 10, iegūto summu pareizināja ar 5 un rezultātu atņēma no iedomātā skaitļa. Rezultātā Katrīna ieguva skaitli 1. Kāds varēja būt Katrīnas iedomātais skaitlis?

5. Ja *x* un *y* – cipari, pie tam $x \neq 0$, tad ar $\overline{xy}$ saprotam divciparu skaitli, kura desmitu cipars ir *x*, bet vienu cipars ir *y*. Vai var pastāvēt vienādība $\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} = \overline{cb} \cdot \overline{ba} \cdot \overline{ac}$, ja *a*, *b*, *c* ir dažādi nenulles cipari?

6. Dots, ka *n* ir naturāls skaitlis, $n > 1$. Katram naturālam skaitlim no $3n+1$ līdz $4n$ ieskaitot aprēķināja tā apgriezto lielumu. Pierādīt, ka visu apgriezto lielumu summa ir lielāka par $\frac{1}{4}$.

7. Plaknē atzīmēti vairāki punkti; Andris izmērīja attālumu starp katriem diviem no tiem. Daži no Andra iegūtajiem rezultātiem bija 1*m*; 2*m*; 4*m*; 8*m*; 16*m*; 32*m*; 64*m*; 128*m*. Kāds ir mazākais iespējamais atzīmēto punktu daudzums?

8. Uz riņķa līnijas atzīmēti 6 punkti, kas to sadala 6 vienādos lokos. Novilkti 3 loki, kuru centri ir punktos *A*; *C*; *E*, bet rādiusi vienādi ar riņķa līnijas rādiusu (sk. 2.zīm.). Vai neiesvītroto daļu var sagriezt 6 gabalos, no kuriem visiem iespējams salikt kaut kādu taisnstūri? Saliekot gabali nedrīkst pārklāties, un taisnstūra iekšpusē nedrīkst palikt tukšas vietas.

9. Septiņi rūķīši, kas dzīvo kopā ar Sniegbaltīti, visi ir gan dažāda auguma, gan dažāda svara. Rūķīti sauc par **lielu**, ja, salīdzinot to ar jebkuru citu rūķīti *A*, viņš ir vai nu garāks, vai smagāks par *A* (vai arī gan garāks, gan smagāks). Rūķīti sauc par **mazu**, ja, salīdzinot to ar jebkuru citu rūķīti *B*, viņš ir vai nu īsāks, vai vieglāks par *B* (vai arī gan īsāks, gan vieglāks).
Rūķītis Gudrītis ievēroja, ka katrs no viņa sešiem biedriem ir vienlaicīgi gan liels, gan mazs. Pierādīt: arī Gudrītis ir vienlaicīgi gan liels, gan mazs.

10. Andris, Maija un Katrīna sastādīja mājas dežūru plānu Ziemassvētku nedēļai:
A, AM, M, MK, MKA, KA, K.

Ievērosim, ka katrās divās viena otrai sekojošās dienās dežurantu grupas atšķiras viena no otras tieši par 1 bērnu un nekādas divas grupas nav vienādas.
Ja viņiem pievienotos vēl Imants un Zane, vai plānu ar līdzīgām īpašībām varētu sastādīt visam decembrim?

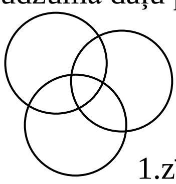
"Profesora Cipariņa klubs" 2008./09.m.g.

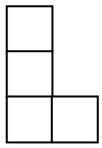
4.nodarbības uzdevumi

1. Vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus. Zināms, ka skaitlis *ASS* dalās ar 5, bet nedalās ar 4. Vai *OLA* var dalīties ar 5?

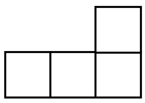
2. Parādiet, ka kvadrātu var sagriezt šaurleņķu trijstūros. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

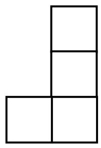
3. Trīs riņķa līnijas 1.zīmējumā sadala plakni 8 apgabalos (ieskaitot arī ārējo apgabalu).
Kādā lielākajā daudzumā daļu plakni var sadalīt četras riņķa līnijas?


1.zīm.


2.zīm.

4. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu mazāko rūtiņu skaitu var nokrāsot melnas tā, lai katrs no 4 rūtiņām sastāvošs „L burts" (skat. 2.zīm.) saturētu vismaz vienu melnu rūtiņu?
Piezīme: „L burts" var būt pagriezts (skat., piem., 3.zīm.), bet nevar būt apgriezts „uz mutes" (skat., piem., 4.zīm.).


3.zīm.


4.zīm.

5. Doti 6 punkti, no kuriem nekādi 3 neatrodas uz vienas taisnes. Katri divi punkti savienoti ar taisnes nogriezni. Katrs nogrieznis nokrāsots vai nu balts, vai melns.

c) Pierādīt, ka eksistē trijstūris ar visām virsotnēm dotajos punktos, kam visas malas nokrāsotas vienā un tai pašā krāsā,

d) vai var būt, ka šāds trijstūris ir tikai viens?

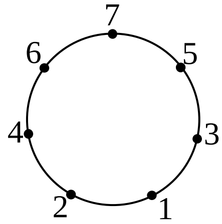
6. Andris sadalīja piecus dažādus pozitīvus skaitļus divās daļās tā, ka abu daļu summas iznāca vienādas savā starpā. Vai var gadīties, ka Maija sadala šos pašus skaitļus **citās** divās daļās ar tādu pašu īpašību?

7. Dots, ka *a*, *b* un *c* – trīs dažādi racionāli skaitļi. Pierādīt, ka skaitlis

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

ir kāda racionāla skaitļa kvadrāts.

8. Septiņi punkti sadala riņķa līniju 7 vienādās daļās; dalījuma punktos ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 7, kā parādīts 5.zīm.



5.zīm.

Ievērosim: ja novilksim apskatāmo 7 punktu sistēmai jebkuru simetrijas asi, tad vienā pusē no šīs ass katrs skaitlis ir lielāks par tam simetrisko skaitli otrā pusē.
Vai skaitļus var ierakstīt arī citādā secībā, lai šī īpašība saglabātos?

9. Kvadrāts sastāv no 10×10 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrīna un Maija pamīšus ieraksta rūtiņās dažādus naturālus skaitļus no 1 līdz 100. Sāk Katrīna. Kad visas rūtiņas aizpildītas, katrā no 10 rindiņām atrod mazāko ierakstīto skaitli. Ja desmit atrasto skaitļu summa ir nepāra skaitlis, uzvar Maija; ja tā ir pāra skaitlis, uzvar Katrīna.

Kura no meitenēm uzvar, pareizi spēlējot?

10. Sastādiet paši jaunu uzdevumu, kas satur skaitli 2009, un līdz ar atrisinājumu atsūtiet to mums.

"Profesora Cipariņa klubs" 2008./09.m.g.

5.nodarbības uzdevumi

1. Kubs sagriezts $1\,000\,000$ mazākos vienādos kubiņos. Cik reizes visu šo mazo kubiņu kopējā virsma lielāka par sākotnējā kuba virsmu?

2. Kādiem naturāliem skaitļiem *x*, *y* un *z* pastāv vienādība

$$1-\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}\ ?$$

3. Naturālam simtciparu skaitlim *a* viens cipars atšķiras no 5, bet visi citi 99 cipari ir piecinieki. Vai skaitlis *a* var būt kāda naturāla skaitļa kvadrāts?

4. Ēdnīcā satikās 7 profesori un konstatēja, ka viņiem kopā ir tieši viens lats, bet naudas daudzumi visiem ir atšķirīgi. Pierādīt: trim bagātākajiem profesoriem kopā ir vismaz 50 santīmu.

5. Vai taisnstūri var sadalīt ar taisnām līnijām 7 taisnstūros tā, lai nekādi 2, nekādi 3, ..., nekādi 6 dalījumā radušies taisnstūri kopā neveidotu taisnstūri?

6. Dots, ka *a*, *b*, *c*, *d* – pozitīvi skaitļi un $a+b+c+d=1$. Pierādīt, ka

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{ad}{a+d}+\frac{bc}{b+c}+\frac{bd}{b+d}+\frac{cd}{c+d}\le\frac{3}{4}.$$

7. Cik ir tādu trīsciparu skaitļu, kuru ciparu summa dalās ar

a) 2, b) 26, c) 3?

8. Labajai fejai jāsagatavo burvju eliksīrs, kas jāvāra tieši 15 minūtes, bet viņai nav pulksteņa. Toties viņai ir maģisku zariņu kaudzīte.
Katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves un ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var uzvārīt eliksīru?

9. Alnim bija 3 kastītes ar bumbiņām (kastīšu saturu nav iespējams redzēt). Kastītē, uz kuras bija rakstīts MM, bija 2 melnas bumbiņas, MB – melna un balta bumbiņa, BB – 2 baltas bumbiņas. Ļaunais Ūdrs uzrakstus samainīja tā, ka nevienai kastītei nepalika iepriekšējais uzraksts. Alnis drīkst no kastītēm ņemt ārā pa vienai bumbiņai un paskatīties, kāda tai krāsa. Kāds ir mazākais bumbiņu skaits, kas Alnim jāizņem, lai noteikti uzzinātu, kādas bumbiņas tagad ir katrā kastītē?

10. Katrā lodes virsmas punktā dzīvoja viens muriburis (katrā cits). Kādu dienu viņi visi sadomāja pārcelties uz dzīvi plaknē. Vai var gadīties, ka attālums starp katriem diviem muriburiem palika tāds pats, kāds tas bija pirms pārcelšanās?

"Profesora Cipariņa klubs" 2008./09.m.g.

6.nodarbības uzdevumi

1. Profesors Cipariņš, rakstot savu jauno grāmatu, nopirka 25 flomāsterus (visi maksāja vienādi). Viņš samaksāja pavisam tik latu, cik flomāsteru var nopirkt par vienu latu. Cik maksāja viens flomāsters?

2. Visiem astoņstūriem ir kaut kas kopīgs: katram no tiem ir 8 virsotnes un 8 malas. Kubam ir 8 virsotnes, 12 šķautnes un 6 skaldnes, kas visas ir četrstūri.

Vai ir tāds ķermenis, kuram arī ir 8 virsotnes, 12 šķautnes un 6 skaldnes, bet ne visas tā skaldnes ir četrstūri?

3. Dota taisne t un punkts A ārpus tās. Vai var uzzīmēt perpendikulu no punkta A pret taisni t, izmantojot tikai cirkuli un lineālu, pie tam pavisam drīkst novilkt tikai trīs līnijas (meklējamais perpendikuls ir viena no šīm līnijām)?

4. Vai eksistē slēgta lauzta līnija, kas katru savu posmu krusto tieši vienu reizi, pie tam visas šīs krustošanās notiek taisnos leņķos?

5. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām; vidējā rūtiņa ir izgriezta. Griežot pa rūtiņu līnijām, atlikusī daļa jāsagriež 4 vienādos gabalos. Pacentieties atrast iespējami daudz dažādu veidu, kā to izdarīt. (Nav jāmēģina pierādīt, ka citu veidu bez jūsu atrastajiem nav.).

6. Atrisināt vienādojumu

$$\frac{5}{x+5}+\frac{20}{(x+5)(x+4)}+\frac{60}{(x+5)(x+4)(x+3)}+\frac{120}{(x+5)(x+4)(x+3)(x+2)}+$$

$$+\frac{120}{(x+5)(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)}=2009$$

7. Profesoram Cipariņam uzdāvināja 7 zelta monētas. Viņš zina, ka viena no tām patiesībā sver 11g, viena – 12g, ..., viena – 17g. Uz vienas monētas arī rakstīts „11g", uz vienas - „12g" utt. Cipariņš vēlas noskaidrot, vai **visi** uzraksti ir pareizi (ja kāds ir nepareizs, viņam nav svarīgi, kurš, vai cik tādu nepareizu uzrakstu ir). Viņa rīcībā ir svari, uz kuriem var uzlikt vai nu vienu, vai vienlaicīgi divas monētas un kuri pareizi norāda uzlikto smagumu. Kā Cipariņam ar 4 svēršanām noskaidrot vajadzīgo?

8. Naturāla skaitļa A ciparu summa ir 20, bet naturāla skaitļa B ciparu summa ir 25. Vai skaitļa A+B ciparu summa var būt a)45, b)54, c)22, d)9?

9. Laboratorijā ir 5 dažādas iekārtas. Tajā strādā 8 līdzstrādnieki, bet katru dienu darbā ierodas tikai 5 no viņiem (iepriekš nav zināms, kuri; pārējie iet uz bibliotēku). Apmācīt vienu līdzstrādnieku darbam ar vienu iekārtu maksā 1000 latu. Ar kādām mazākajām apmācības izmaksām var panākt, lai katru dienu varētu darbināt visas 5 iekārtas? Viens cilvēks vienlaicīgi var strādāt tikai uz vienas iekārtas.

10. Kāds ir lielākais daudzums pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu, kas katrs lielāks par 1 un sadalās ne vairāk kā 3 pirmskaitļu reizinājumā? (Pirmskaitļus uzskaitām ar atkārtojumiem; piemēram, $12=2\cdot 2\cdot 3$ sadalās triju pirmskaitļu reizinājumā.)