2009./2010. mācību gads

1.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Skaitli 5 var iegūt, piemēram, šādi:

$$1:(2:3:4:5):6\,.$$

Skaitli 2 iegūt nevar. Dalīšanās piedalās skaitļi, kas kopā kā reizinātājus satur četrus pirmskaitļus 2:, skaitļi 2 un 6 – pa vienam, skaitlis 4 – divus. Iekavu salikšanas rezultātā šie pirmskaitļi 2 nonāk vai nu skaitītājā, vai saucējā. Lai izteiksmes vērtība būtu 2, skaitītājā pirmskaitļu 2 jābūt par vienu reizinātāju vairāk nekā saucējā. Tā kā to pavisam ir četri – pāra skaits, tas nav iespējams.

2. Andris un Maija kopā saņēma par vienu atlaidi vairāk nekā Katrīna. Tāpēc šīs atlaides lielums ir $14-(8+5)=1$ lats.

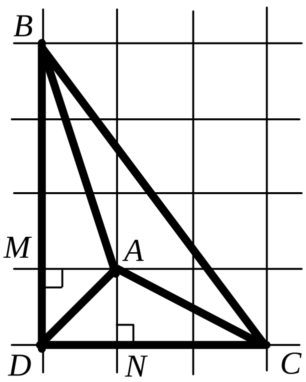
3. Skat., piem., 1.zīm.

1	3	5	4	2
2	4	1	5	3
4	1	3	2	5
3	5	2	1	4
5	2	4	3	1

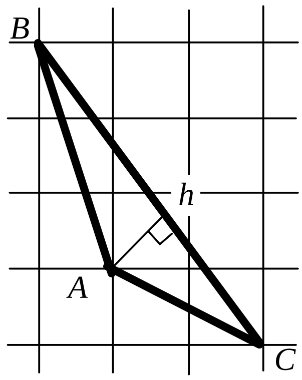
1. zīm.

4. Skaidrs, ka skaitlis $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot...\cdot2009$ dalās ar 9, jo satur 9 kā reizinātāju. Tāpēc tā ciparu summa arī dalās ar 9. tāpēc šīs ciparu summas ciparu summa arī dalās ar 9, utt. – ar 9 dalās visi iegūtie skaitļi, tātad arī pēdējais viencipara skaitlis. Vienīgie viencipara skaitļi, kas dalās ar 9, ir 0 un 9. tā kā visi iegūtie skaitļi ir pozitīvi, tad beigās iegūtais skaitlis nav 0. Tātad tas ir 9.

5. Apskatām 2.zīm.



2.zīm.



3.zīm.

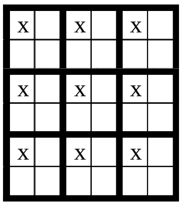
Figūra BDC ir taisnleņķa trijstūris; tās laukums $L(BDC)=\frac{1}{2}BD\cdot DC=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6=24$. Trijstūru BAD un CAD laukumi ir attiecīgi $\frac{1}{2}BD\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2=8$ un $\frac{1}{2}DC\cdot AN=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2$. Tāpēc trijstūra BAC laukums ir $24-8-6=10$.

No Pitagora teorēmas seko, ka $BC^2=BD^2+DC^2=8^2+6^2=64+36=100$, tāpēc $BC=10$. Apzīmēsim attālumu no punkta A līdz nogrieznim BC ar h (skat. 3.zīm.). Tad h ir trijstūra ABC tā augstuma garums, kas novilkts pret malu BC. Tāpēc $L(ABC)=\frac{1}{2}BC\cdot h$. No šejienes seko, ka $10=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot h$ un $h=2$.

6. Atbilde: 1, 2, 3 vai 4.

Risinājums. Ja A ir melis un patiesībā B neko nav teicis, tad B, C, D var būt patiesi vai meļi jebkurā kombinācijā, un tas nav pretrunā ar uzdevumā aprakstīto. Tātad meļu skaits var būt 1; 2; 3; 4. Nevar būt, ka nav neviena meļa, t.i., ka visi rūķīši ir patiesi, jo tad A, B, C, D paziņojumi visi būtu patiesi, bet no D paziņojuma seko, ka A ir melis – pretruna.

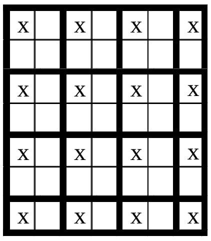
7. a) 9 rūtiņas.



4.zīm.

Piemēru ar 9 rūtiņām skat. 4.zīm. tā kā nevienā 2×2 rūtiņu kvadrātā nedrīkst nokrāsot vairāk par vienu rūtiņu un šādu kvadrātu 4. zīmējumā pavisam ir 9, tad nokrāsoto rūtiņu nevar būt vairāk par 9.

b) 16 rūtiņas.



5.zīm.

Piemēru ar 16 rūtiņām skat. 5.zīm. Tā kā nevienā no 16 daļām, kurās sadalīts 5 zīm. Redzamais kvadrāts, nedrīkst nokrāsot vairāk par vienu rūtiņu, tad nokrāsoto rūtiņu nevar būt vairāk par 16.

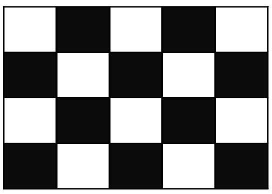
8. a) nē. **Vislielākā** iegūstamā izteiksmes vērtībatiks sasniegta, lietojot tikai „+” zīmes. Tā ir $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$. Bet $55<2009$.

b) jā, piemēram:

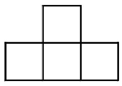
$$1+2+3+4-5-6-7+8-9+10=1.$$

c) nē. No uzrakstītajiem skaitļiem 5 ir pāra un 5 (nepāra daudzums) nepāra. Tāpēc izteiksmes vērtība vienmēr iznāks nepāra skaitlis un nevar būt 2.

9. Nē. Izkrāsosim taisnstūra rūtiņas šaha galdiņa kārtībā (skat. 6.zīm.). Pavisam ir 10 baltas un 10



6.zīm.

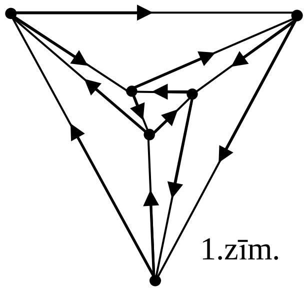
melnas rūtiņas – **vienādi daudzumi**. Figūrā  melno un balto rūtiņu daudzumi atšķiras, bet pārējās figūrās tie ir vienādi. Tāpēc, ja prasītā sagriešana būtu iespējama, visās figūrās kopā melno rūtiņu skaits **atšķirtos** no balto rūtiņu skaita. Tā ir pretruna.

10. Labākos Jūsu iesūtītos uzdevumus publicēsim kādā no nākošajām kluba nodarbībām.

2009./2010. mācību gads

2.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Jā, var. Skat., piem., 1.zīm.



1.zīm.

2. Ja daļas skaitītājs un saucējs ir pozitīvi skaitļi, tad, palielinot saucēju, daļas vērtība samazinās. Pieskaitām pirmajai daļai saucējā *a*, otrajai *b*, trešajai *c*, ceturtajai *d*. Tad iegūstam

$$\frac{a+b}{b+c+d}+\frac{b+c}{c+d+a}+\frac{c+d}{d+a+b}+\frac{d+a}{a+b+c}>$$
$$>\frac{a+b}{b+c+d+a}+\frac{b+c}{c+d+a+b}+\frac{c+d}{d+a+b+c}+\frac{d+a}{a+b+c+d}=$$
$$=\frac{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)}{a+b+c+d}=\frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=2\text{, k.b.j.}$$

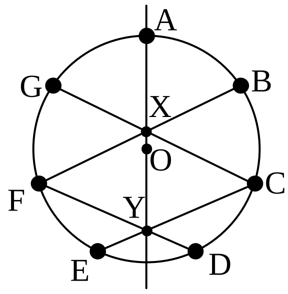
3. Divciparu naturāli skaitļi, kas dalās ar vismaz 3 dažādiem pirmskaitļiem un nesatur 0, ir $2\cdot3\cdot7=42$, $2\cdot3\cdot11=66$, $2\cdot3\cdot13=78$, $2\cdot2\cdot3\cdot7=84$. Neviens no pirmajiem 50 cipariem nevar būt 2 (jo tad nākošā cipara vispār nevarētu būt), nevar būt 4 (jo tad nākošais būtu 2 un aiznākošā vispār nevarētu būt); tāpat tas nevar būt 8 vai 7. Tāpēc visi pirmie 50 cipari var būt tikai 6.
Skaitlis, kas sastāv tikai no sešiniekiem, apmierina uzdevuma prasības. Tāpēc meklētais cipars ir 6.

4. Atbilde: a) nē, nevar; **b)** jā, var.
Risinājums. a) Pieņemsim, ka tādi skaitļi eksistē, un apzīmēsim tos ar $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7<a_8<a_9$.
Pēc dotā $a_1\geq1$. Jābūt $a_2>1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$; tā kā a_2 naturāls, tad no $a_2>\frac{3}{2}$ seko $a_2\geq2$. Tā kā $a_3>\frac{3}{2}\cdot a_2$, tad $a_3>\frac{3}{2}\cdot2=3$. Tā kā a_3 naturāls, tad jābūt $a_3\geq4$. Jābūt $a_4>\frac{3}{2}\cdot a_3>\frac{3}{2}\cdot4=6$; tā kā a_4 ir naturāls, tad jābūt $a_4\geq7$. Līdzīgi iegūstam $a_5\geq11$, $a_6\geq17$, $a_7\geq26$, $a_8\geq40$, $a_9\geq61$. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs.
b) Tādi ir, piemēram, augošā secībā izvietoti skaitļi

$$1;\quad \frac{8}{5};\quad \frac{5}{2};\quad 4;\quad \frac{31}{5};\quad \frac{19}{2};\quad 15;\quad 23;\quad 35.$$

Katrs nākošais ir vairāk nekā 1,5 reizes lielāks par iepriekšējo.

5. Minēto 7 punktu sistēma ir simetriska attiecībā pret diametru *AO* (*O* – riņķa centrs). Tāpēc nogriežņi *BF* un *GC* krustojas punktā *X*, kas atrodas uz šī diametra. Līdzīgi nogriežņi *CE* un *FD* krustojas punktā *Y*, kas atrodas uz šī diametra. Atrodam punktus *X* un *Y* un caur tiem novelkam diametru, kas iet caur punktu *A*. Pēc tam līdzīgi konstruējam diametru, kas iet caur punktu *B*. Abu diametru krustpunkts ir riņķa centrs.



2.zīm.

6. Nē, tā nevar būt. Apzīmēsim „pārējās” rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas attiecīgi ar r_1, r_2, k_1, k_2, bet visu tabulā ierakstīto skaitļu summu ar *S*. Tad jābūt

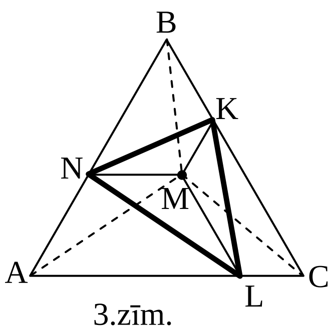
$S = 2009 + r_1 + r_2$ un

$S = 2010 + k_1 + k_2$, tāpēc

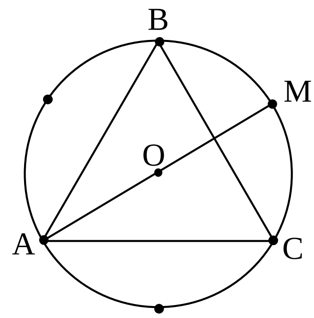
$2009 + r_1 + r_2 = 2010 + k_1 + k_2$, no kurienes seko $r_1 + r_2 - k_1 - k_2 = 1$.

Tā kā r_1, r_2, k_1, k_2 dalās ar 3, tad arī izteiksme $r_1 + r_2 - k_1 - k_2$ dalās ar 3; bet 1 ar 3 nedalās. Tāpēc apskatāmā situācija nav iespējama.

7. a) Novelkam caur punktu *M* taisnes paralēli *ABC* malām; tās krusto šīs malas atbilstoši punktos *N*, *K*, *L* (skat. 3.zīm.).



3.zīm.



4.zīm.

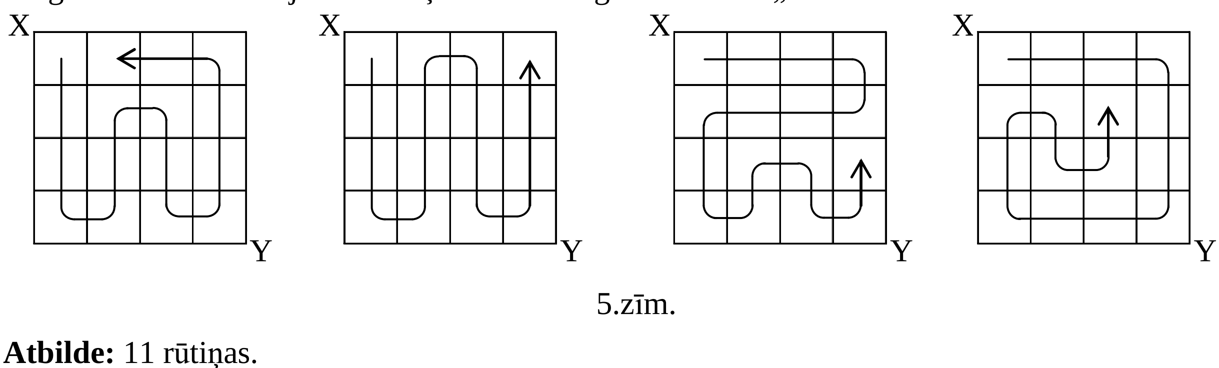
Tad $\angle MLA = \angle BCA$ (kāpšļu leņķi), tāpēc $\angle MLA = \angle NAL$. Tāpēc trapece *ANML* ir vienādsānu trapece. Vienādsānu trapeces diagonāles ir savā starpā vienādas, tāpēc $MA = NL$. Līdzīgi pierāda, ka $MB = NK$ un $MC = KL$. Tātad trijstūris *NKL* ir meklējamais.

b) Ne vienmēr. Apskatīsim riņķa līnijā ar rādiusu *R* ievilktu vienādmalu trijstūri *ABC* un ņemsim *M* kā loka *BC* viduspunktu. Tad $MA = 2R$, $MB = R$, $MC = R$ (skat. 4.zīm.).

Tātad ***MB* + *MC* = *MA***. Bet mēs zinām, ka katrā trijstūrī jebkuru divu malu summa ir **lielāka** par trešo malu. Tāpēc trijstūris, kura malu garumi būtu *MA*, *MB* un *MC*, nav iespējams.

8. Ar katru gājienu skudra pāriet uz citas krāsas lauciņu nekā tas, kurā tā atradās pirms gājiena. Tāpēc pēc 15 gājieniem skudra noteikti atradīsies uz **melnā** lauciņa.

Tālāk sekojošos zīmējumos parādīts, kā skudra var beigt savu ceļu melnajos lauciņos virs diagonāles *XY*. Risinājums lauciņiem zem diagonāles *XY* ir „simetrisks”.



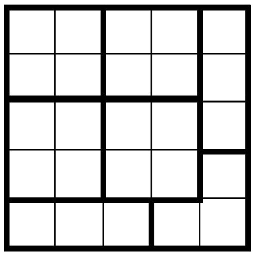
5.zīm.

9. Atbilde: 11 rūtiņas.

Risinājums. Tas, ka ar 11 rūtiņu izgriešanu pietiek, redzams 6.zīm.

		x		
x	x		x	x
		x		
x	x		x	x
		x		

6.zīm.



7zīm.

Lai pierādītu, ka ar mazāk rūtiņu izgriešanu nepietiek, skat. 7.zīm. Skaidrs, ka katrā apgabalā gar kvadrāta apakšējo un labo malu jāizgriež vismaz viena rūtiņa. Savukārt katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā jāizgriež vismaz 2 rūtiņas; izgriežot tikai vienu, atlikušās 3 rūtiņas veidos „stūrīti”. Atliek ievērot, ka $1+1+1+8=11$.

10. Reizinot skaitli *n* ar 5, notiek sekojošais:

a) reizinot ciparu 0 ar 5, iegūst 0; pārnesuma nav;
b) reizinot ciparu 1 ar 5, iegūst 5; pārnesuma nav;
c) reizinot ciparu 2 ar 5, iegūst 10; rezultātā raksta 0, bet 1 pārnes uz nākošo šķiru. Tātad ciparu summā saskaitāmā „$2 \cdot 5$” vietā iekļaujas saskaitāmais 1; starpība starp tiem ir 9.

Redzam, ka $5n$ ciparu summa ir par $9 \cdot k$ mazāka nekā skaitlis $S \cdot 5$, kur *S* – skaitļa *n* ciparu summa, bet *k* – reizināšanā „5 reiz *n*” notikušo pārnesumu skaits. Tātad $S \cdot 5 = 2009 + 9 \cdot k$ un $S = 402 + 2k - \frac{k+1}{5}$.

Tā kā *S* – naturāls skaitlis, tad $k+1$ jādalās ar 5. Tāpēc $k = 5t - 1$, *t* – naturāls, un $S = 402 + 2(5t-1) - t = 400 + 9t$, ja reizināšanā „5 reiz *n*” ir $5t-1$ pārnesumi. Tā kā katrs pārnesums notiek cipara 2 dēļ, tad *n* ciparu summa ir **400 + 9*t*, ja skaitlī *n* ir 5*t* – 1 divnieki, *t* – naturāls skaitlis.**

Piemēram, pie $t=1$ der $n = \underbrace{11...1}_{401}2222$; tad $5n = \underbrace{55...5}_{400}61110$. Līdzīgi konstruē piemērus pie *t* = 2; 3; ...; 402.

Tā kā skaitlī *n* ir $(400+9t) - 2(5t-1) = 402 - t$ vieninieku (un patvaļīgs skaits nuļļu), tad jābūt ***t* ≤ 402.**

2009./2010. mācību gads

3.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Viegli pārbaudīt, ka $14538 \times 2 = 29076$. Tātad par meklējamajiem skaitļiem der, piemēram, 14538 un 29076.

2. Izmantosim sekojošu pakāpju īpašību. (Runāsim tikai par pakāpēm, kam gan bāze, gan kāpinātājs ir naturāli skaitļi, kas lielāki par 1.)
Ja kāpinātāji ir vienādi, tad lielāka tā pakāpe, kurai lielāka bāze.
Šī īpašība mums ļauj salīdzināt uzdevumā minētās pakāpes ar citām pakāpēm un rezultātā – arī savā starpā.
Vispirms atzīmēsim, ka $\mathbf{15^{15} < 16^{15}}$ (pēc īpašības, jo 15 < 16).
Tālāk ievērojam, ka $\mathbf{8^{20} < 9^{20}}$ (pēc īpašības, jo 8 < 9).
Skaitļus 16^{15} un 8^{20} salīdzināsim, izsakot tos abus kā divnieka pakāpes:

$$16^{15} = (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)^{15} = \underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{15 \textit{ reizes grupa } 2\cdot2\cdot2\cdot2} =$$

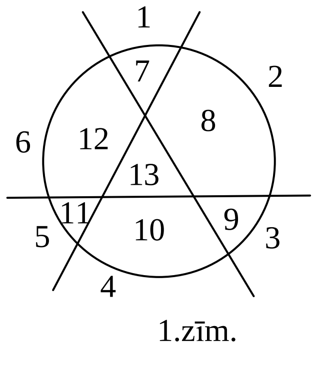
$$= \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{15\cdot 4 \textit{ reizes skaitlis } 2} = \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{60 \textit{ reizes skaitlis } 2} = \underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(2\cdot 2\cdot 2)}_{20 \textit{ reizes grupa } 2\cdot2\cdot2} = \underbrace{8\cdot\ldots\cdot 8}_{20 \textit{ reizes skaitlis } 8} = 8^{20}.$$

Tātad $16^{15} = 8^{20}$, un iegūstam

$15^{15} < 16^{15} = 8^{20} < 9^{20}$, tātad $\mathbf{15^{15} < 9^{20}}$,

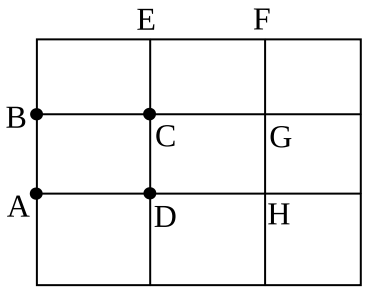
ko arī vajadzēja noskaidrot.

3. Atceramies, ka divām taisnēm ir vai nu viens, vai neviens kopējs punkts. Novelkot vienu taisni, tā sadala plakni 2 apgabalos. Novelkot vēl otru taisni, uz tās rodas vai nu neviens, vai viens krustpunkts ar pirmo; tātad otrā taisne vai nu sadalās divos gabalos (staros), vai arī paliek kā viens nedalīts gabals. Katrs no šiem gabaliem sadala vienu no pirmās taisnes veidotajiem apgabaliem divos jaunos apgabalos; tātad apgabalu skaits aug par 2 vai 1, un tas ir 4 vai 3.
Līdzīgi, novelkot trešo taisni, tā ar jau novilktajām taisnēm sadalās 3, 2 vai 1 gabalā (atkarībā no tā, vai uz tās rodas 2, 1 vai neviens krustpunkts). Katrs gabals sadala vienu no divu taišņu veidotajiem apgabaliem divos jaunos. Tātad apgabalu skaits palielinās par 3, 2 vai 1 un tātad nav lielāks par 4 + 3 = 7.
Novelkot riņķa līniju, uz tās rodas ne vairāk par 6 kopīgiem punktiem ar kādu no 3 taisnēm (ne vairāk par diviem ar katru). Tātad riņķa līnija sadalās ne vairāk kā 6 lokos. Katrs loks sadala kādu no triju taišņu veidotajiem apgabaliem divos jaunos apgabalos; tātad apgabalu skaits palielinās ne vairāk kā par 6, un tas nevar būt lielāks par 7 + 6 = 13.
Tas, ka 13 apgabali ir iespējami, redzams 1.zīm.



1.zīm.

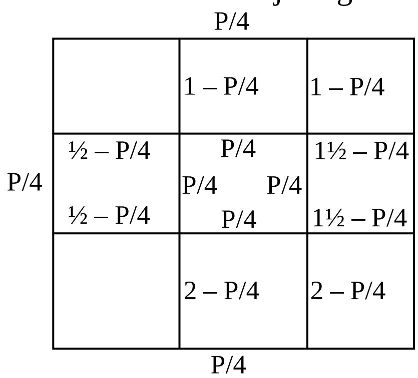
4. Atbilde: vidējā taisnstūra perimetrs var būt jebkurš pozitīvs skaitlis, kas mazāks par 3, un nevar būt citāds.
Risinājums. Tā kā perimetrs (četru malu garumu summa) vienmēr ir pozitīvs, tad tas nevar būt ne 0, ne negatīvs. Pierādīsim, ka tas noteikti mazāks par 3.



2.zīm.

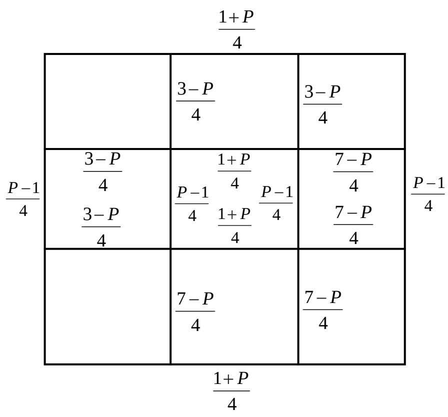
Saskaņā ar doto $AB + BC + CD + DA = 1$. Tā kā $AB = CD$ un $BC = DA$, iegūstam $2 \cdot CD + 2 \cdot BC = 1$ un $CD = \frac{1}{2} - BC$. Tā kā $BC > 0$, tad $CD < \frac{1}{2}$; tāpēc arī $\boldsymbol{GH < \frac{1}{2}}$ (jo taisnstūra pretējās malas ir vienādas).
Līdzīgi no $CE + EF + FG + GC = 2$ iegūstam, ka **CG < 1** un tāpēc arī **DH < 1**. No izceltajām nevienādībām seko, ka vidējā taisnstūra perimetrs ir mazāks par $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = 3$, kas arī bija jāpierāda.
Tagad pierādīsim uzdevuma otro daļu – pierādīsim, ka katrs skaitlis *P*, kas apmierina sakarību 0 < *P* < 3, atbilstoši izveidotā zīmējumā **var būt** vidējā taisnstūra perimetrs.
Mēs šķirojam divus gadījumus:

I Skaitlis *P* apmierina sakarību 0 < *P* < 2. Vajadzīgais taisnstūris redzams 3.zīm.



3.zīm.

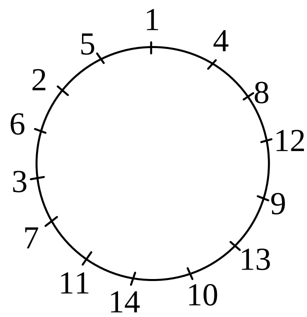
II Skaitlis *P* apmierina sakarību $2 \le P < 3$. Tad iepriekšējā konstrukcija neder, jo $\frac{1}{2} - P/4 \le 0$, kas nedrīkst būt. Tādā gadījumā veidojam 4.zīm.



4.zīm.

Lasītājs pats var pārbaudīt, ka visi uzdevuma nosacījumi apmierināti. Iespējami arī daudzi citi piemēri.

5. Skat., piem., 5.zīm.



5.zīm.

6. Tā var sadalīt **jebkurus 8** pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Tiešām, apzīmēsim tos ar $x+1$; $x+2$; $x+3$; ...; $x+7$; $x+8$ un izveidosim grupas A un B:

***A* grupa:** $x+1$; $x+4$; $x+6$; $x+7$;
***B* grupa:** $x+2$; $x+3$; $x+5$; $x+8$.

Grupas A skaitļu summa ir $(x+1)+(x+4)+(x+6)+(x+7)=4x+(1+4+6+7)=$ $=4x+18$, bet grupas B skaitļu summa ir $(x+2)+(x+3)+(x+5)+(x+8)=$ $=4x+(2+3+5+8)=4x+18$; tātad tās ir vienādas.

Savukārt grupas A skaitļu kvadrātu summa ir

$$(x+1)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+7)^2=$$
$$=(x^2+2x+1)+(x^2+8x+16)+(x^2+12x+36)+(x^2+14x+49)=$$
$$=4x^2+36x+102,$$

bet grupas B skaitļu kvadrātu summa ir

$$(x+2)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+(x+8)^2=$$
$$=(x^2+4x+4)+(x^2+6x+9)+(x^2+10x+25)+(x^2+16x+64)=$$
$$=4x^2+36x+102,$$

tātad arī tās ir vienādas.

Ja skaitļi $x+1$; ...; $x+8$ ir attiecīgi 2002; ...; 2009, tad tie atbilstoši augstāk minētajam algoritmam tiek sadalīti grupās (2002; 2005; 2007; 2008) un (2003; 2004; 2006; 2009).

Iesakām lasītājam pamēģināt patstāvīgi pierādīt, ka jebkurus 16 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus var sadalīt divās grupās tā, lai būtu vienādas gan grupās ietilpstošo skaitļu summas, gan to kvadrātu summas, gan to kubu summas. Vai šo rezultātu nevar „attīstīt” vēl tālāk?

7. Lai naturāls skaitlis dalītos ar 33, tam jādalās ar 3 un ar 11.

Atceramies dalāmības pazīmes ar 3 un ar 11:

- ar 3 dalās tie un tikai tie naturālie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3;
- ar 11 dalās tie un tikai tie naturālie skaitļi, kam starpība starp nepāra vietās esošo ciparu summu un pāra vietās esošo ciparu summu dalās ar 11. Piemēram, 3476 dalās ar 11, jo $(3+7)-(4+6)=0$ dalās ar 11, bet 82603 nedalās ar 11, jo $(8+6+3)-(2+0)=17-5=15$ nedalās ar 11.

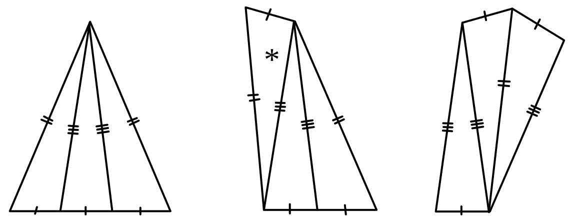
Piemērs 1111110000 parāda, ka meklējamā skaitļa ciparu summa **var būt 6**. No minētās dalāmības pazīmes seko, ka tai jādalās ar 3; tātad, ja tā varētu būt mazāka par 6, tad tai jābūt 3. Pierādīsim, ka tas nav iespējams.

Pieņemsim no pretējā, ka eksistē tāds desmitciparu naturāls skaitlis, kam ciparu summa ir 3 un kas dalās gan ar 3, gan ar 11. Acīmredzot, pastāv tikai 3 iespējas:

a) skaitlī ir viens (pirmais) cipars 3 un deviņas nulles,
b) skaitlī ir viens cipars 1, viens cipars 2 un astoņas nulles,
c) skaitlī ir trīs cipari 1 un septiņas nulles.

Viegli pārbaudīt, ka nevienā no šiem gadījumiem starpība starp nepāra vietās esošo ciparu summu n un pāra vietās esošo ciparu summu p nevar dalīties ar 11. Tiešām, a) gadījumā šī starpība ir 3 – 0 vai 0 – 3, b) gadījumā 1 – 2; 2 – 1; 3 – 0 vai 0 – 3, c) gadījumā $(1+1+1)-0$; $0-(1+1+1)$; $(1+1)-1$ vai $1-(1+1)$. Neviena no šīm vērtībām nedalās ar 11. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un naturāla skaitļa ar ciparu summu 3, kas dalītos ar 33, nav. Tātad mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu naturālam skaitlim, kurš dalās ar 33, ir 6.

8. Tādas situācijas piemērs redzams 6.zīm. Trijstūris, kas apzīmēts ar zvaigznīti, ir „apgriezts uz mutes”.



6.zīm.

9. Apzīmēsim monētu masas no labās uz kreiso pusi ar m_1, m_2, ..., m_{10}. Ar šiem pašiem burtiem apzīmēsim arī pašas monētas. Mēs zinām, ka ir tāds indekss n, ka monētas m_1, m_2, ..., m_n katra sver 8 gramus (sauksim tās par smagām), bet pārējās monētas m_{n+1}, ..., m_{10} katra svar 7 gramus (sauksim tās par vieglām). Mums jāatrod n vērtība.
Pirmajā svēršanā novietojam m_1 un m_{10} uz viena kausa, bet m_4 un m_7 – uz otra. Atceramies, ka m_1 noteikti ir smaga, bet m_{10} noteikti ir viegla. Šķirojam trīs iespējas.

A. Izrādās, ka $m_1+m_{10}>m_4+m_7$. Tas var notikt tikai tad, ja m_4 un m_7 abas ir vieglas. Tad vieglas ir arī monētas m_5, m_6, ..., m_9; tātad vienīgās vēl nenoskaidrotās monētas ir m_2 un m_3. Otrajā svēršanā uz viena kausa atstājam m_1 un m_{10} (smago un vieglo), bet uz otra novietojam m_2 un m_3. Ja $m_1+m_{10}>m_2+m_3$, tad m_2 un m_3 abas ir vieglas. Ja $m_1+m_{10}=m_2+m_3$, tad m_2 ir smaga, bet m_3 ir viegla. Ja $m_1+m_{10}<m_2+m_3$, tad m_2 un m_3 abas ir smagas.

B. Izrādās, ka $m_1+m_{10}<m_4+m_7$. Tad m_4 un m_7 abas ir smagas, un šis gadījums ir „simetrisks” A gadījumam; atstājam to lasītājam izanalizēt patstāvīgi.

C. Izrādās, ka $m_1+m_{10}=m_4+m_7$. Tad m_4 ir smaga, bet m_7 ir viegla; vienīgās vēl nenoskaidrotās monētas ir m_5 un m_6. Otrajā svēršanā uz viena kausa atstājam m_1 un m_{10}, bet uz otra novietojam m_5 un m_6. Triju iespējamo gadījumu analīze ir analoģiska A gadījumā parādītajai.

10. Jūsu vēstules ar 2010.gada tematikai veltītajiem uzdevumiem vēl turpina pienākt. Labākos iesūtītos uzdevumus publicēsim vēlāk.

2009./2010. mācību gads

4.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. a) ievērojam, ka $n^2 - n = n(n-1)$. Ja n – naturāls skaitlis, tad n un n – 1 ir divi viens otram sekojoši veseli skaitļi. Tāpēc viens no tiem ir pāra, bet otrs – nepāra. Pāra skaitļa un nepāra skaitļa reizinājums ir pāra skaitlis. No tā arī seko vajadzīgais.

b) ievērojam, ka $n^3 - n = n(n^2-1) = n\cdot[(n-1)(n+1)] = (n-1)\cdot n\cdot(n+1)$. Ja n – naturāls skaitlis, tad n – 1; n; n + 1 ir **trīs viens otram sekojoši veseli skaitļi.** Tāpēc tieši viens no tiem dalās ar 3 (jo veselo skaitļu virknē katrs trešais skaitlis dalās ar 3). Tāpēc arī to reizinājums dalās ar 3.

Piezīme. Abi minētie apgalvojumi ir ļoti slavenas teorēmas speciālgadījumi.

Fermā mazā teorēma. Ja p – pirmskaitlis un n – naturāls skaitlis, tad $n^p - n$ dalās ar p.
Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt šo teorēmu, ja p = 5 un p = 7.

2. Jā, var. Piemēram, $96432\cdot 1875 = 180810000$.

3. Atbilde: nē, nevar.

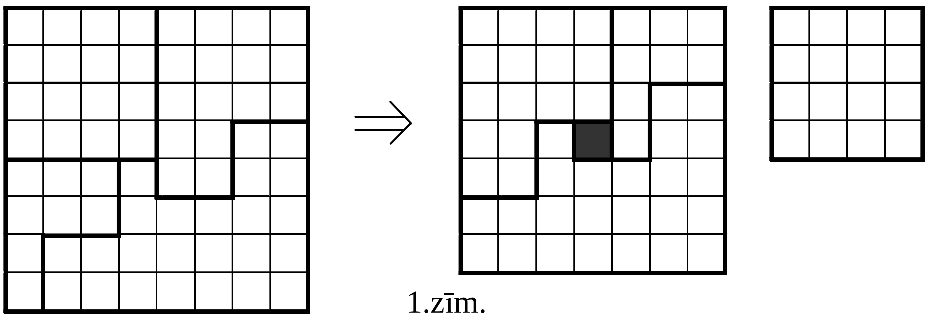
Pierādījums. Pieņemsim, ka naturāla skaitļa n pierakstā kāds no cipariem ir 2. Apskatīsim citu naturālu skaitli n_1, kas no n atšķiras **vienīgi** ar to, ka šī cipara 2 vietā skaitlī n_1 ir cipars 1.
Piemēram, ja n = 13**2**4, tad n_1 = 13**1**4; ja n = 24**2**5 un mēs apskatām otro divnieku n pierakstā, tad n_1 = 24**1**5.
Skaidrs, ka $n_1 < n$. Tātad, ja Jānītis uzraksta skaitli n, tad jau iepriekš viņš uzrakstījis skaitli n_1. Tātad **pirms** katra cipara 2 ir uzrakstīts tam atbilstošais cipars 1. Tāpēc divnieku nekad nevar būt uzrakstīts vairāk nekā vieninieku.

4. Nevienādību var pārveidot par tai līdzvērtīgu (ekvivalentu):

$$(a-c)(x-y)+(b-c)(y-x)>0\,.$$

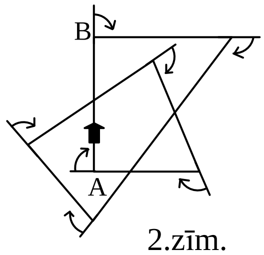
Šīs nevienādības pareizība ir acīmredzama, jo $a-c>0$, $x-y>0$, $b-c>0$ un $y-z>0$.

5. Skat., piem., 1.zīm.



1.zīm.

6. Novietosim uz posma AB bultiņu un bīdīsim to pa lauzto līniju, stūros pagriežoties, kamēr būsim veikuši vienu pilnu „apli" (skat. 2.zīm.).



2.zīm.

Izsekojot bultiņas kustībai, redzam, ka tā kopā pagriezusies par $2 \cdot 360° = 720°$ pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Tātad, ja bultiņas pagrieziena leņķus apzīmējam ar α_1; α_2; ...; α_7, tad $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_7 = 720°$. Tāpēc mūsu apskatāmo lauztās līnijas veidoto leņķu lielumu summa ir:
$(180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + ... + (180° - \alpha_7) = 7 \cdot 180° - (\alpha_1 + ... + \alpha_2) =$
$= 7 \cdot 180° - 4 \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$.

7. Katram iespējama bioloģijas pulciņam *B* atbilst iespējamais matemātikas pulciņš *M*, kas satur tieši tos skolniekus, kas nav iesaistīti pulciņā *B*. Pie tam skaidrs, ka dažādiem *B* atbilst dažādi *M*. Tāpēc bioloģijas pulciņus var izveidot tikpat daudz, cik matemātikas pulciņus.

8. Tā kā abu pirmo kvadrātu malu garumi ir 1 un katru nākošo kvadrātu, sākot ar trešo, zīmē blakus abiem iepriekšējiem, tad kvadrātu malu garumi ir Fibonači skaitļi F_1; F_2; ...; F_n; F_{n+1}; F_{n+2}; ... . Tāpēc visu *n* pirmo kvadrātu kopīgais laukums ir $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2$.
Šie *n* kvadrāti kopā veido taisnstūri, kam vienas malas garums ir F_n, bet otras malas garums ir $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ (pie $n \geq 2$).
Iegūstam, ka pie $n \geq 2$ pastāv vienādība

$$F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \qquad (n \geq 2).$$

9. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim *n* ir *k* naturāli dalītāji; apzīmēsim tos augošā secībā ar $d_1 < d_2 < ... < d_k$ (tātad $d_1 = 1$ un $d_k = n$). Ja *d* – jebkurš no šiem dalītājiem, tad $\frac{n}{d}$ ir naturāls skaitlis (saskaņā ar dalītāja definīciju); apzīmēsim $\frac{n}{d} = e$. Tad $n = d \cdot e$ un tātad $\frac{n}{e} = d$; tā kā *d* – naturāls skaitlis, tad arī *e* ir skaitļa *n* dalītājs. Tāpēc *k* skaitļi $\frac{n}{d_1}$, $\frac{n}{d_2}$, ..., $\frac{n}{d_k}$ visi ir skaitļa *n* naturāli dalītāji.
Tā kā $\frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > ... > \frac{n}{d_k}$, tad tie visi ir **dažādi**; tātad to skaits ir *k*. Bet mēs zinām, ka skaitlim ir **tieši** *k* naturāli dalītāji, un tie ir $d_1; d_2; ...; d_k$.
Tātad skaitļi $\frac{n}{d_1}$; $\frac{n}{d_2}$; ...; $\frac{n}{d_k}$ ir tie paši skaitļi $d_1; d_2; ...; d_k$ (tikai izvietoti dilstošā secībā). Tāpēc skaidrs, ka

$$d_1 + d_2 + ... + d_k = \frac{n}{d_1} + ... + \frac{n}{d_k},$$

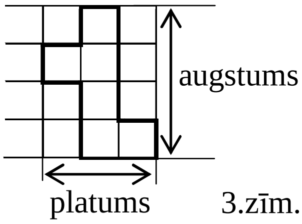
jo summa nav atkarīga no saskaitāmo kārtības.

10. Atbilde: a) nevar, **b)** 24.
Risinājums. a) iedomāsimies, ka skudra rāpo pa daudzstūra kontūru, veicot **vienu pilnu „apli”**. Kustības laikā skudra tikpat garu ceļu gabalu norāpojusi „pa labi”, cik „pa kreisi”, un tikpat garu ceļa gabalu norāpojusi „uz augšu”, cik „uz leju” (jo beigās atrodas turpat, kur sākumā). Tāpēc skudras horizontālā virzienā norāpotais attālums izsakās ar pāra skaitli; tāpat ar pāra skaitli izsakās vertikālā virzienā norāpotais attālums. Tāpēc arī kopējais norāpotais attālums izsakās ar pāra skaitli. Bet 101 nav pāra skaitlis.

b) pierādīsim: ja apskatāmā tipa daudzstūra perimetrs ir *n*, tad tā laukums ir $\frac{n}{2} - 1$.

Ja daudzstūris sastāv no vienas rūtiņas, tad n = 4 un tā laukums ir 1; viegli pārbaudīt, ka $\frac{4}{2}-1=1$.

Pieņemsim, ka dažiem daudzstūriem šī sakarība nav spēkā, un apskatīsim vienu no šādiem daudzstūriem ar vismazāko laukumu; tad šis laukums ir lielāks par 1, jo vienīgais daudzstūris ar laukumu 1 ir viena rūtiņa. Tātad vai nu mūsu daudzstūra „platums”, vai tā „augstums” ir vismaz 2 (skat. 3.zīm.).



3.zīm.

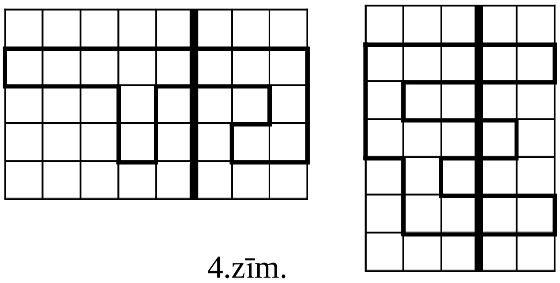
Varam pieņemt, ka „platums” ir vismaz 2.

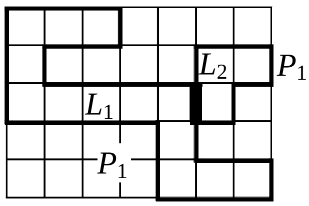
Novelkam vertikālu rūtiņu līniju, kas atrodas starp „kreiso” un „labo” malu (tātad eksistē, jo apskatāmā daudzstūra platums ir vismaz 2). Šī līnija krusto daudzstūri. Tā kā daudzstūra iekšpusē nav rūtiņu virsotņu, tad šī krustošana notiek pa vienu vai vairākiem nogriežņiem ar garumu 1 (skat. 4.zīm.). Izvēlamies **vienu** no šiem nogriežņiem. Tas sadala mūsu apskatāmo daudzstūri divos daudzstūros, kuru laukumi ir mazāki nekā sākotnējam. Apzīmējam šo daudzstūru laukumus attiecīgi ar L_1 un L_2, bet perimetrus attiecīgi ar P_1 un P_2 (skat. 5.zīm.).

Saskaņā ar pieņēmumu par sākotnējā daudzstūra laukumu $L_1=\frac{P_1}{2}-1$ un $L_1=\frac{P_2}{2}-1$.

Tāpēc sākotnējā daudzstūra laukums $L=L_1+L_2=\frac{P_1}{2}-1+\frac{P_2}{2}-1=\frac{P_1+P_2-2}{2}-1$.

Bet P_1+P_2-2 ir sākotnējā daudzstūra perimetrs P (no P_1 un P_2 „jāatskaita” kopīgais nogrieznis ar garumu 1, kas atrodas sākotnējā daudzstūra iekšpusē). Iznāk, ka $L=\frac{P}{2}-1$. Tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka sākotnējam daudzstūrim mūsu pierādāmā sakarība neizpildās. Tātad pieņēmums ir nepareizs, un šī sakarība izpildās visiem apskatāmā tipa daudzstūriem.


4.zīm.



5.zīm.

2009./2010. mācību gads

5.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Risinājums balstīsies uz šādu labi zināmu īpašību: ja gan *a*, gan *b* abi dalās ar *n*, tad arī starpība $a-b$ dalās ar *n*.

Pieņemsim, ka *n* – kaut kāds naturāls skaitlis, ar kuru dalās gan 1517, gan 1147. Izmantojot augšminēto īpašību, pakāpeniski iegūstam, ka ar *n* dalās skaitļi

1517 – 1147 = 370;
1147 – 370 = 777;
777 – 370 = 407;
407 – 370 = 37.

Viegli pārbaudīt, ka no naturāliem skaitļiem 37 dalās tikai ar 1 un ar 37. Tātad *n* var būt vai nu 1, vai 37. Skaidrs, ka $37>1$. Pārbaudām, vai 1517 un 1147 dalās ar 37:

1517 : 37 = 41;
1147 : 37 = 31.

Tātad mūsu meklējamais skaitlis ir 37.

2. Sadalām visas lapas rūtiņas četrās grupās *A*; *B*; *C*; *D*, kā parādīts 1.zīm.

...

...	A	B	A	B		...
	D	C	D	C		
	A	B	A	B		
	D	C	D	C		

...

1.zīm.

Katra melnā rūtiņa pieder vienai no šīm četrām grupām. Ja nevienā grupā nebūtu vairāk par 14 melnajām rūtiņām, tad to kopskaits nepārsniegtu $14\cdot 4=56$; bet mēs zinām, ka melno rūtiņu pavisam ir 57. Tātad kādā no četrām grupām ir vairāk nekā 14 melno rūtiņu; tātad tajā ir **vismaz 15** melno rūtiņu. Atliek ievērot, ka nekādām divām rūtiņām no vienas grupas nav ne kopīgas malas, ne kopīga stūra.

3. Atbilde: ar 7 dienām.

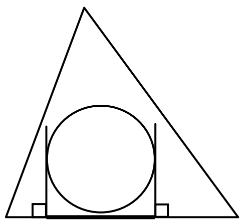
Risinājums. a) tā kā katrai komandai jāspēlē ar 7 citām, tad pat katrai komandai vienai pašai nepieciešamas **vismaz** 7 dienas;

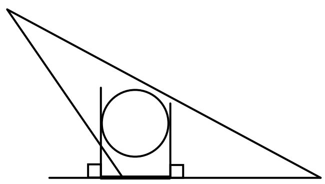
b) to, kā var iztikt ar 7 dienām, skat. 2.zīm. Komandas ir apzīmētas ar burtiem no *A* līdz *H*. Katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis norāda, kurā dienā savā starpā spēlē komandas, kas atbilst šīs rūtiņas rindiņai un kolonnai.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		7	6	5	4	3	2	1
B	7		5	4	3	2	1	6
C	6	5		3	2	1	7	4
D	5	4	3		1	7	6	2
E	4	3	2	1		6	5	7
F	3	2	1	7	6		4	5
G	2	1	7	6	5	4		3
H	1	6	4	2	7	5	3	

2.zīm.

4. Projicējam riņķa līniju uz malu ar garumu 10. Projekcijas garums vienāds ar tās diametra garumu. **Tā kā trijstūris ir šaurleņķu, tad projekcija atrodas malas iekšpusē, kā parādīts 3.zīm.** (varētu gadīties, ka tā nav, ja trijstūris būtu platleņķa; skat., piem., 4.zīm.). Tātad riņķa līnijas diametrs ir īsāks par 10; tāpēc tās rādiuss ir īsāks par $\frac{10}{2}=5$, k.b.j.


3.zīm.


4.zīm.

5. Virknei *a b a c a b a* galā pierakstot jebkuru no burtiem *a*; *b*; *c*, iegūst stabilu virkni:

$\underline{a}\ b\ a\ c\ a\ b\ a\ \underline{a}$
$\underline{a\ b}\ a\ c\ a\ b\ \underline{a\ b}$
$\underline{a\ b\ a\ c}\ \underline{a\ b\ a\ c}$

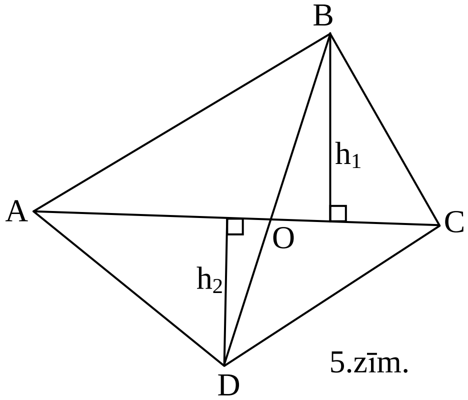
Lasītājs pats var pārbaudīt, ka burtu *a*; *b*; *c*; *d*; *e* gadījumam der, piemēram, virkne

a b a c a b a d a b a c a b a e a b a c a b a d a b a c a b a .

Padomājiet, vai līdzīgas virknes var izveidot, ja tām galā būtu jāpieraksta jebkurš no sešiem, septiņiem u.t.t. burtiem.

6. Atbilde: nē.

Risinājums. Trijstūra *XYZ* laukumu apzīmēsim ar $L(XYZ)$, ja *X*, *Y*, *Z* – patvaļīgi punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes (pretējā gadījumā *XYZ* nav trijstūris).



5.zīm.

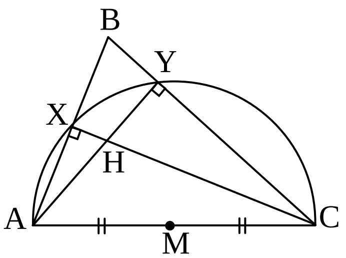
Četri trijstūri, par kuriem runā uzdevumā, ir *AOB*, *BOC*, *COD* un *DOA*. Novelkam ΔAOB un ΔBOC kopīgo augstumu h_1, kā arī ΔCOD un ΔDOA kopējo augstumu h_2 (skat. 5.zīm.).

Tad
$$
\begin{aligned}
L(AOB) &= \frac{1}{2} AO \cdot h_1 \\
L(BOC) &= \frac{1}{2} CO \cdot h_1 \qquad (1) \\
L(COD) &= \frac{1}{2} CO \cdot h_2 \\
L(DOA) &= \frac{1}{2} DO \cdot h_2
\end{aligned}
$$

No vienādībām (1) viegli pārbaudīt, ka
$$L(AOB) \cdot L(COD) = L(BOC) \cdot L(AOD) \qquad (2)$$

Bet vienādība $a \cdot b = c \cdot d$, kur *a*; *b*; *c*; *d* – **dažādi** pirmskaitļi, nevar pastāvēt: kreisā puse dalās ar *a*, bet labās puses vienīgie naturālie dalītāji ir 1; *c*; *d*; *cd*.

7. Iedomāsimies, ka *AY* un *CX* ir divi no meklējamiem augstumiem. Tad ΔAXC un ΔAYC ir taisnleņķa. Kā zināms, taisnleņķa trijstūrī mediāna pret hipotenūzu ir tikpat gara, cik puse no hipotenūzas; tāpēc $MA = MX = MY = MC$. Tātad, novelkot riņķa līniju ar centru *M* un rādiusu *MA*, tās krustpunkti ar malām *AB* un *CB* ir augstumu pamati.



6.zīm.

Varam uzzīmēt augstumus *AY* un *CX* un atrast to krustpunktu *H*. Tā kā trijstūra augstumi krustojas vienā punktā, tad, velkot taisni caur *B* un *H*, iegūstam arī trešo augstumu no virsotnes *B*.

8. Lasītājs, atverot iekavas, pats var pārbaudīt, ka pastāv identitāte
$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right) =$$
$$= (ax - by - cz - dt)^2 + (bx + ay - dz + ct)^2 + (cx + dy + az - bt)^2 + (dx - cy + bz + at)^2 .$$
Šo vienādību sauc par Lagranža identitāti.

9. Vispirms aprēķināsim tabulas elementu summu pa rindiņām. Pirmās rindiņas skaitļu summu 1 + 2 + 3 + ... + *n* apzīmēsim ar *S*. Tad otrās rindiņas skaitļu summa ir $2(1 + 2 + ... + n) = 2S$, trešās rindiņas skaitļu summa ir 3*S*, ..., *n*-tās rindiņas skaitļu summa ir $n(1 + 2 + ... + n) = n \cdot S$. Saskaitot visas šīs summas kopā, iegūstam: tabulas visu skaitļu summa ir
$$S + 2S + 3S + ... + (n-1)S + n \cdot S = (1 + 2 + ... + n) \cdot S = S \cdot S = S^2 .$$
Tagad aprēķināsim tabulas elementu summu, grupējot tos „pa stūrīšiem” (skat. 7.zīm.).

	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 3$	...	$1 \cdot (n-1)$	$1 \cdot n$
(α)	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	...	$2 \cdot (n-1)$	$2 \cdot n$
(β)	$3 \cdot 1$	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 3$	...	$3 \cdot (n-1)$	$3 \cdot n$
	...	...	...	...	...	...
	$n \cdot 1$	$n \cdot 2$	$n \cdot 3$	...	$n \cdot (n-1)$	$n \cdot n$

Kreisajā augšējā stūrī esošo skaitli $1 \cdot 1$ varam uzrakstīt kā 1^3 (jo $1 \cdot 1 = 1 = 1^3$).
„Stūrītī” α skaitļu summa ir

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2 \cdot (1 + 2 + 1) = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2^2 = 2^3$$

„Stūrītī” β skaitļu summa ir

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 2 + 1) = 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3^2 = 3^3$$

Līdzīgi „stūrīti”, kurā kreisais elements ir $k \cdot 1$ (k – patvaļīgs naturāls skaitlis, kas nepārsniedz n), skaitļu summa ir

$$\begin{aligned} S_k &= k \cdot 1 + k \cdot 2 + \ldots + \\ &+ k \cdot (k-2) + k \cdot (k-1) + k \cdot k + (k-1) \cdot k + (k-2) \cdot k + \ldots + \\ &+ 3 \cdot k + 2 \cdot k + 1 \cdot k = \\ &= k[\, \underline{1 + 2 + \ldots + (k-2) + (k-1)} + k + \underline{(k-1) + (k-2) + \ldots + 2 + 1}\,]. \end{aligned}$$

Pasvītroto apgabalu skaitļus apvienojam pa pāriem:

$$1 + (k-1) = k,\ 2 + (k-2) = k,\ \ldots,\ (k-2) + 2 = k,\ (k-1) + 1 = k.$$

Pavisam šādu pāru ir $(k-1)$.

Tātad $S_k = k[(k-1)k + k] = k[k^2 - k + k] = k \cdot k^2 = k^3$.

Tāpēc visos stūrīšos kopā ierakstīto skaitļu summa ir

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3.$$

Aprēķinot tabulā ierakstīto skaitļu summu divos dažādos veidos, rezultātiem jābūt vienādiem, jo aprēķina vienu un to pašu lielumu. No tā arī izriet vajadzīgā vienādība.

10. Atcerēsimies, ka latviešu alfabēta sākums ir

a, *ā*, *b*, *c*, *č*, *d*, *e*, ...

Andris var uzdot Maijai, piemēram, šādu jautājumu:

„Vai taisnība, ka Tavs burts alfabētā atrodas aiz manis iedomātā burta, kas ir vai nu *b*, vai *d*?”

- Ja Maija iedomājusies „*a*”, viņas atbilde būs „nē”. Tiešām, *a* neatrodas ne aiz *b*, ne aiz *d*.
- Ja Maija iedomājusies „*e*”, viņas atbilde būs „jā”. Tiešām, *e* atrodas gan aiz *b*, gan aiz *d*.
- Ja Maija iedomājusies „*c*”, viņas atbilde būs „nezinu un nevaru zināt”. Tiešām, burts *c* atrodas **aiz** *b*, bet **pirms** *d*, un Maija nezina, kuru no burtiem *b* un *d* Andris ir iedomājies.

Tātad atkarībā no Maijas atbildes, Andris sapratīs, kuru no burtiem *a*; *c*; *e* Maija ir iedomājusies.

2009./2010. mācību gads

6.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. a) Der, piem., skaitlis 9678312.

b) Pavisam ir 10 dažādi cipari. Skaidrs, ka prasītā skaitļa pierakstā nevar izmantot ciparu 0, jo ar nulli nedrīkst dalīt. Arī ciparu 5 nevar izmantot, jo, lai šis skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam jābūt 5 (jo iepriekš jau izspriedām, ka cipars 0 nevar būt). Bet tad šis būtu nepāra skaitlis un nedalītos ar pāra tiem cipariem, kas ir pāra. Tātad šī skaitļa pierakstā jāizmanto pārējie 8 cipari.

Tātad tur jābūt arī ciparam 3.

Atcerēsimies dalāmības pazīmi ar skaitli 3: ar skaitli 3 dalās tie un tikai tie skaitļi, kuru ciparu summa arī dalās ar 3. Bet mūsu iegūtā skaitļa ciparu summa ir $1+2+3+4+6+7+8+9=40$, kas nedalās ar 3. Tātad arī pats skaitlis nedalās ar 3. Tātad šādu astoņciparu skaitli izveidot nav iespējams.

2. Ievērosim, ka summa par visām šokolādēm noteikti dalās ar 3, tāpat arī summa par cepumu kārbām dalās ar 3. Tātad arī kopējā summa par šokolādēm un cepumiem dalās ar 3. Summa par torti un konfektēm ir 780 santīmi, kas arī dalās ar 3. Tātad visa pirkuma kopējai summai arī jādalās ar 3. Taču kasiera pieprasītie 982 santīmi nedalās ar 3. Tātad pieprasītā summa nevarēja būt pareiza.

3. Ar katru lauzumu mēs vienu šokolādes gabalu sadalām divos, tātad palielinām gabaliņu skaitu par 1. Tā kā sākumā mums ir viens gabals šokolādes, savukārt beigās mums vajag iegūt 200 gabaliņus, šokolādes gabaliņu skaitu jāpalielina par $200-1=199$. Tātad nepieciešami 199 lauzumi.

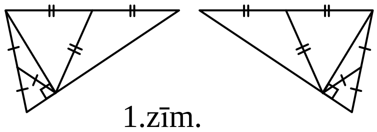
4. Katra dāma neatkarīgi no tās atrašanās vietas apdraud 7 lauciņus vertikāli, 7 lauciņus horizontāli un vismaz 7 lauciņus pa diagonāli. Lai kāda dāma neapdraudētu nevienu citu dāmu, ir jābūt vismaz $7\cdot 3=21$ brīvam lauciņam. Ja dāmu skaits ir 44, tad brīvi paliek tikai $64-44=20$ lauciņi. Tātad katra dāma apdraud vismaz vienu citu dāmu.

5. Viens no iespējamiem variantiem, kā rīkoties, attēlots tabulā:

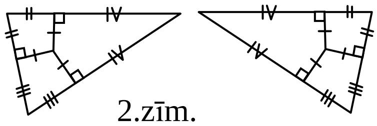
	8 *l* trauks	5 *l* trauks	3 *l* trauks
sākumā	8	0	0
pēc 1.liešanas	5	0	3
pēc 2.liešanas	5	3	0
pēc 3.liešanas	2	3	3
pēc 4.liešanas	2	5	1
pēc 5.liešanas	2	5	0
pēc 6.liešanas	2	2	3
pēc 7.liešanas	0	**4**	3

6. Ievērosim, ka tad, ja torte būtu vienādsānu trijstūris, nekādas problēmas nerastos – to uzreiz varētu ievietot pagatavotajā kastē. Kāda izšķiroša apstākļa dēļ šajā gadījumā var iztikt bez tortes sagriešanas? Acīmredzot tāpēc, ka vienādsānu trijstūrim ir simetrijas ass. Viegli pārliecināties, ka jebkuras formas torti, kurai ir simetrijas ass, var ievietot kastē, kas ir tās spoguļattēls.

Tātad mūsu uzdevums – sagriezt torti tādās daļās, kurām būtu simetrijas ass (piemēram, vienādsānu trijstūros). To var izdarīt, sagriežot vispirms trijstūri divos taisnleņķa trijstūros un pēc tam katru taisnleņķa trijstūri – divos vienādsānu trijstūros (novelkot mediānu no taisnā leņķa virsotnes jeb savienojot taisnā leņķa virsotni ar hipotenūzas viduspunktu). Tādejādi torte jāsagriež 4 daļās (skat. 1. zīm.).


1.zīm.

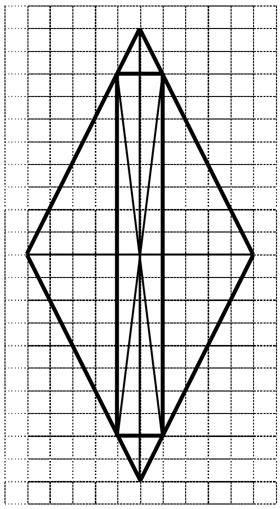
Torti var griezt arī 3 daļās, ja trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centru savieno ar tās pieskaršanās punktiem trijstūra malām; arī tad 3 iegūtajiem četrstūriem ir simetrijas ass (skat. 2. zīm.).


2.zīm.

3.6.7. Jā, tā var gadīties. Viens no piemēriem, kādi var būt šie četrstūri, skat., 3. zīm.

Redzam, ka ārējā četrstūra (romba) diagonāļu garumu summa ir $10+20=30$ vienības.

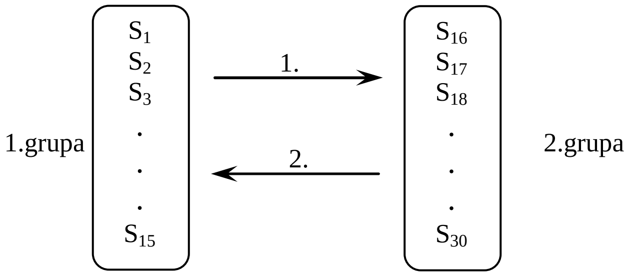
Iekšējais četrstūris ir taisnstūris, kura malu garumi ir 2 un 16 vienības. Tā kā visi taisnstūra leņķi ir 90°, katra diagonāle taisnstūri sadala divos taisnleņķa trijstūros. Zinām, ka taisnleņķa trijstūra hipotenūza (mala pret taisno leņķi) ir garāka par pārējām divām trijstūra malām. Tā kā iekšējā četrstūra diagonāles ir vienādas, un tās ir šo taisnleņķa trijstūru hipotenūzas, katra no tām ir garāka nekā 16 vienības, tātad kopā ir garākas nekā 32 vienības. Tātad to summa ir lielāka nekā ārējā četrstūra diagonāļu garumu summa.


3.zīm.

3.6.8. Vispirms parādīsim, kā skolēni var viens otru apciemot 10 dienās. Katru dienu skolēnus var iedalīt 2 grupās: vienā grupā tos skolēnus, kuri tajā dienā iet ciemos, bet otrā grupā – tos skolēnus, kuri tajā dienā sēž mājās un gaida viesus.

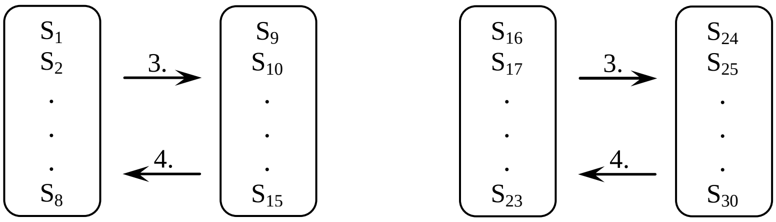
Apzīmēsim skolēnus ar S_1, S_2, S_3, ..., S_{30}. 1.dienā iedalīsim visus skolēnus šādās 2 grupās: pirmajā grupā skolēnus S_1, S_2, S_3, ..., S_{15} un S_{16}, S_{17}, ..., S_{30}. Pirmajā dienā visi pirmās grupas skolēni ies ciemos pie 2. grupas skolēniem, bet 2. grupas skolēni sēdēs mājās. Tātad 1.dienā S_1 apciemos skolēnus S_{16}, S_{17}, ..., S_{30}; skolēns S_2 apciemos skolēnus

S_{16}, S_{17}, ..., S_{30}, ... un skolēns S_{15} arī apciemos skolēnus S_{16}, S_{17}, ..., S_{30}. Otrajā dienā pirmās un otrās grupas skolēni mainīsies lomām. 2. grupas skolēni ies ciemos pie 1. grupas skolēniem. Visu to var attēlot, kā parādīts 4. zīm. Ar bultiņu norādīts skolēnu ciemos iešanas virziens. Numurs virs bultas ir dienas numurs.



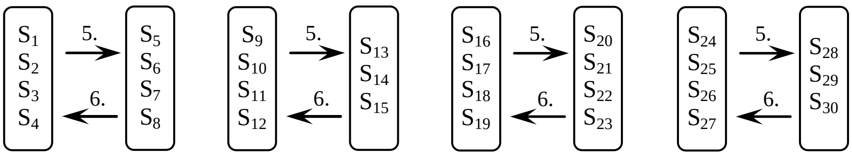
4.zīm.

Pēc 2. dienas katru no skolēnu grupām sadala 2 apakšgrupās: vienā 8 skolēni, otrā – 7 skolēni. Trešajā dienā skolēni no pirmās apakšgrupas apciemo skolēnus no 2. apakšgrupas. Ceturtajā dienā skolēni no 2. apakšgrupas apciemo 1. apakšgrupas skolēnus. 3. un 4. dienas viesošanās parādīta 5. zīm.



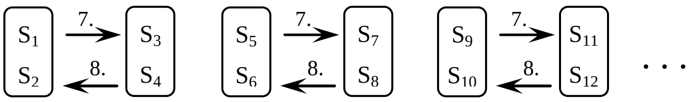
5.zīm.

Pēc 4. dienas katru no esošajām skolēnu grupām atkal sadala 2 apakšgrupās. Piektajā dienā no katras grupas 1. apakšgrupas skolēni dodas ciemos pie 2. apakšgrupas skolēniem. Sestajā dienā iet ciemos 2. apakšgrupa (skat. 6. zīm.).



6.zīm.

Pēc 5. dienas katru no esošajām grupām atkal sadala 2 grupās – pa 2 vai 1 skolēnam. Ciemošanās 7. un 8. dienā parādīta 7. zīm.

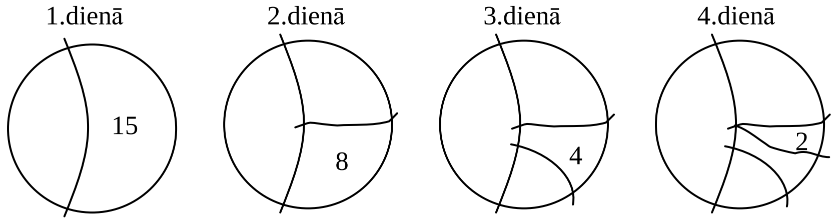


7.zīm.

Pēc 8. dienas katrā grupiņā nav vairāk par 2 skolēniem. Tāpēc 9. un 10. dienā tie viens otru var apciemot. Līdz ar to esam pierādījuši, ka visi skolēni var cits citu apciemot 10 dienās.

Tagad pieradīsim, ka četrās dienās visi skolēni viens otru nevar apciemot. Pirmajā dienā viena grupa skolēnu iet ciemos, otra sēž mājās. Lielākajā no abām grupām G_1 ir vismaz 15 skolēni (jo, ja abās būtu tikai 14, tad skolēnu skaits nevarētu pārsniegt $2 \cdot 14 = 28$, bet dots, ka ir 30 skolēni). Izvēlēsimies no šīs grupas 15 skolēnus un skatīsimies, ko viņi var darīt 2. dienā.

Skaidrs, ka tos atkal var iedalīt 2 grupās – vieni iet ciemos, bet citi sēž mājās. Lielākajā no grupiņām G_2 ir vismaz 8 skolēni (jo, ja abās būtu tikai 7, tad skolēnu skaits grupiņā būtu $2 \cdot 7 = 14$, nevis 15). Izvēlēsimies no šīs grupiņas 8 skolēnus un skatīsimies, ko viņi var darīt 3. dienā. Tos atkal var iedalīt 2 grupiņās – vieni sēž mājās, citi iet ciemos. Lielākajā grupiņā G_3 ir vismaz 4 skolēni. Izvēlamies no tās 4 skolēnus. Tad ceturtajā dienā viena grupiņa iet ciemos, otra – sēž mājās. Lielākajā no grupiņām G_4 ir vismaz 2 skolēni. Tātad 2 skolēni 4. dienā atrodas vienā grupiņā G_4, 3. dienā atrodas grupiņā G_3, 2. dienā – grupiņā G_2 un 1. dienā – grupiņā G_1. Tas nozīmē, ka gan 1., gan 2., gan 3., gan 4. dienā, viņi vienlaicīgi vai nu sēž mājās, vai arī iet ciemos, un tāpēc nevar viens otru apciemot (skat. 8. zīm.).



8.zīm.

3.6.9. Šādu konstrukciju iespējams veikt dažādos veidos. Sniegsim vienu no iespējamām konstrukcijas gaitām.

1) Apzīmēsim dotā leņķa virsotni ar O un atliksim uz leņķa malām nogriežņus $OB = OA$ (skat. 9. zīm.).

2) Uzzīmēsim riņķa līniju ar centru punktā O un rādiusu OA;

3) Uz riņķa līnijas ar cirkuli atliksim punktu C tā, ka $OB = CB$. Skaidrs, ka tad arī $OC = CB$. Tātad izveidojas vienādmalu trijstūris OBC.

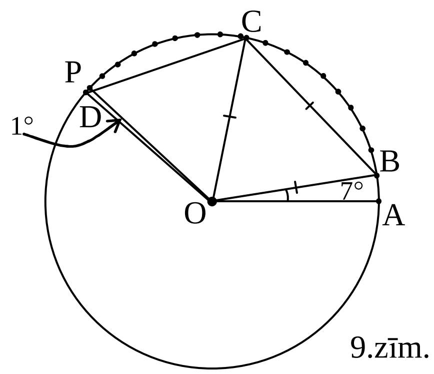
4) Līdzīgi konstruējam vienādmalu trijstūri OCD.

5) Skaidrs, ka $\angle BOD = 2 \cdot 60° = 120°$.

6) Ievērojam, ka $120° - 7° \cdot 17 = 120° - 119° = 1°$.

7) Tā kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādām hordām, ir vienādi, tad, sākot ar punktu B atliekot uz riņķa līnijas 17 reizes vienādas hordas (līdz punktam P), iegūsim, ka $\angle BOP = 7° \cdot 17 = 119°$.

8) Tātad $\angle POD = 120° - 119° = 1°$. Tātad esam konstruējuši $\angle POD = 1°$.



9.zīm.

3.6.10. Izveidosim metodi, kā detektīvs var noķert laupītāju jebkuram salu skaitam valstī.

Pieņemsim, ka sākumā laupītājs atrodas salā A. Vispirms detektīvs aizbrauc uz salu A (pēc uzdevuma nosacījumiem to var izdarīt, bet ceļā, iespējams, jāpatērē vairāk nekā viena diena). Ja, nonācis salā *A*, detektīvs sastop tur laupītāju, viņš var to arestēt. Tomēr pastāv arī iespēja, ka laupītājs no salas *A* ir aizbraucis. Tādā gadījumā detektīvs dodas viņam pakaļ pa tieši tādu pašu maršrutu, pa kādu braucis laupītājs (šo maršrutu viņš uzzinājis laikā, kad brauca uz salu *A*, jo visu laiku zināja, kur katrā brīdī atrodas laupītājs). Tā kā laupītājs piektdienās nebrauc, tad katru piektdienu detektīvs tuvojas tam par vienas dienas braucienu. Tāpēc agri vai vēlu detektīvs laupītāju panāks.