2010./2011. mācību gads
1.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: Jā, to var izdarīt.

Risinājums: Pārveidosim summu par $\overline{ES}\cdot 4=\overline{TE}$ (apzīmējums $\overline{ES}$ norāda, ka skaitļa pirmais cipars ir *E*, bet otrais – *S*; līdzīgi arī apzīmējums $\overline{TE}$ nozīmē, ka skaitļa pirmais cipars ir *T*, bet otrais - *E*). Tā kā *E* ir reizinājuma $4\cdot S$ pēdējais cipars un $4\cdot S$ ir pāra skaitlis, tad *E* ir pāra cipars. Turklāt tas nedrīkst būt lielāks par 2, jo pretējā gadījumā $4\cdot\overline{ES}\geq 4\cdot 30>100$ būtu trīsciparu skaitlis. Turklāt $E\neq 0$, jo skaitļa pirmais cipars nevar būt 0. Tātad *E* ir 2. Tā kā reizinājuma $4\cdot S$ vienu cipars ir 2, tad *S* var būt 3 vai 8. Ja *S* ir 8, tad reizinājums $4\cdot 28$ ir trīsciparu skaitlis, tāpēc *S* ir 3. Esam ieguvuši, ka $E=2$, $S=3$ un $T=9$.

2. Apzīmēsim centrālajā rūtiņā esošo skaitli ar *x* (skat. 1.zīm.). Tā kā katrā diagonālē jau esošo skaitļu summa ir 20, katras diagonāles un arī katras kolonnas un rindas visu skaitļu summa ir $x+20$.

7		8
	x	
12		13

1.zīm.

No tā seko, ka pirmajā rindā trūkstošais skaitlis ir $x+20-(7+8)=x+5$, savukārt trešajā rindā trūkstošais skaitlis ir $x+20-(12+13)=x-5$. Tātad vidējā kolonnā visu skaitļu summa ir $(x+5)+x+(x=5)=3x$. Bet tam ir jābūt vienādam ar $x+20$, no kurienes seko, ka $x=10$. Tātad katrā diagonālē, kolonnā un rindā visu ierakstīto skaitļu summa ir 30, no kā iegūstam 2.zīm. redzamo aizpildīto maģisko kvadrātu.

7	**15**	8
11	**10**	**9**
12	**5**	13

2.zīm.

3. Skaidrs, ka nav viencipara „neveiksmīga” skaitļa.

Apskatīsim „neveiksmīgu” divciparu skaitli $\overline{ab}$ (šis apzīmējums norāda, ka skaitļa pirmais cipars ir *a*, bet otrais – *b*).

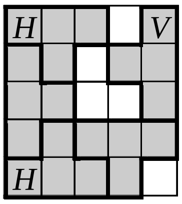
Ja skaitļa cipari apzīmēti ar *a* un *b*, varam skaitli uzrakstīt formā $\overline{ab}=10a+b$. No „neveiksmīga” skaitļa definīcijas iegūstam, ka $10a+b=13(a+b)\Rightarrow 3a+12b=0$. Tā kā $a>0$ un $b\geq 0$, šim vienādojumam nav atrisinājuma. Tāpēc neeksistē „neveiksmīgs” divciparu skaitlis.

Apskatīsim „neveiksmīgu” trīsciparu skaitli $\overline{abc}=100a+10b+c$. Līdzīgi kā iepriekš iegūstam vienādojumu $100a+10b+c=13(a+b+c)$. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam $29a=b+4c$. Ievērojam, ka *a* noteikti ir 1, jo pretējā gadījumā $29a\geq 29\cdot 2=58$, bet vienādojuma labā puses lielākā iespējamā vērtība ir $b+4c=9+4\cdot 9=45$. Ievietojam $a=1$ iegūtajā vienādojumā un iegūstam $b+4c=29$. Pakāpeniski apskatot pēc kārtas visus iespējamos viencipara skaitļus, secinām, ka vienīgie šī vienādojuma atrisinājumi ir $b=1$ un $c=7$, $b=5$ un $c=6$, $b=9$ un $c=5$. Tātad vienīgie trīsciparu „neveiksmīgie” skaitļi ir 117, 156 un 195.

Apskatīsim, vai eksistē kāds „neveiksmīgs” četrciparu skaitlis. Līdzīgi kā iepriekš iegūstam vienādojumu $1000a+100b+10c+d=13(a+b+c+d)$. Mazākā vienādojuma kreisās puses vērtība ir 1000, bet labās puses lielākā iespējamā vērtība ir $13\cdot 36=468$. Tāpēc nav „neveiksmīgu” četrciparu skaitļu. Līdzīgi neeksistē piecciparu, sešciparu u.t.t. „neveiksmīgi” skaitļi.

Tātad vienīgie „neveiksmīgie” skaitļi ir 117, 156 un 195.

4. Lielākais T-veida figūru skaits, kuras var ievietot 5x5 rūtiņu kvadrātā ir 5. Vienu no iespējamiem veidiem, kā to var izdarīt, skat. 3.zīm.



3.zīm.

Pierādīsim, ka vairāk prasīto figūru dotajā kvadrātā ievietot nevar. Tā kā katra no T-veida figūrām sastāv no 4 rūtiņām, dotajā 5x5 rūtiņu kvadrātā nevar ievietot 7 vai vairāk figūras (jo $4 \cdot 7 > 25$).

Pieņemsim, ka 5x5 rūtiņu kvadrātā var ievietot 6 T-veida figūras. Tad pāri paliktu tieši viena nepārklāta rūtiņa, tātad vismaz trīs no visām kvadrāta stūra rūtiņām būtu pārklātas ar T-veida rūtiņām. Apzīmēsim šīs stūra rūtiņas ar *H* vai *V* atkarībā no tā, vai to pārklājošā T-veida figūra ir novietota horizontāli vai vertikāli.

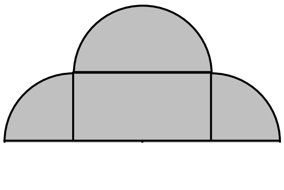
Pieņemsim, ka visas 4 stūra rūtiņas ir pārklātas ar T-veida figūrām. Nav iespējams, ka 3 vai 4 stūra rūtiņas pārklāj horizontālas figūriņas, jo tad vismaz gar vienu malu būtu blakus jānovietojas vismaz 2 no horizontālām (vertikālām) figūriņām, bet tad tās aizņemtu vismaz $2 \cdot 3 > 5$ vienas malas rūtiņas. Līdzīgi arī vertikālas figūriņas nevar noklāt 3 vai 4 stūras rūtiņas. Tātad vairāk kā 2 horizontālas un 2 vertikālas figūriņas stūra rūtiņās nevar būt, pie tam vienas malas viena stūra rūtiņa ir *H*, bet otra - *V*. Apskatot visus iespējamos šo figūru novietojumus pie malas, redzam, ka pie katras malas noteikti rodas vismaz 1 ne-stūra rūtiņas, ko nevar pārklāt, tātad kopā nenoklātas vismaz 4 rūtiņas. Ja vienīgā nenoklātā būtu stūra rūtiņa, līdzīgi izspriežam, ka visas trīs pārklātās nevar būt viena veida (*H* vai *V*). Tātad vismaz pie vienas malas veidosies vēl vismaz viena ne-stūra rūtiņa, ko nevar pārkāt, tātad vismaz 2 rūtiņas paliks nepārklātas tāpēc nevar ievietot 6 T-veida figūras.

5. Pierādīsim, ka tādu naturālu skaitļu *a* un *b* nav.

1.risinājums. Tā kā *x* naturāls skaitlis, tad $x^2 < x^2 + x < x^2 + 2x + 1$ jeb $x^2 < x^2 + x < (x+1)^2$. Skaitļi *x* un *x* + 1 ir viens otram sekojoši naturāli skaitļi; starp to kvadrātiem nav citu naturālu skaitļu kvadrātu, jo starp *x* un *x* + 1 nav citu naturālu skaitļu. Tātad $x^2 + x$ nevar būt vienāds ar naturāla skaitļa *y* kvadrātu.

2.risinājums. Pieņemsim, ka naturāliem skaitļiem *x* un *y* pastāv vienādība $x^2 + x = y^2$. No tās pārveidojumu ceļā iegūstam $x = y^2 - x^2$ un tālāk $x = (y-x)(y+x)$. Tā kā $y - x$ ir vesels skaitlis, secinām, ka *x* dalās ar $y + x$. Bet tas nav iespējams, jo *x* un $x + y$ ir naturāli skaitļi un $x < x + y$. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

6. Sadalot iekrāsoto figūru, kā parādīts 4.zīm., tiek izveidots viens taisnstūris ar izmēriem 2×1, kā arī viens pusriņķis un divi ceturtdaļriņķi, kas kopā veido riņķi ar rādiusu 1. Tātad kopējais iekrāsotās figūras laukums ir $2 \cdot 1 + \pi \cdot 1^2 = 2 + \pi$.



4.zīm.

7. Apzīmējam vienādsānu trijstūra pamatu ar *a*, bet vienādās malas ar *b*. Tad trijstūra perimetrs ir $a + 2b$, paralelograma perimetrs ir $2a + 2b$, bet romba perimetrs ir $4b$.

No dotā apgalvojuma par paralelograma perimetru iegūstam vienādojumu $2a + 2b = a + 2b + 3$, no kurienes aprēķinām, ka $a = 3$. Savukārt no apgalvojuma par romba perimetra garumu iegūstam vienādojumu $4b = a + 2b + 7$, ko pārveidojot iegūstam vienādojumu $2b = a + 7$. Tā kā $a = 3$, tad $2b = 10$ un $b = 5$. Tātad trijstūra perimetrs ir 13 cm.

8. a) Mazākais viena viencipara un viena divciparu skaitļa reizinājums, ko Skaitlītis var aprēķināt ar savu kalkulatoru, ir $1 \cdot 11 = 11$; lielākais iespējamais reizinājums ir $9 \cdot 99 = 891$. Vienīgais veids, kā iegūt reizinājumu 15, ir $1 \cdot 15 = 15$, tātad tā ir viena no atbildēm (reizinājums $3 \cdot 5$ neder – abi reizinātāji ir viencipara skaitļi). Vēl iespējams, ka patiesais reizinājums ir bijis 105 vai 150 (tā kā rezultāts ir mazāks nekā 891, reizinājums nevar būt, piemēram, 1005 u.c.).

Apskatīsim visas iespējas, kā ar vienu viencipara skaitli un vienu divciparu skaitli varam iegūt reizinājumus 105 un 150:

$$105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$$

$$150 = 2 \cdot 75 = 3 \cdot 50(*) = 5 \cdot 30(*) = 6 \cdot 25 = 10 \cdot 15(*)$$

Ar zvaigznītēm apzīmēti reizinājumi, kuri neatbilst uzdevuma nosacījumiem (skaitļi satur ciparu 0, turklāt pēdējā reizinājumā ir sareizināti divi divciparu skaitļi).

Tāpēc Skaitlītis varēja aprēķināt šādus reizinājumus:

$1 \cdot 15$, $2 \cdot 75$, $3 \cdot 35$, $5 \cdot 21$, $6 \cdot 25$, $7 \cdot 15$

b) Rīkojamies līdzīgi, kā iepriekšējā gadījumā. Ja sareizināti divi divciparu skaitļi, mazākais iespējamais reizinājums ir $11 \cdot 11 = 121$, bet lielākais - $99 \cdot 99 = 9801$. Tad iespējams, ka patiesais reizinājuma rezultāts ir 150, 1005, 1050 vai 1500. Jau iepriekš apskatījām reizinājumu 150 – vienīgie divciparu skaitļi, kurus sareizinos iegūst 150, ir 10 un 15, bet tie neder, jo skaitlis 10 satur ciparu 0. Tāpēc skaitli 150 nevar iegūt atbilstoši uzdevuma prasībām.

Sadalīsim pirmreizinātājos pārējos skaitļus 1005, 1050 un 1500:

$$1005 = 3 \cdot 5 \cdot 67$$

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$1500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Redzam, ka kā divu skaitļu reizinājumu 1005 var iegūt 3 veidos:

$1005 = (3 \cdot 5) \cdot 67 = (3 \cdot 67) \cdot 5 = 3 \cdot (5 \cdot 67)$, t.i.,

$$1005 = 15 \cdot 67 = 201 \cdot 5(*) = 3 \cdot 335(*)$$

Ar zvaigznītēm apzīmēti reizinājumi, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tāpēc Skaitlītis reizinājumu 1005 varēja iegūt tikai sareizinot skaitļus 15 un 67.

Apskatot skaitļus 1050 un 1500, līdzīgi apvienosim pirmreizinātājus divās grupās. Turklāt ievērojam, ka, apvienojot skaitļus 2 un 5 vienā grupā, iegūsim reizinātāju, kas beidzas ar 0, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tāpēc šādus sadalījumus neapskatīsim.

$$1050 = (2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 7) = (2 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 3) = (2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 5) = 2 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7)$$

$$1500 = (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5)$$

un tālāk

$$1050 = 6 \cdot 175(*) = 14 \cdot 75 = 42 \cdot 25 = 2 \cdot 525(*)$$

$$1500 = 4 \cdot 375(*) = 12 \cdot 125(*)$$

Atkal ar zvaigznītēm apzīmēti reizinājumi, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, tāpēc, sareizinot divus divciparu skaitļus, Skaitlītis uz sava sabojātā kalkulatora rezultātu 15 varēja iegūt tikai šādi:

$15 \cdot 67$, $14 \cdot 75$, $42 \cdot 25$

9. Skaidrs, ka A un B nevarēja vienlaicīgi teikt patiesību. Ja tieši viens no viņiem teica patiesību, tad C un D meloja. Savukārt ja gan A, gan B ir meļi, tad C teica patiesību, bet D meloja. Abos gadījumos tieši viens skolēns teica patiesību.

10. Apzīmēsim suņu skaitu pilsētā ar *x*, bet kaķu skaitu – ar *y*. Tad to suņu skaits, kas sevi uzskata par kaķi ir $\frac{x}{10}$, bet kaķu skaits, kas sevi uzskata par kaķi (resp., neuzskata sevi par suni) ir $\frac{9y}{10}$.

Tā kā 20% no visiem dzīvniekiem sevi uzskata par kaķi, varam uzrakstīt vienādojumu $\frac{x}{10}+\frac{9y}{10}=\frac{x+y}{5}$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus: $x+9y=2x+2y$, no kurienes $x=7y$. Tātad $\frac{1}{8}=12{,}5\%$ no dzīvniekiem pilsētā ir kaķi.

2010./2011. mācību gads

2.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Tādu veselu skaitļu a un b nav. Tā kā vienādības kreisajā pusē gan $8a$, gan $12b$ dalās ar 2, to starpība arī dalās ar 2. Tāpēc arī labajā pusē esošajai izteiksmei jādalās ar 2. Bet skaitlis 5 nedalās ar divi.

2. Atbilde: Skaidrs, ka šāda „saīsināšanas īpašība” ir spēkā visām daļām, kurām skaitītājs un saucējs ir tādi divciparu skaitļi, kuriem abi cipari ir vienādi. Bez tam šī „īpašība” ir spēkā daļām $\frac{16}{64}$; $\frac{19}{95}$; $\frac{26}{65}$; $\frac{49}{98}$.

Risinājums. Apzīmēsim ar a un b skaitītāja ciparus, bet ar b un c – saucēja ciparus. Iegūsim vienādojumu

$$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}.$$

Pārveidosim to:

$$(10a+b)c=a(10b+c)$$
$$10ac+bc=10ab+ac$$
$$10a(c-b)=c(a-b) \qquad (*)$$

Ievērosim, ka $a\neq 0$ un $b\neq 0$, jo tad skaitītājā un saucējā nebūtu divciparu skaitļa. Arī $c\neq 0$, jo tad nevarētu rakstīt daļu $\frac{a}{c}$.

Ja $c-b=0$, tad vienādojuma (*) kreisā puse ir vienāda ar 0. Arī labajai pusei jābūt vienādai ar 0. Tātad $a-b=0$, un der atrisinājums $c=b=a$ (visi cipari ir vienādi).

Tālāk aplūkosim tikai tos atrisinājumus, kuriem $c\neq b$ un $a\neq b$.

Vienādojuma kreisā puse dalās ar 10, tāpēc arī labajai pusei $c(a-b)$ jādalās ar 10. Tā kā $c\neq 0$, $c<10$, $a-b\neq 0$ un $a-b<10$, varam aplūkot 2 gadījumus:

a) c dalās ar 2, t.i., $c=2k$, kur k = 1; 2; 3; 4, un
 $a-b$ dalās ar 5, t.i., $a-b=5$ vai arī $a-b=-5$.

b) c dalās ar 5, t.i., $c=5$, un
 $a-b$ dalās ar 2, t.i., $a-b=2m$, kur m = ±1; ±2; ±3; ±4.

Aplūkosim katru gadījumu atsevišķi.

a1) $a-b=5$ un $c=2k$ (k = 1; 2; 3; 4). Tad no (*) iegūstam $a(2k-b)=k$. Tā kā $b=a-5$, tad $a>5$. Tāpēc kreisās puses vērtība pēc moduļa lielāka par labās puses vērtību, un atrisinājumu nav.

a2) $a-b=-5$ un $c=2k$ (k = 1; 2; 3; 4). Tad no (*) iegūstam $a(2k-b)=-k$ un, tā kā $b=a+5$, tad $a(2k-a-5)=-k$. Skaidrs, ka $1\leq a\leq 4$ (jābūt $b\leq 9$). Ievietojot šīs a vērtības, redzam:

- ja $a=1$, tad $k=2$;
- ja $a=2$, tad k neiznāk vesels skaitlis;
- ja $a=3$, tad atkal k neiznāk vesels skaitlis;
- ja $a=4$, tad $k=4$.

Tad attiecīgi iegūstam daļas $\frac{16}{64}$ un $\frac{49}{98}$.

b) $c=5$ un $a-b=2m$ (kur m = ±1; ±2; ±3; ±4). No (*) iegūstam

$$10a(5-b)=5\cdot 2m$$
$$a(5-b)=m$$

Ievietosim $a=2m+b$:

$$(2m+b)(5-b)=m$$

Ja $m>0$, tad $2m+b>m$ un atrisinājuma nav.

Aplūkosim gadījumus, kad *m* ir negatīvs skaitlis.

- Ja $m = -1$, tad $(b-2)(5-b) = -1$, bet $(b-2)(b-5) = 1$ nav atrisinājuma.
- Ja $m = -2$, tad $(b-4)(5-b) = -2$ ir atrisinājums $b = 6$ ($a = 2$, $c = 5$); neder atrisinājums $b = 3$, jo tad *a* sanāk negatīvs.
- Ja $m = -3$, tad $(b-6)(b-5) = 3$ nav atrisinājuma.
- Ja $m = -4$, tad $(b-8)(5-b) = -4$ ir atrisinājums $b = 9$ ($a = 1$, $c = 5$); neder atrisinājums $b = 4$, jo tad *a* sanāk negatīvs.

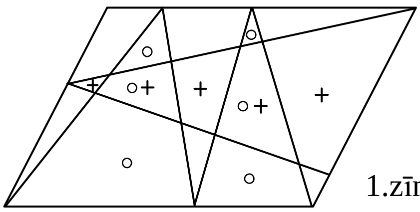
Tātad b) gadījumā ieguvām divas daļas: $\frac{26}{65}$ un $\frac{19}{95}$.

3. Tā kā vienādojuma sakne ir skaitlis 7, tad, ievietojot nezināmā vietā 7, jāiegūst patiesa vienādība. Tāpēc apzīmēsim tintes traipa vietā esošo skaitli ar *a*, savukārt *x* vietā ievietosim skaitli 7, un atrisināsim tagad iegūto vienādojumu attiecībā pret *a*.

$$(7+a)(7+4)-(7+1)(7+2)=38$$
$$(7+a)\cdot 11-8\cdot 9=38$$
$$77+11a-72=38$$
$$11a=33$$
$$a=3$$

Tātad tintes traips aizsedzis skaitli 3.

4. Izmantojot to, ka paralelograma laukums ir *ah*, bet trijstūra laukums - $\frac{1}{2}ah$, iegūstam, ka ar aplīšiem apzīmētais laukums ir puse paralelograma laukuma, bet ar krustiņiem apzīmētais – mazāk nekā puse paralelograma laukuma (skat. 1.zīm.). No abiem laukumiem atņemot to kopējo daļu, iegūstam vajadzīgo.



1.zīm.

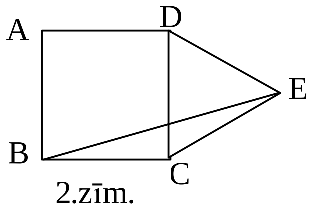
5. a) Lai nekādu divu izvēlētu skaitļu starpība nebūtu 5, var izvēlēties ne vairāk kā divus skaitļus no šādām skaitļu grupām: $\{1; 6; 11; 16\}$; $\{2; 7; 12; 17\}$; $\{3; 8; 13; 18\}$; $\{4; 9; 14; 19\}$ un $\{5; 10; 15; 20\}$. Tātad pavisam var izvēlēties ne vairāk kā $2\cdot 5 =$ **10** skaitļus. Viens no veidiem, kā var izvēlēties 10 šādus skaitļus, ir:

1; 2; 3; 4; 5; 11; 12; 13; 14; 15.

b) No katras četru skaitļu grupas $\{a; a+5; a+10; a+15\}$ divus skaitļus var izvēlēties 3 veidos: *a* un $a+10$; *a* un $a+15$; $a+5$ un $a+15$. Tā kā ir pavisam 5 šādas grupas, tad šos 10 skaitļus var izvēlēties $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 =$ **243** dažādos veidos.

6. Tā kā *ABCD* ir kvadrāts, tad $\angle BCD = 90°$ (skat. 2.zīm.) un $DC = CB$; savukārt, tā kā trijstūris *CDE* ir vienādmalu, tad $\angle DCE = 60°$ un $EC = DC$. Tāpēc trijstūris *ECB* ir vienādsānu ($EC = CB$) un $\angle BCE = \angle BCD + \angle DCE = 90° + 60° = 150°$.

Tādēļ $\angle CEB = \angle CBE = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$, no kā iegūstam, ka $\angle BED = \angle CED - \angle CEB = 60° - 15° = 45°$.



2.zīm.

7. Tā kā prasītais skaitlis ir četrciparu, tas atrodas starp 1000 un 9999. Apzīmēsim šo skaitli ar *n*. Zināms, ka *n* ir kāda vesela skaitļa kvadrāts, turklāt skaitlis $n-1$ dalās ar katru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9. Tātad $n-1$ dalās ar šo skaitļu mazāko kopīgo dalītāju, kas ir vienāds ar $8\cdot 9\cdot 5\cdot 7 = 2520$.

Tāpēc ir tikai trīs iespējamās *n* vērtības: $2520+1=2521$; $2520\cdot 2+1=5041$ un $2520\cdot 3+1=7561$ ($2520\cdot 4+1$ jau ir lielāks nekā 9999). No šiem trim skaitļiem tikai 5041 ir kāda skaitļa kvadrāts ($71^2=5041$). Tātad Lauras PIN-kods ir **5041**.

Piezīme. Uzdevumu ir iespējams arī atrisināt, apskatot tos visus četrciparu skaitļus, kas ir kāda vesela skaitļa kvadrāti, un tālāk katram iegūtajam skaitlim pārbaudot, vai izpildās punktā b) minētais nosacījums. Lai gan to var izdarīt, šī metode nav visai efektīva, jo jāveic pārbaudes pavisam 68 skaitļiem. Turklāt, ja izmanto šo metodi, katram skaitlim pārbaude jāveic ļoti rūpīgi, norādot, kāpēc tieši šis skaitlis neder (piemēram, skaitlim 5929 jānorāda, ka tas dalās ar 7 un tāpēc atlikums ir 0 nevis prasītais 1). Nepietiek tikai pateikt, ka šī pārbaude ir veikta, nenorādot sīkāku informāciju.

Protams, šo metodi var arī reducēt, uzreiz izslēdzot visus pāra skaitļus (jo tiem atlikums dalot ar 2 noteikti būs 0 nevis 1), tādējādi jāveic „tikai” 34 pārbaudes; vai arī apskatot tikai skaitļus, kas beidzas ar ciparu 1 (lai apmierinātu nosacījumus dalot ar 2 un 5). Tomēr, šo loģisko spriedumu veikšanas gaitā, risinātājs pats, iespējams, nonāks jau pie sākumā uzrādītā īsākā risinājuma.

8. Apzīmēsim diametra garumu Centa celiņam ar *c*, bet Baibas celiņa pirmā pusriņķa diametra garumu ar *b*, tad otrā pusriņķa diametra garums ir $c-b$. Viss Centa celiņa garums ir $\frac{1}{2}\pi c$, savukārt viss Baibas celiņa garums ir vienāds ar $\frac{1}{2}\pi b+\frac{1}{2}\pi(c-b)=\frac{1}{2}\pi b+\frac{1}{2}\pi c-\frac{1}{2}\pi b=\frac{1}{2}\pi c$.

Tātad Centa un Baibas celiņu garumi ir vienādi. Līdzīgi varam iegūt, ka arī Aivara ceļa garums ir tāds pats, kā Baibai un Centim. Tā kā visi sportisti skrēja ar vienādu vienmērīgu ātrumu, tad viņi visi finišēja reizē.

9. Ierakstot starp skaitļa 121 cipariem nulles skaitā *n* (*n* – vesels pozitīvs skaitlis), iegūstam skaitli $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1$.

Šo skaitli var izteikt formā $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1=1\cdot 10^{2n+2}+2\cdot 10^{n+1}+1$, no kurienes pārveidojumu ceļā pakāpeniski iegūstam:

$$\begin{aligned}
&1\cdot 10^{2n+2}+2\cdot 10^{n+1}+1=\\
&=10^{2(n+1)}+2\cdot 10^{n+1}+1=\\
&=\left(10^{n+1}\right)^2+2\cdot 10^{n+1}+1=\\
&=\left(10^{n+1}+1\right)^2
\end{aligned}$$

Tātad $1\underbrace{0..0}_{n}2\underbrace{0..0}_{n}1=\left(10^{n+1}+1\right)^2$, k.b.j.

10. Lai kļūtu par uzvarētāju, pirmajam spēlētājam jācenšas tikt pie skaitļa 89. Ja viņš iegūs šo skaitli, tad, lai arī kādu skaitli nosauktu pretinieks, viņš noteikti varēs atrast atbilstošu skaitli, kuru pieskaitot jau esošajam rezultātam, rodas summa 100 (jo otrajam spēlētājam jānosauc

skaitlis ne mazāks kā 1 un ne lielāks kā 10; tātad pēc otrā spēlētāja gājiena tiks iegūts summā vismaz 90, bet noteikti ne 100).
Tālāk izspriedīsim, kā pirmajam spēlētājam iegūt summā skaitli 89.
Sāksim no 100 pakāpeniski atņemt 11. Iegūsim šādu skaitļu rindu – 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1 (vai arī augošā secībā 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89).
Tagad ir skaidrs – ja pirmais spēlētājs nosauks „1”, tad, lai arī kādu skaitli nosauktu otrs spēlētājs, viņš pirmajam spēlētājam netraucēs iegūt 12. Tieši tāpat pirmais spēlētājs vienmēr varēs iegūt 23, bet pēc tam – 34, 45, 56, 67, 78 un visbeidzot 89. Un mēs jau iepriekš izspriedām, ka pirmais spēlētājs varēs iegūt 100.

2010./2011. mācību gads

3.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Ja skaitlis $\overline{a543b}$ dalās ar 36, tas dalās gan ar 9, gan ar 4. Apskatīsim atsevišķi dalāmības pazīmes ar skaitļiem 9 un 4.

Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai arī jādalās ar 9, tāpēc $a+5+4+3+b$ dalās ar 9. Tā kā $5+4+3=12$, bet a un b ($0 \le a+b \le 18$) ir cipari, tad vai nu $a+b=6$, vai arī $a+b=15$.

Savukārt atbilstoši dalāmības pazīmei ar 4, skaitļa $\overline{a543b}$ pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim $\overline{3b}$ jādalās ar 4, tātad $\overline{3b}$ ir vai nu 32, vai arī 36, tātad $b=2$ vai $b=6$.

Ja $b=2$, tad nav iespējams, ka $a+b=15$ (jo a ir viencipara skaitlis); tāpēc atliek, ka $a+b=6$, no kurienes iegūstam $a=4$.

Līdzīgi arī, ja $b=6$, nav iespējams $a+b=6$ (jo tad $a=0$, bet tad $\overline{a543b}$ nav piecciparu skaitlis); tāpēc no $a+b=15$ iegūstam $a=9$.

Tātad $a=4$, $b=2$ un $a=9$, $b=6$ ir vienīgās iespējamās a un b vērtības.

2. Aprēķināsim dažus nākamos virknes locekļus:

- ceturtais virknes loceklis vienāds ar $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$;
- piektais virknes loceklis vienāds ar $\frac{5}{12}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$;
- sestais virknes loceklis vienāds ar $\frac{1}{4}-\frac{5}{12}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$;
- septītais virknes loceklis vienāds ar $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{1}{2}$.

Tātad pirmie septiņi virknes locekļi ir $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Tātad piektais, sestais un septītais virknes loceklis ir attiecīgi vienādi ar pirmajiem trim virknes locekļiem. Tā kā katra nākamā virknes locekļa vērtība ir atkarīga no iepriekšējo trīs virknes locekļu vērtībām, 8. loceklis būs vienāds ar ceturto, 9. loceklis – ar piekto (kas vienāds ar pirmo virknes locekli) utt. Tas nozīmē, ka virkne satur tikai 4 dažādus skaitļus, kas atkārtojas secībā $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{12}$, ... (Šādas virknes sauc par periodiskām.)

Tātad gan desmitais, gan 2010. virknes loceklis būs vienāds ar otro virknes locekli – $\frac{1}{3}$.

3. a) Lai pareizi atbildētu uz šo uzdevuma daļu, pietiek parādīt vienu skaitli ar prasīto īpašību, apmainīt tā ciparus vietām un pateikt, cik reizes iegūtais skaitlis ir lielāks nekā tā ciparu summa. Savukārt mēs atradīsim visus skaitļus, kas ir četras reizes lielāki nekā tā ciparu summa, kā arī pierādīsim, ka visiem tiem attiecība pret tā ciparu summu ir viens un tas pats skaitlis (apzīmēsim to ar k).

Apzīmēsim meklēto skaitli ar $\overline{ab}=10a+b$. Atbilstoši uzdevuma prasībām, $10a+b=4(a+b)$. Vienkāršojot iegūstam, ka $2a=b$. Tātad visi divciparu skaitļi, kuriem vieni ir divreiz vairāk nekā desmiti, apmierina uzdevuma prasības. Ir četri šādi skaitļi: 12, 24, 36 un 48.

Apmainot atrastā skaitļa ciparus vietām, iegūstam skaitli $\overline{ba}=10b+a$. Pieņemsim, ka šis skaitlis ir k reizes lielāks nekā tā ciparu summa: $10b+a=k(a+b)$, ko pakāpeniski pārveidojot iegūstam $10b-kb=ka-a$ un $b(10-k)=a(k-1)$. Ievietojam $b=2a$ un izdalām abas vienādojuma puses ar a (to drīkst darīt, jo $a \ne 0$) un iegūstam $2(10-k)=(k-1)$ un tālāk $k=7$.

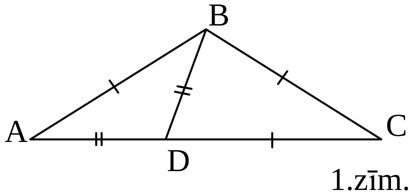
Piezīme. Protams, var apskatīt katru no četriem iespējamajiem skaitļiem un iegūt, ka visos gadījumos iegūst skaitli 7 (piemēram, $84=7(4+8)$).

b) Tagad zinām, ka $10a+b=n(a+b)$. Atkal pārveidojam un pakāpeniski iegūstam $10a-na=nb-b$ un $a(10-n)=b(n-1)$. Līdzīgi kā iepriekš no tā, ka skaitlis ir k reizes lielāks nekā tā ciparu summa, pakāpeniski iegūstam $b(10-k)=a(k-1)$. Izsakām, piemēram, no otrā vienādojuma $b=\frac{a(k-1)}{(10-k)}$, ievietojam pirmajā un izdalām abas vienādojuma puses ar a, tādējādi iegūstam $(10-n)(10-k)=(k-1)(n-1)$.
Atverot iekavas iegūstam $100-10n-10k+nk=nk-n-k+1$, ko vienkāršojot iegūstam $9n+9k=99$ un $k=11-n$. Tātad skaitlis, ko iegūst, samainot dotā divciparu skaitļa ciparus vietām, ir $11-n$ reizes lielāks nekā tā ciparu summa.

4. Tā kā $1<\frac{2010}{1996}<2$, tad $a=1$; iegūstam daļu formā $1+\frac{14}{1996}$. Atņemot 1 un apgriežot daļu $\frac{14}{1996}$, iegūstam $\frac{14}{1996}=\frac{1}{\frac{1996}{14}}=\frac{1}{142+\frac{8}{14}}$. Tātad $b=142$. Līdzīgi rīkojamies tālāk, apgriežot daļu $\frac{8}{14}$ un iegūstam $\frac{8}{14}=\frac{1}{\frac{14}{8}}=\frac{1}{1+\frac{6}{8}}$, tātad $c=1$. Tālāk $\frac{6}{8}=\frac{1}{\frac{8}{6}}=\frac{1}{1+\frac{2}{6}}$, tāpēc $d=1$ un $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, tātad $e=3$.

Esam ieguvuši, ka $\frac{2010}{1996}=1+\cfrac{1}{142+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$.

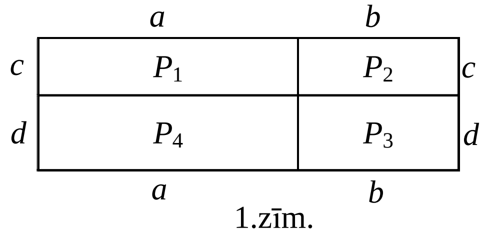
5. Apzīmēsim $\angle BAC=x$ (skat. 1.zīm.). Tā kā ΔABC ir vienādsānu, arī $\angle BCA=x$; arī ΔADB ir vienādānu, tāpēc $\angle ABD=x$. Tālāk $\angle CDB=\angle DAB+\angle DBA=2x$ (jo $\angle CDB$ ir ΔADB ārējais leņķis). Tā kā $BC=CD$, tad arī ΔBCD ir vienādsānu, tāpēc $\angle CBD=\angle CDB=2x$.



1.zīm.

Ikkatra trijstūra visu leņķu summa ir vienāda ar $180°$, tāpēc, apskatot trijstūra ΔBCD leņķus, iegūstam, ka $2x+2x+x=180°$, tātad $5x=180°$ un $x=36°$. Jau sākumā apzīmējām $\angle BAC=x$, tāpēc $\angle BAC=36°$.

6. Atbilde: 2011 cm.
Risinājums. Apzīmēsim mazo taisnstūru perimetrus ar P_1, P_2, P_3, P_4 un to malas ar a, b, c, d (skat. 1.zīm.). Atcerēsimies, ka taisnstūra pretējās malas ir vienādas.



1.zīm.

No perimetra definīcijas seko, ka

$$P_1=2a+2c$$
$$P_2=2b+2c$$
$$P_3=2b+2d$$

$P_4 = 2a + 2d$

Saskaitot P_1 ar P_3 un P_2 ar P_4, iegūstam:

$P_1 + P_3 = 2a + 2c + 2b + 2d = 2a + 2b + 2c + 2d$ un

$P_2 + P_4 = 2b + 2c + 2a + 2d = 2a + 2b + 2c + 2d$.

Tātad „pa diagonāli" novietoto taisnstūru perimetru summas ir vienādas, t.i. $P_1 + P_3 = P_2 + P_4$.

Tātad $2009 + P_3 = 2010 + 2010$, no kā iegūstam, ka $P_3 = 2011$.

7. Varam izveidot tabulu, kurā attēlosim katrā aktivitātē iesaistīto skolēnu skaitu:

	Slēpošana	Hokejs	**Kopā**
Volejbols	126	54	**180**
Futbols	99		**120**
Kopā	**225**		

Ja no 300 skolēniem 60% spēlē volejbolu un pārējie jeb 40% spēlē futbolu, tad 180 skolēni spēlē volejbolu un 120 – futbolu. Ja 30% no visiem volejbolistiem ziemā spēlē hokeju, tad viegli aprēķināt, ka tie ir $180 \cdot \frac{3}{10} = 54$ skolēni. Tātad vasarā ar volejbolu, bet ziemā ar distanču slēpošanu nodarbojas 180 – 54 = 126 skolēni.

Ja 56% no visiem slēpotājiem vasarā spēlē volejbolu un mēs jau ieguvām, ka tie ir 126 skolēni, tad viegli aprēķināt visu slēpotāju skaitu: $56\%x = 126$, $x = 126 : \frac{56}{100} = 225$ skolēni; tādējādi vasarā ar futbolu, bet ziemā ar hokeju nodarbojas $225 - 126 = 99$ skolēni. Tātad vasarā ar futbolu, bet ziemā ar hokeju nodarbojas 120 – 99 = **21** skolēns.

8. No 1 līdz 2010 ir nepāra skaits (1005) pāra skaitļi un nepāra skaits (1005) nepāra skaitļi. Visu pāra skaitļu summa un starpība noteikti būs pāra skaitlis; savukārt nepāra skaita nepāra skaitļu summa un starpība noteikti ir nepāra skaitlis. Bet, tā kā pāra skaitļa un nepāra skaitļa summa vai starpība ir nepāra skaitlis, tad, neatkarīgi no saliktajām zīmēm, visu skaitļu summa būs nepāra skaitlis.

Mazākais pozitīvais nepāra skaitlis ir 1.

Summas vērtību 1 var iegūt, piemēram, tā:

$$\underbrace{-1+2+3-4}_{=0}\underbrace{-5+6+7-8}_{=0}-\ldots\underbrace{-2005+2006+2007-2008}_{=0}-2009+2010=1.$$

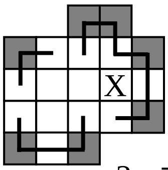
Te sagrupēti skaitļi no 1 līdz 2008 pa četri tā, lai katrās iekavās esošā summa būtu 0, bet skaitļiem 2009 un 2010 priekšā liktas zīmes tā, lai to summa būtu 1.

9. Pirmā rindā stāvošā persona nevarēja būt bruņinieks un teikt taisnību, jo tad visi aiz viņa stāvošie arī būtu bruņinieki, bet tad viņu apgalvojumi, ka viņiem tieši priekšā stāvošā persona ir laupītājs, būtu aplami. Tātad pirmais rindā stāv laupītājs un melo.

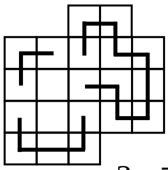
Otrā rindā stāvošā persona apgalvo, ka viņam priekšā stāv laupītājs, kas ir patiesība; tātad viņš ir bruņinieks. Trešā persona saka, ka viņam priekšā ir bruņinieks un melo; tātad viņš ir laupītājs. Turpinot spriedumus iegūstam, ka bruņinieki un laupītāji nostājušies pamīšus, tāpēc rindā stāv **12 bruņinieki** un 13 laupītāji.

10. Tātad mums ir jāapskata, cik daudz dažādus noslēgtus ceļus var izveidot dotajā „kartē" atbilstoši uzdevuma nosacījumiem (uzskatīsim, ka nav nozīmes, kurā virzienā (pa vai pretēji pulksteņa rādītāja virzienam) dodas rūķītis).

Redzam, ka caur katru stūra rūtiņu ir tieši viens iespējamais ceļš, tāpēc rūķītis cauri šīm rūtiņām dosies, kā parādīts 2.zīmējumā. Cauri rūtiņai, kas apzīmēta ar X, arī iespējams tikai viens ceļš, kas parādīts 3.zīm.

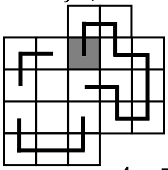


2. zīm.

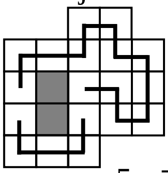


3. zīm.

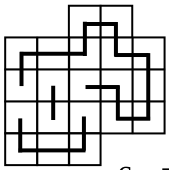
Tālāk apskatīsim rūtiņu, kas iekrāsota 4.zīmējumā.



4. zīm.



5. zīm.

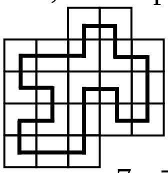


6. zīm.

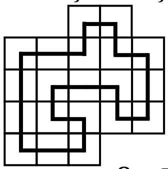
Ja ceļš no šīs rūtiņas tiktu savienots ar apakšējo rūtiņu, tad izveidotos atsevišķs noslēgts ceļš un rūķītis nevarētu apciemot pārējot rūķīšus. Tātad no šīs iekrāsotās rūtiņas rūķītim noteikti jādodas pa kreisi (skat. 5.zīm.).

Ir atlikušas tikai divas rūtiņas, kurās rūķītis vispār nav „ciemojies”. Ja šīs divas rūtiņas netiktu savienotas ar ceļu, tad atkal izveidotos divi noslēgti ceļi. Tāpēc šīs divas rūtiņas noteikti savieno ceļš (skat. 6.zīm.).

Tālāk redzam, ka ir tikai divi veidi, kā var pabeigt šo rūķīša ceļu (skat. 7. un 8.zīm.) .



7. zīm.



8. zīm.

Tātad, neatkarīgi no tā, kurā rūtiņā rūķītis dzīvo, ir iespējami tikai divi dažādi ceļi, kā viņš var apstaigāt kaimiņus.

2010./2011. mācību gads

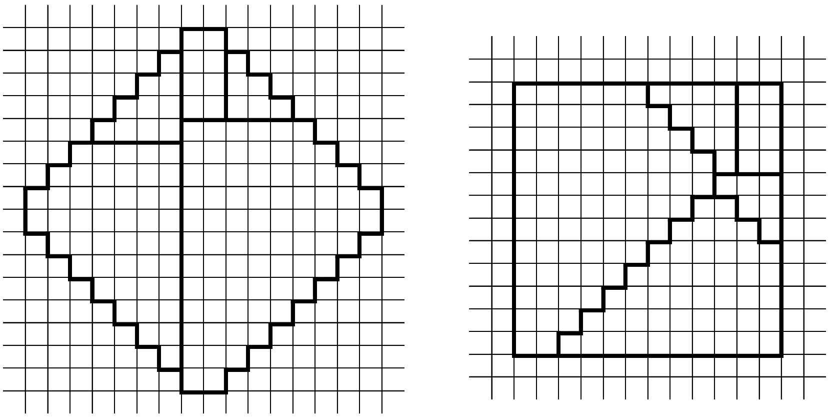
4.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. To var izdarīt, piemēram, šādi:

$$\begin{array}{r} \times\, 285 \\ 39 \\ \hline 2565 \\ 855 \\ \hline 11115 \end{array}$$

2. Ja šo skaitļu ciparu summas būtu vienādas, tad skaitļi, dalot ar 3, dotu vienādus atlikumus, tātad to starpība dalītos ar 3. Bet $13n+9-4n-7=9n+2$ nedalās ar 3.

3. Jā, to var izdarīt. Skat., piemēram, 1.zīm.



1.zīm.

4. Atbilde: to nevar izdarīt.

Risinājums. Apzīmēsim skaitļus, kas atrodas pirmajā un trešajā rūtiņā ar x un y (skat. 2.zīm.). Tad pirmajās trīs rūtiņās esošo skaitļu summa ir $x+101+y$. Arī otrajā, trešajā un ceturtajā rūtiņā esošo skaitļu summai jābūt $x+101+y$, tāpēc ceturtajā rūtiņā jāatrodas skaitlim x.

x	101	y								21		2.zīm.

Tā kā arī ceturtajā, piektajā un sestajā rūtiņā esošo skaitļu summai jābūt $x+101+y$, iegūstam, ka piektajā rūtiņā jābūt skaitlim 101. Turpinot šādus spriedumus, iegūstam, ka skaitļi jāizvieto tā, kā parādīts 3.zīm. Tātad, ja skaitļus var izvietot rūtiņās atbilstoši prasībām, tad to var izdarīt tieši vienā veidā.

x	101	y	x	101	y	x	101	y	x	101	$\boldsymbol{y}$ **= 21**	x

3.zīm.

No izvietojuma redzams, ka $y=21$. Tā kā visās trīspadsmit rūtiņās ierakstīto skaitļu summai jābūt 2011, iegūstam vienādojumu $5x+4\cdot101+4\cdot21=2011$. Veicot pārveidojumus iegūstam, ka $5x=1523$, tātad x nav naturāls skaitlis un uzdevumā prasīto nevar izdarīt.

5. Pieņemsim, ka lapa pārklāta tā, ka uzdevuma nosacījumi izpildās. Acīmredzot katrā rindiņā jābūt pāra skaitam skaitļu „–1”. Tātad arī visā apskatāmajā lapā ir pāra skaits „–1”. Tātad uz lapas novietots pāra skaits kartiņu. Tā kā katra kartiņa nosedz divas rūtiņas, tad lapas rūtiņu skaits $5n$ dalās ar 4. Tā kā skaitļiem 5 un 4 nav citu kopīgu dalītāju kā 1 un –1, tad n dalās ar 4.

Mēs esam pierādījuši: **ja** lapu var pārklāt ar kartiņām tā, kā teikts uzdevuma nosacījumos, n **noteikti** jādalās ar 4. Citiem vārdiem, mēs esam pierādījuši, ka tad, ja n nedalās ar 4, lapu prasītajā veidā apklāt nevar. Bet no tā vēl neseko, ka, ja n dalās ar 4, tad lapu, kuras izmēri ir

$5\times n$ rūtiņas, noteikti var pārklāt tā, kā teikts uzdevuma nosacījumos; tas prasa papildus pierādījumu.
Pierādīsim to.
4.zīmējumā redzams, kā saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem var apklāt lapu, kuras izmēri ir 5×4 rūtiņas.

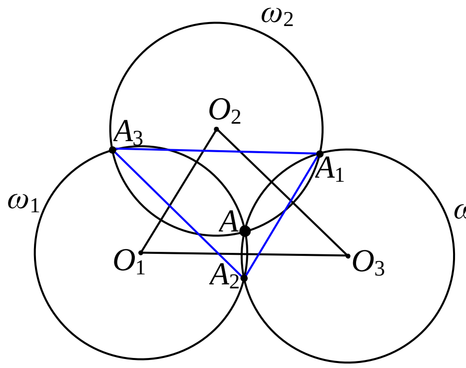
1	–1	–1	1
1	–1	1	–1
–1	–1	1	1
–1	1	–1	1
1	–1	1	–1

4.zīm.

Ja lapas izmēri ir $5\times 4k$ rūtiņas (*k* – jebkurš naturāls skaitlis), tad, saliekot vienu otram blakus *k* tādus taisnstūrus, kādi parādīti 4.zīmējumā, iegūstam lapas izklājumu ar kartiņām, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

6. Apzīmēsim abu Ievas sveču augstumus centimetros ar *h*. Vienā stundā pirmā svece nodeg $\frac{h}{10}$ cm, bet otrā $\frac{h}{8}$ cm. Tādējādi *x* stundās katra svece būs nodegušas attiecīgi $\frac{hx}{10}$ cm un $\frac{hx}{8}$ cm.
Ja Ieva abas sveces iededzina tieši pusdienlaikā, tad pēc *x* stundām no tā brīža sveču augstumi būs attiecīgi $\left(h-\frac{hx}{10}\right)$ cm un $\left(h-\frac{hx}{8}\right)$ cm.
Mums jānoskaidro, pēc cik ilga laika pirmās sveces augstums būs divas reizes lielāks nekā otrās sveces augstums. Tātad mums jāatrod tāds laiks *x*, pēc kura abu sveču augstumi apmierina sekojošu venādojumu $h-\frac{hx}{10}=2\left(h-\frac{hx}{8}\right)$. Tā kā zinām, ka $h\neq 0$, varam vienādojuma abas puses izdalīt ar *h*, un, atverot iekavas, iegūstam vienādojumu $1-\frac{x}{10}=2-\frac{x}{4}$. Reizinot abas vienādojuma puses ar 20, iegūstam $20-2x=40-5x$ un $x=6\frac{2}{3}$.
Tātad pēc 6 stundām un 40 minūtēm jeb **plkst. 18:40** pirmās sveces augstums būs divas reizes lielāks nekā otrās sveces augstums.

7. Pieņemsim, ka ω_1 un ω_2 otrs krustpunkts ir A_3, ω_1 un ω_3 krustpunkts ir A_2, ω_2 un ω_3 krustpunkts ir A_1 (skat. 5.zīm.).



5.zīm.

Pierādīsim, ka $O_1O_2=A_2A_1$. Tā kā visas četrstūra $AO_2A_1O_3$ malas ir vienādas (tās ir vienādu riņķa līniju rādiusi), tad $AO_2A_1O_3$ ir rombs un nogriežņi O_2A_1 un AO_3 ir paralēli un vienādi.

Līdzīgi pierāda, ka O_1A_2 un AO_3 ir paralēli un vienādi. Tātad O_2A_1 un O_1A_2 ir paralēli un vienādi, un $O_1O_2A_1A_2$ ir paralelograms, tāpēc arī $O_1O_2 = A_2A_1$.

Līdzīgi pierāda, ka $O_2O_3 = A_3A_2$ un $O_1O_3 = A_3A_1$.

Tātad $\Delta O_1O_2O_3$ un $\Delta A_1A_2A_3$ ir vienādi, jo to malas ir pa pāriem vienādas (pazīme *mmm*).

8. Atbilde: Vārdiem AHH un HAA ir dažādas nozīmes.

Redzam, ka, izpildot jebkuru no divām operācijām, starpība starp burtu A un H daudzumiem vārdā nemainās. Bet vārdos AHH un HAA šī starpība ir attiecīgi +1 un –1.

9. Apskatīsim apgalvojumus:

„Andris ir vecāks nekā Edgars”,
„Edgars ir vecāks nekā Kristaps”,
„Andris ir jaunāks nekā Kristaps”.

Skaidrs, ka tie visi trīs vienlaicīgi nevar būt pareizi: ja Andris ir vecāks nekā Edgars un Edgars ir vecāks nekā Kristaps, tad Andrim jābūt vecākam nekā Kristapam. Tātad viens no šiem apgalvojumiem noteikti ir nepareizs.

Apskatīsim tagad apgalvojumus:

„Jana ir jaunāka nekā Andris”,
„Andris ir jaunāks nekā Kristaps”,
„Kristaps ir jaunāks nekā Jana”.

Līdzīgi kā iepriekš izspriežam, ka arī vienam no šiem apgalvojumiem jābūt aplamam. Tā kā nepareizs ir tieši viens apgalvojums no visiem septiņiem dotajiem, tad nepareizais apgalvojums sastopams gan pirmajā, gan otrajā izdalītajā apgalvojumu grupā. Bet vienīgais apgalvojums, kas sastopams abās šajās grupās, ir „Andris ir jaunāks nekā Kristaps”. Tātad tas ir nepareizs, un sākumā doto 5.apgalvojumu aizstājam ar pareizu: „Andris ir vecāks nekā Kristaps”.

Tagad, pakāpeniski izmantojot 1., 6., 7. un 2.apgalvojumus (kas visi ir pareizi), secinām, ka Andris ir vecāks nekā Edgars, Edgars vecāks nekā Jana, Jana vecāka nekā Kristaps un Kristaps vecāks nekā Baiba.

10. Tā kā visi pirksti un visas rokas ir vienādas, tad komplektus 12; 1; 2 un 12; 2; 1 uzskatām par vienādiem. Tā kā katrai rokai ir vismaz viens pirksts, tad maksimālais vienas rokas pirkstu skaits ir 13.

Apskatīsim visus iespējamos variantus:

13; 1; 1
12; 1; 2
11; 2; 2
11; 1; 3
10; 2; 3
10; 1; 4
9; 3; 3
9; 2; 4
9; 1; 5
8; 3; 4
8; 2; 5
8; 1; 6
7; 4; 4
7; 3; 5
7; 2; 6
7; 1; 7
6; 3; 6
6; 4; 5
5; 5; 5

Tātad pavisam kopā ir **19** dažādi cimdu komplekti.

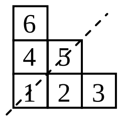
2010./2011. mācību gads

5.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Tā kā bērnu skaitam ciematā jādalās gan ar 3, gan ar 7 (jo bērnu skaitam, kas prot peldēt, braukt ar velosipēdu vai gan peldēt, gan braukt ar velosipēdu, jābūt veselam skaitlim). Tātad bērnu skaitam ciematā jādalās ar 21. Vienīgais skaitlis, kas ir mazāks nekā 40 un dalās ar 21, ir pats 21. Tātad ciematā ir 21 bērns. No šiem bērniem 7 prot peldēt, 14 – braukt ar velosipēdu, bet 3 – gan peldēt, gan braukt ar velosipēdu. Tāpēc bērnu, kas prot vismaz vienu no šīm aktivitātēm, ir $7+14-3=18$. Tātad ciematā ir 21 – 18 = 3 bērni, kas neprot ne peldēt, ne braukt ar velosipēdu.

2. Izsakām vienādību formā $E\cdot I\cdot G\cdot H\cdot T=(T\cdot W\cdot O)\cdot(F\cdot O\cdot U\cdot R)$. Tā kā ir sastopami pavisam 10 dažādi burti, tad tiem atbilst visi cipari no 0 līdz 9. Tātad viens no tiem ir 0. Ja reizinājumā kāds no reizinātājiem ir 0, tad arī reizinājuma vērtība ir 0. Tātad vienas vienādības puses vērtība ir 0, bet tad, lai vienādība būtu patiesa, arī otras vienādības puses vērtībai jābūt 0, bet tas iespējams tikai gadījumā, ja arī otrā pusē viens no reizinātājiem ir 0. Tā kā katram ciparam atbilst tieši viens burts, tad ciparam 0 atbildīs tas burts, kas sastopams abās vienādības pusēs. Vienīgais tāds burts ir *T*. Tāpēc $T=0$ un reizinājums $T\cdot H\cdot R\cdot E\cdot E=\mathbf{0}$.

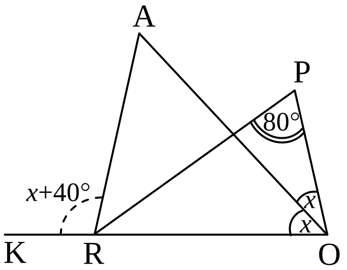
3. Sanumurēsim figūras kvadrātus, kā parādīts 1.zīm. Vienīgā iespējamā simetrijas ass ir „diagonāle”, kas novilkta cauri kvadrātiem 1 un 5. Simetrijas dēļ, ja kvadrāts 4 ir iekrāsots, tad arī kvadrātam 2 jābūt iekrāsotiem; tātad vai nu tie abi ir iekrāsoti, vai arī neviens no tiem (tātad iegūstam 2 iespējas). Līdzīgi varam spriest arī par kvadrātiem 6 un 3 – vai nu tie abi ir iekrāsoti, vai arī neviens no tiem (iegūstam jau $2\cdot 2=4$ iespējas). Skaidrs, ka tas, vai kvadrāts 1 ir iekrāsots vai nav, neietekmēs figūras simetriju; līdzīgs spriedums ir spēkā arī par kvadrātu 5. Tā kā obligāti jāiekrāso vismaz viens kvadrāts, tad kopā ir $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-1=2^4-1=\mathbf{15}$ dažādi veidi, kā iespējams izdarīt uzdevumā prasīto.



1.zīm.

4. Ik pēc katrām divām lappusēm viena lappuse ir izlaista. Tā kā $89=2\cdot 44+1$, tad grāmatā pavisam ir izlaistas 44 lappuses. Tāpēc grāmatas pēdējas lappuses numurs ir $89+44=\mathbf{133}$.

5. Apzīmēsim $\angle AOP=x$, tad arī $\angle AOR=x$ (skat. 2.zīm.), jo *AO* sadala leņķi *POR* divos vienādos leņķos.

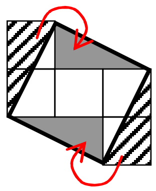


2.zīm.

Atcerēsimies trijstūra ārējā leņķa īpašību: *trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi.*

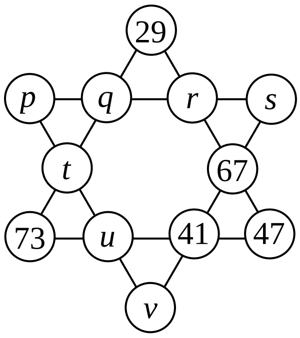
Tā kā $\angle KRP$ ir trijstūra *RPO* ārējais leņķis, tad pēc iepriekš uzrakstītās īpašības $\angle KRP=2x+80°$. Tā kā *AR* sadala $\angle KRP$ divos vienādos leņķos, tad $\underline{\angle ARK=x+40°}$. Savukārt $\angle ARK$ trijstūra *RAO* ārējais leņķis, tāpēc tā lielums izsakāms arī kā $\underline{\angle ARK=x+\angle RAO}$. No pasvītrotajām vienādībām izriet, ka $x+40°=x+\angle RAO$, tātad $\angle RAO=40°$.

6. Lai izdarītu prasīto, uzzīmēsim papīra kastītes izklājumu (ievērojam, ka tai ir tikai 5 skaldnes). Viens no piemēriem, kā šo izklājumu var sagriezt trīs daļās tā, lai no tām var salikt kvadrātu, attēlots 3.zīm.

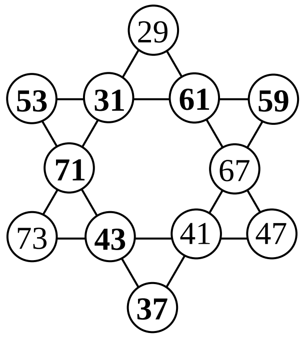


3.zīm.

7. Starp skaitļiem 29 un 73 ir tieši 12 pirmskaitļi: 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73.
Ar *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *v* apzīmēsim nezināmos pirmskaitļus (skat. 4.zīm.).
Apskatīsim summas pirmskaitļiem uz tām taisnēm, uz kurām esošajos aplīšos tieši viens pirmskaitlis nav zināms: $73+u+41+47=47+67+r+29$, tāpēc $u=r-18$. Tātad vai nu $r=71$, $u=53$ un uz vienas taisnes esošo skaitļu summa ir 214, vai arī $r=61$, $u=43$ un summa ir 204.



4.zīm.

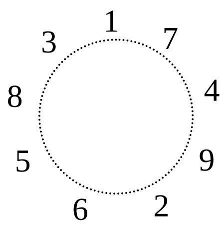


5.zīm.

- Apskatīsim pirmo gadījumu: $r=71$ un $u=53$, tad vēl „brīvie" skaitļi ir 31, 37, 43, 59, 61. Tad $s+v=214-(41+67)=106$. Bet no dotajiem pirmskaitļiem šādus *s* un *v* izvēlēties nevar. Tātad nevar būt, ka $r=71$ un $u=53$.
- Apskatīsim otro gadījumu: $r=61$ un $u=43$, tad vēl „brīvie" skaitļi ir 31, 37, 53, 59, 71. Tad $s+v=204-(41+67)=96$. Tas ir iespējams, ja viens no skaitļiem *s* un *v* ir 37, bet otrs – 59. Savukārt vēl neizmantoti ir skaitļi 31, 53 un 71.
  - Ja $s=37$ un $v=59$, tad $p+q=204-(61+37)=106$, bet šādus skaitļus no vēl atlikušajiem mēs nevaram izvēlēties.
  - Ja $s=59$ un $v=37$, tad $p+q=204-(61+59)=84$. Tātad viens no skaitļiem *p* un *q* ir 31 un otrs – 53. Tātad *t* ir vienīgais neizmantotais skaitlis, t.i., 71. Tad $p=204-(71+43+37)=53$ un $q=31$ (pārbaudot secinām, ka šāda *q* vērtība apmierina uzdevuma nosacījumus).

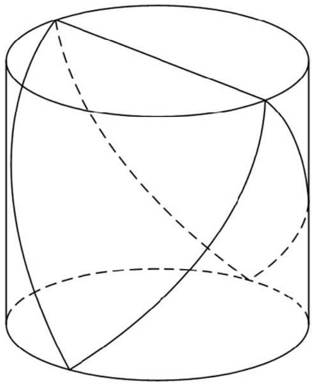
Atbilde: $p=53$, $q=31$, $r=61$, $s=59$, $t=71$, $u=43$, $v=37$ (skat. 5.zīm.).

8. To var izdarīt, kā parādīts, piem., 6.zīm.



6.zīm.

9. Iedomājieties cilindru, kura diametrs ir 2 cm un augstums – arī 2 cm. Nošķeļot šim cilindram divus sānus tā, kā parādīts 7.zīm., iegūstam vajadzīgo korķi (šķēlums uz augšējā pamata iet caur riņķa diametru).



7.zīm.

Protams, pareizs ir arī korķis, kurš sastāv no viens otram galā piestiprinātiem cilindra, kuba un trijstūra prizmas (tieši šādā secībā). Tomēr 7.zīm. attēlotais korķis ir kompaktāks.

10. Kalps pudeles ņēma pavisam **4 reizes**, tātad kopā piesavinājās **16 pudeles**. Tas, kā viņš pēc katras zādzības varēja izkārtot pudeles, attēlots 8.zīm.

1. zādzība

7	7	7
7		7
7	7	7

2. zādzība

8	5	8
5		5
8	5	8

3. zādzība

9	3	9
3		3
9	3	9

4. zādzība

10	1	10
1		1
10	1	10

8.zīm.

Pierādīsim, ka vairāk par 4 zādzībām kalps nevarēja veikt. Kalps ņēma pa pudelei no katra vidējā nodalījuma un, lai piemānītu saimnieku, pēc katras zādzības no tiem pašiem nodalījumiem pa pudelei pielika stūra nodalījumos. Pudeles varēja izvietot arī citādi, bet vienmēr divās pretējās kvadrāta malās vajadzēja atstāt 21 pudeli katrā. Tāpēc viņš nevarēja piesavināties vairāk par $60-2\cdot 21=18$ pudelēm. Tā kā viņš katru reizi paņēma 4 pudeles, tad viņš nevarēja izdarīt vairāk par 4 zādzībām.

2010./2011. mācību gads

6.nodarbības uzdevumu atrisinājumi

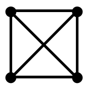
1. Ievērojam, ka, no *vārdu* TWO un ELEVEN burtiem noņemot *vārdu* ONE, paliek *vārdam* TWELVE nepieciešamie burti. Tātad kliņģeris *vārdam* TWELVE kopā maksā $9+16-6=19$ mārciņas.

2. $n^2=\overline{CAUCAU}=1001\cdot\overline{CAU}=7\cdot 11\cdot 13\cdot\overline{CAU}$. Lai n būtu vesels skaitlis, skaitlim $\overline{CAU}$ jāsatur pirmreizinātāji 7, 11 un 13 nepāra pakāpē (vismaz pirmajā pakāpē), kā arī varbūt vēl kādi pirmreizinātāji pāra pakāpē. Bet jau $7\cdot 11\cdot 13=1001>999\geq\overline{CAU}$, tātad tāds naturāls n neeksistē.

3. $202=5a+x\cdot b$, kur a un b ir kastīšu skaits.
Skaitļa $202-5a$ pēdējais cipars ir 2 vai 7, tātad visi skaitļi, kas beidzas ar 2 vai 7 un nepārsniedz 202, var būt $x\cdot b$ vērtības.
Ar gadījumu pārlasi noskaidro, ka x var būt
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 56, 57, 59, 61, 62, 64, 66, 67, 71, 72, 76, 77, 81, 82, 86, 87, 91, 92, 96, 97, 101, 102, 107, 112, 117, 122, 127, 132, 137, 142, 147, 152, 157, 162, 167, 172, 177, 182, 187, 192, 197, 202
Gadījumu pārlasi var veikt pēc a vērtībām:

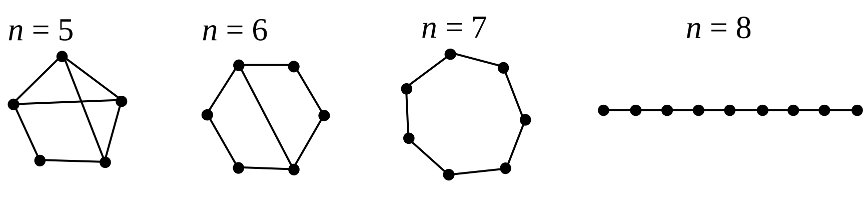
a	$5a$	$xb=202-5a$	Iespējamās x vērtības
1	5	197	1, 197
2	10	192	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192
3	15	187	1,187
		...	...

4. a) Pilsētu skaits n var būt no 5 līdz 14.
Lai pierādītu, ka nevar būt mazāk kā 5 pilsētas, pieņemsim pretējo: mums ir 4 pilsētas. Savienojot katru pilsētu ar katru, iegūstam ne vairāk kā 6 ceļus (skat. 1.zīm.), kas ir pretrunā ar uzdevumā doto. Skaidrs, ka, ja Lanlandē būtu vēl mazāk pilsētu, tad būtu arī vēl mazāk ceļu.



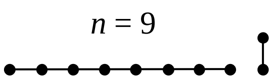
1.zīm.

Pierādīsim, ka nevar būt vairāk kā 14 pilsētas: katrs ceļš savieno divas pilsētas, tāpēc 7 ceļi pavisam var savienot ne vairāk kā $2\cdot 7=14$ pilsētas.
Uzdevuma nosacījumiem atbilstoši piemēri ar pilsētu skaitu n = 5; 6; 7; 8 parādīti 2.zīm.



2.zīm.

Lai iegūtu piemērus pārējiem pilsētu skaitiem, rīkosimies šādi: piemērā, kad n = 8, „nojauksim" ceļu starp pēdējām divām pilsētām, izveidosim vēl vienu pilsētu un savienosim to ar pilsētu, uz kuru aizejošo ceļu nojaucām (skat.3.zīm.).



3.zīm.

Šo procesu turpinām, līdz paliek 7 pilsētu pāri (skat. 4.zīm.)

4.zīm.

b) Vispirms pierādīsim, ka nevar būt vairāk kā 4022 pilsētas. Tā kā katram ceļam ir divi gali, tad, ja pavisam ir 2011 ceļi, tad pilsētu nevar būt vairāk kā $2 \cdot 2011 = 4022$.

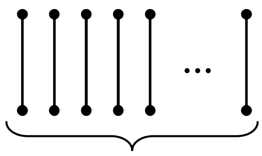
Ja $n \le 63$, tad ceļu skaits $\le \dfrac{63 \cdot 62}{2} = 1953 < 2011$.

Tātad pilsētu skaits varētu būt $64 \le n \le 4022$.

Vēl jāpierāda, ka šādas *n* vērtības ir iespējamas.

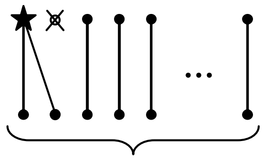
Pieņemsim, ka $n \ge 2012$. Gadījums, kad $n = 4022$, parādīts 5.zīm.

Augšējās rindas pirmo pilsētu apzīmēsim ar zvaigznīti un nosauksim par galvaspilsētu. Tālāk veiksim šādu operāciju: ņemsim pirmo nenosvītroto pilsētu no augšējās rindas (kas nesakrīt ar galvaspilsētu) un nosvītrosim to, bet ceļu, kas šo pilsētu savienoja ar apakšējās rindas pilsētu, vilksim uz galvaspilsētu (skat. 6.zīm.). Pēc katras šādas operācijas pilsētu skaits samazinās par 1, bet ceļu skaits paliek nemainīgs. Šādi var turpināt, kamēr augšējā rindā nenosvītrota palikusi tikai galvaspilsēta (skat. 7.zīm.). Tātad esam parādījuši, ka $2012 \le n \le 4022$.



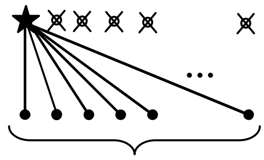
2011 ceļi

5.zīm.



2011 ceļi

6.zīm.



2011 ceļi

7.zīm.

Tagad parādīsim, ka pilsētu skaits var būt no 64 līdz 2011.

Apakšējā rindā atdalīsim pirmās 63 pilsētas un tās neaiztiksim. Šīs 63 pilsētas kopā ar galvaspilsētu nosauksim par kodolu. Kodols ir grafs ar 64 virsotnēm, kurā jau ir novilktas 62 šķautnes. Tajā vēl var novilkt ne vairāk kā $\dfrac{64 \cdot 63}{2} - 63 = 1953$ šķautnes. Veiksim šādu operāciju: ņemsim patvaļīgu pilsētu, kas neatrodas kodolā un nosvītrosim to. Izdzēsīsim arī ceļu, kas šo pilsētu savieno ar galvaspilsētu. Lai nemainītos ceļu skaits, kodolā savienosim divas pilsētas, kas vēl nav savienotas ar ceļu. Tātad pilsētu skaits izpildot šādu darbību samazinās par 1, bet ceļu skaits paliek nemainīgs. Šādi procesu turpina, kamēr visas pilsētas, kas atrodas ārpus kodola, ir nosvītrotas. To vienmēr var izdarīt, jo pilsētu skaits, kas neatrodas kodolā, ir $2011 - 63 = 1948 < 1953$. Šādi iegūsim, ka $64 \le n \le 4022$.

5. Atbilde: 49 kamolus.

Ievērosim, ka 25% no 20 kamolu vērtības ir 5 kamolu vērtība, bet 10% no 5 kamolu vērtības ir puse no kamola vērtības. Tad varam sastādīt vienādojumu $5x + 0{,}5y = 12$, kas apraksta akcijas rezultātā nopirkto kamolu daudzumu. Visizdevīgāk meitenēm ir pirkt 20 kamolus un pēc tam apmainīt čeku un saņemt 25% no to vērtības. Lielākā iespējamā *x* vērtība ir 2, tātad meitenes divas reizes ir pirkušas pa 20 kamoliem. Tālāk iegūstam, ka *y* ir 4. Tas nozīmē, ka meitenes ir 4 reizes pirkušas pa 5 kamoliem.

Skolotāja meitenēm uzdeva nopirkt 49 dzijas kamolus. Parādīsim ar piemēru, kā meitenes rīkojās:

1) meitenes nopērk **40** kamolus un saņem atpakaļ 10 kamolu vērtību;
2) tagad meitenēm ir jānopērk vēl 9 skolotājas prasītie kamoli un no akcijas viņas vēl var nopirkt 10 kamolus;
3) meitenes pērk **15** kamolus un par katriem 5 kamoliem saņem atpakaļ pusi no viena kamola vērtības;

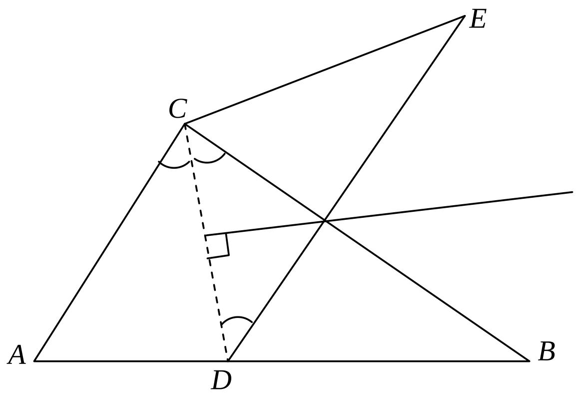
4) meitenēm tagad ir nauda 4 kamoliem, ko iedeva skolotāja un vēl 1,5 kamolu vērtība no akcijas;
5) meitenes pērk **5** kamolus (viņām vēl paliek puse no kamola vērtības) un uzrādot čeku saņem pusi no kamola vērtības;
6) meitenes nopērk vēl **1** kamolu.

Tātad kopā meitenes nopirkušas $40+15+5+1=61$ kamolu, kas ir par 12 vairāk nekā 49.

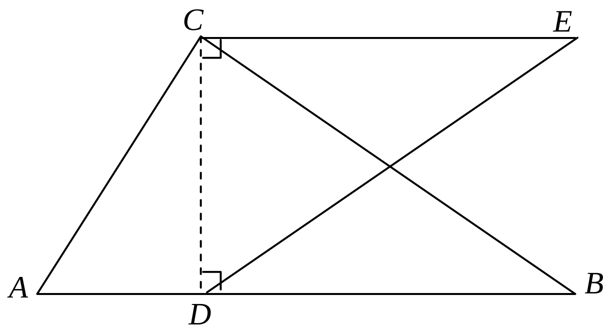
Piezīme. Varam pārbaudīt, ka, gadījumā, ja skolotāja lūdza nopirkt 50 kamolus, meitenes, izmantojot akciju, varēja nopirkt, augstākais, 66 kamolus, t.i., par 16 vairāk; ja skolotāja lūdza nopirkt 48 kamolus, tad patiesībā meitenes varēja nopirkt, augstākais, 59 kamolus, t.i., par 11 vairāk.

6. Atbilde. Abos gadījumos uzdevumā prasīto var izpildīt.

a) Sagriezīsim trijstūri *ABC* pa bisektrisi *CD* (skat. 8.zīm.). Ieguvām divus trijstūrus *ACD* un *BCD*. Trijstūri *BCD* attēlosim simetriski attiecībā pret bisektrises *CD* vidusperpendikulu un iegūsim trijstūri *ECD*. Tā kā $\angle ACD=\angle CDE$, tad $AC \parallel DE$ (jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi) un *ACED* ir trapece ar pamatiem *AC* un *DE* (=*BC*).



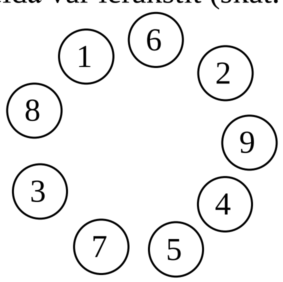
8.zīm.



9.zīm.

b) Sagriezīsim doto trijstūri *ABC* pa tā augstumu *CD* (skat. 9.zīm.), kas atrodas trijstūra iekšpusē (vismaz viens trijstūra augstums atrodas tā iekšpusē). Iegūsim divus trijstūrus *ACD* un *BCD*. Trijstūri *BCD* attēlosim simetriski pret novilktā augstuma *CD* vidusperpendikulu un iegūsim trijstūri *ECD*. Tā kā $\angle ACD=\angle CDE=90°$, tad $AD \parallel CE$ un *ACED* ir trapece ar sānu malām *AC* un *DE* (=*BC*).

7. Atbilde. Skaitļus prasītajā veidā var ierakstīt (skat. 10.zīm.).



10.zīm.

Parādīsim vienu no veidiem, kā pakāpeniski var izveidot uzdevuma atrisinājumu.

Sastādīsim reizinājumu tabulu skaitļiem no 1 līdz 9:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		2	3	4	5	**6**	7	**8**	9

2			**6**	**8**	10	**12**	14	16	**18**
3				**12**	15	**18**	21	**24**	27
4					20	**24**	28	32	36
5						30	35	40	45
6							42	48	54
7								56	63
8									72
9									

Katru divu reizinātāju reizinājumu tabulā ierakstām vienu reizi, t.i., ja, piemēram, rūtiņā, kur jāraksta rezultāts reizinājumam 4×7, ierakstām 28, tad rūtiņu, kur jāraksta reizinājums 7×4, atstājam tukšu. Tāpat arī atstājam neaizpildītas rūtiņas, kur jāraksta reizinājumi 1×1, 2×2, 3×3 u.t.t. (tātad – skaitļu kvadrāti), jo šādi reizinājumi mums nav iespējami (pēc uzdevuma nosacījumiem, katrs skaitlis deviņstūra visās virsotnēs kopā sastopams tieši vienu reizi).
Redzam, ka daži reizinājumi tabulā sastopami divas reizes (piemēram, $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 6$; šie reizinājumi tabulā izcelti treknrakstā), bet pārējie – vienu reizi. Kopā ir 26 reizinājumi, kas neatkārtojas, un 5 – kas atkārtojas. Tā kā diagonāļu skaits deviņstūrim ir $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27 < 5 + 26$, tad uzdevumu, iespējams, var atrisināt.
Atcerēsimies, ka daudzstūra diagonāle ir nogrieznis, kas savieno divas daudzstūra virsotnes, kas **nepieder pie vienas malas**. Tātad, lai skaitlis 6 uz diagonālēm neparādītos divas reizes, tā viens reizinātāju pāris, piemēram, 1 un 6, jānovieto uz blakus esošajām virsotnēm, kuras diagonāle nesavieno, bet otrs pāris – 2 un 3 – uz virsotnēm, kas neatrodas blakus (skaidrs, ka, ja gan 1 un 6, gan 2 un 3 atradīsies viens otram blakus, skaitlis 6 vispār netiks uzrakstīts ne uz vienas diagonāles). Līdzīgā veidā jānovieto arī pārējie skaitļu pāri, kurus sareizinot iegūst vienādus rezultātus. Visi šādi pāri ir:

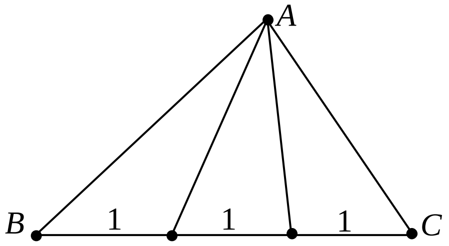
$6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$
$8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$
$12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$
$18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$
$24 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$

Tātad mums jānovieto dotie deviņi skaitļi tā, lai no katras rindiņas vismaz viens reizinātāju pāris atrastos blakus. Novietojot blakus pirmos reizinātāju pārus, varam iegūt šādu izkārtojumu:

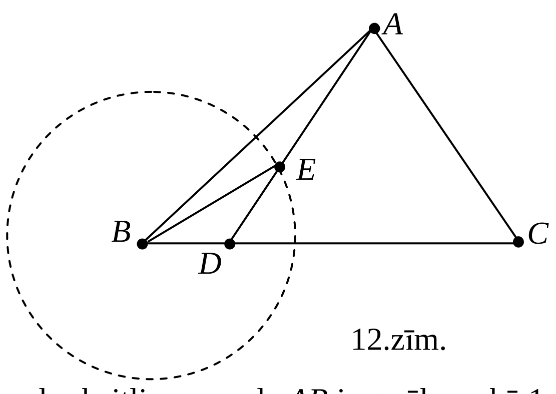
– 3 – 8 – 1 – 6 – 2 – 9 – 4 – 5 – 7 –

Sakārtojot šos skaitļus regulāra deviņstūra virsotnēs, iegūstam 10.zīm. attēloto situāciju.

8. Atbilde. Atbilde. Doto trijstūri var sagriezt uzdevumā prasītajā veidā.
Ja dotajam trijstūrim ir mala, kuras garums ir vesels skaitlis, tad to var sagriezt vairākos trijstūros tā, kā parādīts 11.zīm.



11.zīm.



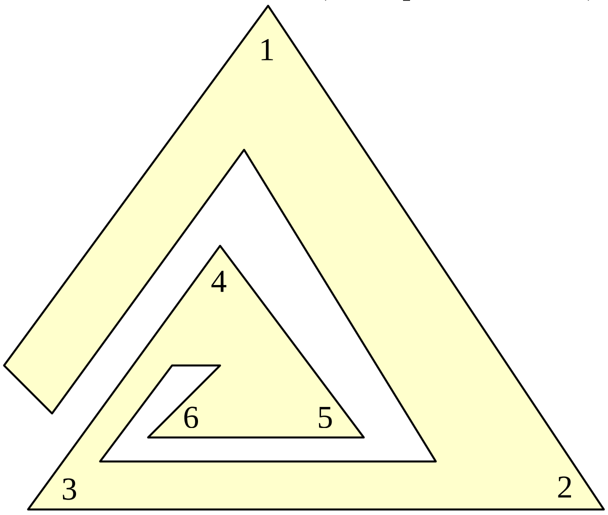
12.zīm.

Ja dotajā trijstūrī nav malas, kuras garums ir vesels skaitlis, un mala *AB* ir garāka nekā 1 cm, tad uz malas *BC* atliksim tādu punktu *D*, lai *DC* garums būtu vesels skaitlis (ja $BC < 1$, tad uzskatīsim, ka punkts *D* sakrīt ar punktu *C*). Novilksim riņķa līniju ar centru punktā *B* un rādiusu

1 cm (skat. 12.zīm.). Tā kā punkts *D* atrodas riņķa iekšpusē, bet punkts *A* – ārpusē, tad riņķa līnija krusto nogriezni *AD* punktā *E*.

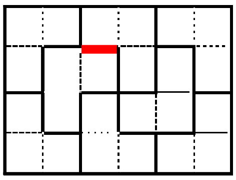
Esam ieguvuši trijstūrus *ABE* un *BED* ar malu $BE = 1$ cm, un trijstūri *ADC* (ja *C* un *D* nesakrīt) ar malas garumu *CD*, kurš ir vesels skaitlis. Trijstūri *ADC* var sagriezt tā, kā parādīts 7.zīm.

9. Atbilde: uzdevumā prasītais daudzstūris eksistē (skat., piem., 13.zīm.).



13.zīm.

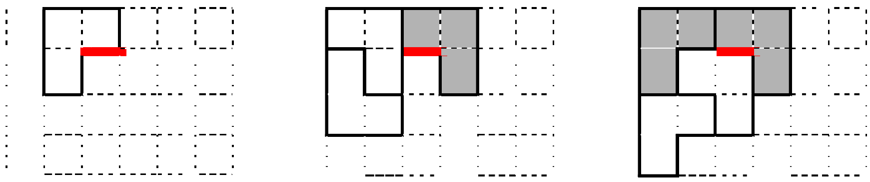
10. Pietiek ievietot 1 barjeru. Vienu piemēru, kā var iztikt ar 1 barjeru, var redzēt 14.zīm.



14.zīm.

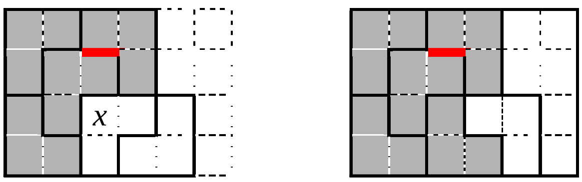
Pārliecināsimies, ka citu *V-sadalījumu* šim taisnstūrim nav.

Ja mēs pirmo „stūrīti" ievietosim tā, kā parādīts 15.zīm., tad taisnstūri vispār nevarēsim sadalīt „stūrīšos". Tātad pirmais stūrītis jānovieto, kā redzams 16.zīm. (skat. iekrāsoto „stūrīti"). Ja tālāk augšējā kreisajā stūrī ievietosim „stūrīti" tā, kā parādīts 16.zīm., tad redzam, ka atkal taisnstūri nevarēsim sadalīt prasītajā veidā. Tātad augšējā kreisajā stūrī „stūrītis jāievieto, kā parādīts 17.zīm., jo citos gadījumos radīsies viena izolēta rūtiņa.



15.zīm. 16.zīm. 17.zīm.

Nākamo apskatām kreiso apakšējo stūri. Ja tajā „stūrīti" ievietosim, kā parādīts 17.zīm., tad pa starp to un iepriekš iegūto izkārtojumu „stūrīti" varēs ievietot tikai vienā veidā (citos gadījumos radīsies vismaz viena izolēta rūtiņa), bet tad atkal tālāk taisnstūri sadalīt prasītajā veidā nevarēsim. Tātad kreisajā apakšējā stūrī „stūrīšu" izkārtojumam jābūt, kā parādīts 18.zīm.



18.zīm. 19.zīm.

Tālāk apskatām, kā var ievietot „stūrīti" vēl brīvajā taisnstūra apakšējā kreisajā malā – ja to darām, kā parādīts 18.zīm., tad nākamās rūtiņas izvietojums ir stingri noteikts un taisnstūri sadalīt „stūrīšos" tālāk nevar. Tātad šī „stūrīša" novietojumam jābūt, kā redzams 19.zīm. Ja tai blakus esošo stūrīti novietosim, kā redzams šajā zīmējumā, tad atkal tālāk sadalījumu iegūt nevaram. Tātad nākamie „stūrīši" jāievieto, kā bija redzams 14.zīm.