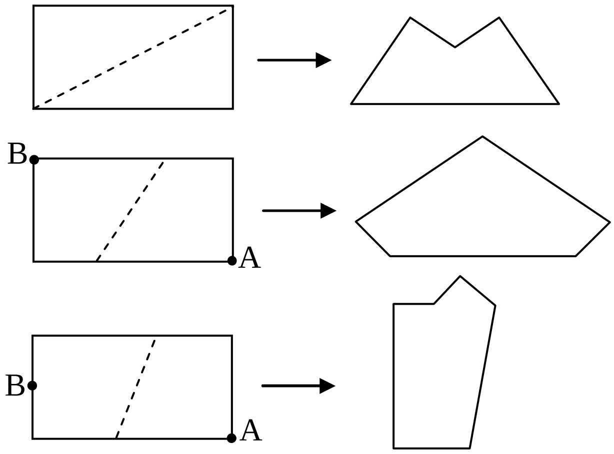
2011./2012. mācību gads
1. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Uzdevumā aprakstītajā veidā var iegūt visas zīmējumā redzamās figūras (skat. 1.zīm.; punkts *A* tiek savienots ar punktu *B*).



1.zīm.

2. Tā kā $0{,}33 = \frac{33}{100} < \frac{m}{n}$, tad $100m > 33n$. Tā kā *n* – naturāls skaitlis, $100m \ge 33n + 1$.

Līdzīgi arī no $\frac{m}{n} < \frac{1}{3}$ iegūstam, ka $n > 3m$ un $n \ge 3m + 1$. Ievietojam šo *n* novērtējumu pirmās rindiņas nevienādībā: $100m \ge 33(3m+1)+1 = 99m + 33 + 1 = 99m + 34$, no kurienes $m \ge 34$. Tāpēc $n \ge 3 \cdot 34 + 1 = 103$.

Tā kā $\frac{33}{100} < \frac{34}{103} < \frac{1}{3}$. Tātad uzdevumā prasītais mazākais naturālais *n* ir 103, kam atbilstošais *m* = 34.

3. Apzīmēsim Līgas bērnu vecumus ar $a+1$, $b+1$, $c+1$ un $d+1$. Tā kā viņu vecumi ir dažādi veseli skaitļi no 2 līdz 16, tad varam pieņemt, ka

$$1 \le a < b < c < d \le 15.$$

Ievērojam, ka $b \le 13$, tātad $b - a \le 12$.

Informāciju par bērnu vecumiem pirms gada var pierakstīt ar vienādojumu $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Savukārt informāciju par bērnu vecumiem pēc gada var pierakstīt kā vienādojumu $(d+2)^2 + (a+2)^2 = (b+2)^2 + (c+2)^2$, kuram atverot iekavas iegūstam $d^2 + 4d + 4 + a^2 + 4a + 4 = b^2 + 4b + 4 + c^2 + 4c + 4$. Atņemot no šī vienādojuma pirmo vienādojumu, kas apraksta bērnu vecumus pirms gada, iegūstam $4d + 4a + \cancel{8} + a^2 = 4b + 4c + \cancel{8} - a^2$.

Izsakām no šīs vienādības a^2: $2a^2 = 4(b + c - a - d)$, tātad $a^2 = 2(b + c - a - d)$. Iegūstam, ka skaitļa *a* kvadrāts ir pāra skaitlis, tātad arī pašam skaitlim *a* jābūt pāra skaitlim. Turklāt tā kā $d > c$, tad $c - d < 0$. Tāpēc iegūto izteiksmi varam uzrakstīt $a^2 = 2(b - a + (c - d)) < 2(b - a) < 24$.

Tātad ir tikai divas iespējamās *a* vērtības, t.i., vai nu $a = 2$ vai $a = 4$.

Pārbaudīsim katru no šīm vērtībām:

- Ja $a = 4$, tad no tā, ka $a^2 < 2(b - a)$ iegūstam, ka $2b > a^2 + 2a = 24$, tātad $b > 12$. Tad noteikti $b = 13$, $c = 14$, $d = 15$. Bet šādas bērnu vecumu vērtības neapmierina nevienu no dotajām vecumu sakarībām, tātad $a \ne 4$.

- Ja $a=2$, tad $b+c-d=4$. Izsakām $d=b+c-4$; šo un a vērtību ievietojam pirmajā vienādojumā, kas izsaka bērnu vecumu sakarību pirms gada un pakāpeniski iegūstam:

$$\cancel{b^2}+\cancel{c^2}+16+2bc-8b-8c=4+\cancel{b^2}+\cancel{c^2}$$
$$2bc-8b-8c+12=0 \quad |:2$$
$$bc-4b-4c+6+10-10=0$$
$$b(c-4)-4(c-4)=10$$
$$(b-4)(c-4)=10$$

Tā kā $b-4$ un $c-4$ ir veseli skaitļi no -2 līdz 10, tad skaitli 10 var izteikt kā divu veselu skaitļu reizinājumu tikai divos veidos: $10=10\cdot 1$ un $10=5\cdot 2$. Tā kā $c>b$ un $d=b+c-4$, ir divas iespējas:

$c=14$, $b=5$ un $d=15$ vai
$c=9$, $b=6$, $d=11$.

Abas šīs iespējas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad ir divi iespējamie gadījumi, kādi var būt Līgas bērnu vecumi: $(3,6,15,16)$ un $(3,7,10,12)$.

4. Visu trīs nezināmo skaitļu summa ir 22. Ja mēs pie pirmā skaitļa pieskaitītu 0,5, tad kopējā visu skaitļu summa arī palielinātos par 0,5. Savukārt, ja no otrā skaitļa atņemtu 1,5, tad summa arī samazinātos par 1,5. Tātad, izdarot minētās darbības ar skaitļiem, visu trīs skaitļu summa būtu $22+0{,}5-1{,}5=\mathbf{21}$.

Tagad uzdevuma noteikumus varētu formulēt šādi: „Trīs skaitļu summa vienāda ar 21, pirmie divi skaitļi ir vienādi, trešais ir 2,5 reizes mazāks nekā pārējie skaitļi."

No šejienes seko, ka trešais skaitlis ir $2\cdot 2{,}5=5$ reizes mazāks nekā pirmā un otrā skaitļa summa (t.i., pirmā un otrā skaitļa summas un trešā skaitļa attiecība ir 5:1), tātad trešais skaitlis ir $21:6=3{,}5$. Tad pirmais un otrais izmainītais skaitlis ir $3{,}5\cdot 2{,}5=8{,}75$.

Tātad sākotnējie skaitļi ir šādi:

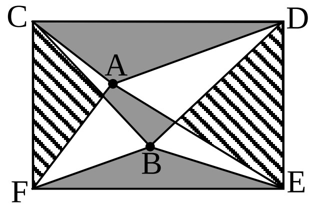
- pirmais skaitlis: $8{,}75-0{,}5=\mathbf{8{,}25}$;
- otrais skaitlis ir $8{,}75+1{,}5=\mathbf{10{,}25}$;
- trešais skaitlis ir **3,5**.

Piezīme. Uzdevuma formulējumu varētu pierakstīt arī kā vienādojumu $(x-0{,}5)+(x+1{,}5)+x:2{,}5=22$, kuru atrisinot iegūst prasītos skaitļus.

5. Ievērojam, ka trijstūru *CAF*, *DAE*, *CBF* un *DBE* (skat. 2.zīm.) laukumu summa vienāda ar taisnstūra *CDEF* laukumu, jo gan pirmo divu trijstūru, gan otro divu trijstūru laukumu summas vienādas ar pusi no taisnstūra laukuma.

No otras puses, visu augšminēto trijstūru laukumu summa vienāda ar balto figūru un divkāršotu iesvītroto figūru laukumu summu.

Analoģiski trijstūru *CAD*, *FAE*, *CBD* un *FBE* laukumu summa vienāda gan ar visa taisnstūra laukumu, gan arī ar balto figūru un divkāršotu iekrāsoto figūru laukumu summu. No šiem apgalvojumiem arī izriet uzdevumā prasītais.



2.zīm.

6. Punkta *A* koordinātas var pierakstīt kā $(a;2a+3)$ un punkta *B* koordinātas var pierakstīt kā $(b;b+2)$. Tad nogriežņa *AB* viduspunkta *M* koordinātas var pierakstīt kā

$\left(\frac{a+b}{2}; \frac{(2a+3)+(b+2)}{2}\right)$. Tā kā punkta M atbilstošās koordinātas ir zināmas, varam sastādīt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{(2a+3)+(b+2)}{2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ 2a+b=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}.$$

Tātad punktu A un B koordinātas ir attiecīgi $A(5;13)$ un $B(3;5)$.

Taisnes, kas iet caur šiem punktiem, vienādojums vispārīgā formā ir $y = kx + m$, ievietojot attiecīgās punktu A un B koordinātas, atkal iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 13 = 5k + m \\ 5 = 3k + m \end{cases},$$

kuras atrisinājums ir $\begin{cases} k = 4 \\ m = -7 \end{cases}$. Tātad meklētās funkcijas vienādojums ir $y = 4x - 7$.

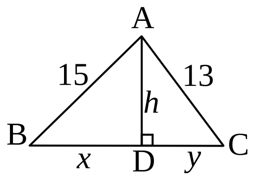
7. Tā kā kartupeļu lauka platība ir 10 800 m^2, tad Ansis vienā stundā norok 3600 m^2, Jānis – 2700 m^2, Kristaps – 1800 m^2.

Apzīmēsim ar t laiku stundās, kādā visu lauku noraktu visi 3 kaimiņi kopā. Tad $3600t + 2700t + 1800t = 10800$, no kurienes iegūstam $t = \frac{4}{3}$. Tātad visu lauku kaimiņi noraktu 80 minūtēs. Tātad puse lauka jeb 5400 m^2 būs norakta 40 minūtēs.

Ar z apzīmējam laiku stundās, kas nepieciešams Ansim un Kristapam, lai kopā noraktu atlikušos 5400 m^2 lauka. Tad $3600z + 1800z = 5400$, no kurienes $z = 1$.

Tātad kopējais laiks, kas nepieciešams visu kartupeļu novākšanai, ir $40 + 60 = 100$ minūtes.

8. Apzīmējam $AD = h$, $BD = x$, $CD = y$ (skat. 3. zīm.).



3.zīm.

Tā kā dots, ka $S_{\Delta ADC} = 30$, tad $30 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot y$ un

$$h \cdot y = 60 \qquad (1)$$

No Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrim ADC seko

$$h^2 + y^2 = 169 \qquad (2)$$

Saskaitot divkāršotu vienādojumu (1) ar vienādojumu (2), pakāpeniski iegūstam

$$2hy + h^2 + y^2 = 120 + 169$$
$$h^2 + y^2 + 2hy = 289$$
$$(h+y)^2 = 289$$
$$|h+y| = 17$$

Tā kā h un y ir malu garumi, tad $h + y = 17$.

Līdzīgā veidā no vienādojuma (2) atņemot divkāršotu vienādojumu (1), iegūstam

$$h^2 + y^2 - 2hy = 169 - 120$$
$$h^2 + y^2 - 2hy = 49$$

$(h-y)^2=49$

$|h-y|=7$

Iegūstam divas nevienādību sistēmas: $\begin{cases} h+y=17 \\ h-y=-7 \end{cases}$ un $\begin{cases} h+y=17 \\ h-y=7 \end{cases}$.

Atrisinot pirmo sistēmu, iegūstam $h=5$ un $y=12$. Ja $h=5$, tad no Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrim *ABD* seko, ka $x^2=225-25=200$, tātad x ir irracionāls skaitlis un tāpēc arī laukums trijstūrim *ABC* arī ir iracionāls skaitlis. Tātad šī h vērtība neder par dotā uzdevuma atrisinājumu.

Atrisinot otro sistēmu, iegūstam $h=12$ un $y=5$. Ja $h=12$, tad līdzīgi kā iepriekš iegūstam, ka $x^2=225-144=81$. Tā kā x ir trijstūra malas garums, tad tas ir pozitīvs skaitlis, tāpēc $x=9$. Tātad $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot(9+5)\cdot 12=84$ cm^2.

9. Sākumā pierādīsim, ka tad, ja *n* ir patvaļīgs pāra skaitlis, vienmēr uzvar pirmais spēlētājs, t.i., Dace. Patiešām, ar pirmo gājienu viņa uzliek savu kauliņu uz divām vidējām spēles galda rūtiņām, tādējādi sadalot spēles galdus divās „pusēs”. Tālāk savus gājienus Dace veic simetriski Anda gājieniem attiecībā pret spēles galda centru. Tādā veidā, ja Andis var veikt gājienu, tad otrā galdiņa „pusē” Dace arī var uzlikt savu spēles kauliņu.

Tāpēc **a)**, **c)** un **d)** gadījumā uzvar Dace.

Apskatīsim **b)** gadījumu, t.i., ja *n* = 9. Pierādīsim, ka šajā gadījumā uzvar Andis.

Apzīmēsim spēles galda rūtiņas sākot no kreisās puses ar x_1, x_2, ..., x_9 (skat. 4. zīm.).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9

4.zīm.

Apskatīsim vairākus gadījumus:

- Pieņemsim, ka Dace ar savu pirmo gājienu uzlikusi kauliņu uz x_1 un x_2. Tad atliek spēles laukums ar izmēru 7×1, uz kura pirmais savu kauliņu liks Andis. Ja viņš savu kauliņu novieto uz x_3 un x_4 (vai arī uz x_8 un x_9 – šis gadījums apskatāms analoģiski), tad atliek spēles laukums ar izmēru 5×1, turklāt nākamā gājienu veic Dace. Viegli pamatot, ka uz šāda izmēra laukuma vienmēr uzvar spēlētājs, kas savu gājienu izdara otrais. Tātad uzvar Andis.
- Pieņemsim, ka Dace savu kauliņu sākumā novieto uz x_2 un x_3. Pa kreisi no šī kauliņa nevar novietot nevienu kauliņu, bet pa labi ir spēles laukums ar izmēru 6×1, uz kura pirmais savu kauliņu liks Andis; kā jau mēs iepriekš apskatījām, tad, ja galdiņa garums ir pāra skaitlis, vienmēr uzvar spēlētājs, kas pirmais veic gājienu, šajā gadījumā – Andis.
- Pieņemsim, ka Dace savu pirmo spēles kauliņu novieto uz x_3 un x_4. Pa kreisi paliek vieta, kur uzlikt tieši vienu kauliņu, bet pa labi – spēles galdiņš ar izmēru 5×1, bet uz šāda laukuma uzvar spēlētājs, kas otrais veic gājienu. Tātad, ja Andis savu kauliņu novieto, piemēram, uz x_1 un x_2, tad Dace pirmā izdara gājienu uz atlikušā 5×1 lauka, tātad atkal uzvar Andis.
- Visbeidzot pieņemsim, ka Dace pirmo kauliņu novieto uz x_4 un x_5 (pārējie Daces sākuma gājieni ir simetriski šim un iepriekš apskatītajiem gadījumiem). Tad pa kreisi atliek trīs rūtiņas, bet uz tām var nolikt tikai vienu spēles kauliņu. Pa labi no Daces novietotā kauliņa ir spēles laukums ar izmēru 4×1. Ja Andis novieto savu spēles kauliņu uz x_6 un x_7 vai x_8 un x_9, tad uz spēles galda vēl var novietot tieši divus kauliņus. Tā kā Dace veic nākamo gājienu, tad pēc tam paliks vieta, kur novietot tikai vienu – Anda – kauliņu.

Esam apskatījuši visus iespējamos variantus, kā Dace var sākt spēli, ja *n* = 9; tātad varam secināt, ka jebkurā gadījumā uzvar Andis.

10. No uzdevuma nosacījumiem izriet: ja A un B ir draugi, tad jebkurš no pārējiem valsts iedzīvotājiem ir vai nu viņu kopīgs draugs, vai arī kopīgs ienaidnieks; pretējā gadījumā viņi visi trīs nevarētu salabt.

Apskatīsim visus A draugus. No iepriekšminētā apgalvojuma secinām, ka viņi visi draudzējas arī savā starpā un ir ienaidnieki ar visiem pārējiem valsts iedzīvotājiem.

Pieņemsim, ka A un visi viņa draugi pēc kārtas sastrīdas ar visiem saviem draugiem un salabst ar visiem saviem ienaidniekiem. Šo darbību rezultātā izrādīsies, ka visi valsts iedzīvotāji savā starpā draudzējas.

Patiešām, ja A pirmais sastrīdas ar visiem saviem draugiem un salabst ar ienaidniekiem, bet pēc tam visi viņa bijušie draugi ar viņu atkal ir salabst, bet bijušie ienaidnieki ir kļuvuši A draugi un tātad arī draugi savā starpā.

2011./2012. mācību gads
2. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Prasītajā veidā var izteikt visus piecpadsmit pirmos naturālos skaitļus.

Skaitļus no 1 līdz 4 var izteikt šādi (ja ir mazāk nekā četri saskaitāmie, trūkstošo vietā raksta 0^2):

$1=1^2$;
$2=1^2+1^2$;
$3=1^2+1^2+1^2$;
$4=2^2$.

Skaitļus no 5 līdz 8 var viegli iegūt, pieskaitot 2^2 pie šiem jau iegūtajiem skaitļiem:

$5=1^2+2^2$;
$6=1^2+1^2+2^2$;
$7=1^2+1^2+1^2+2^2$;
$8=2^2+2^2$.

Skaitli 9 izsakām kā $9^2=3^2$. Savukārt skaitļus no 10 līdz 15 iegūst, skaitļa 9 izteiksmei pieskaitot attiecīgi skaitļu 1, 2, 3, 4, 5 un 6 izteiksmes:

$10=1^2+3^2$;
$11=1^2+1^2+3^2$;
$12=1^2+1^2+1^2+3^2$;
$13=2^2+3^2$;
$14=1^2+2^2+3^2$;
$15=1^2+1^2+2^2+3^2$.

Piezīme. Franču matemātiķis Lagranžs jau 1770. gadā pierādīja, ka jebkurš naturāls skaitlis var tikt uzrakstīts kā četru veselu skaitļu kvadrātu summa.

2. Apzīmēsim ar P, N, G un F attiecīgi Paskāla, Ņūtona, Galileja un Fermā iegūto punktu skaitu. Tad uzdevumā dotās sakarības var pierakstīt vienādojumu veidā:

$$\frac{P+N}{2}=16;$$
$$\frac{P+F}{2}=13;$$
$$\frac{N+F}{2}=18.$$

Pareizinot vienādojumu abas puses ar 2, iegūstam vienādojumus

$P+N=32$
$P+F=26$
$N+F=36$

Saskaitot šos vienādojumus, iegūstam:

$2P+2N+2F=94$,

tātad $P+N+F=47$.

Tā kā $\dfrac{P+N+F+G}{4}=16$, tad $P+N+F+G=64$. Ievietojot $P+N+F=47$ iegūtajā vienādojumā, iegūstam $47+G=64$. No šejienes $G=17$.

3. Sākumā izmantosim to, ka *10-horizontāli* ir skaitļa *4-horizontāli* dalītājs. Tā kā $23705=5\cdot 11\cdot 431$, tad skaitļa 23705 dalītāji ir 1, 5, 11, 55, 431, 2155, 4741 un 23705. No šiem tikai skaitlim 431 ir 3 cipari, tātad **10-*horizontāli* ir 431**.

Zinām, ka 5-*vertikāli* dalās ar 36 un sākas ar 5. Šis skaitlis var būt 504, 540 vai 576. Bet 8-*horizontāli* sastāv no 1, 4, 6, 8 un 9 (jo skaitļos *4-horizontāli* un *8-horizontāli* kopā katrs cipars ir izmantots tieši vienu reizi), tātad 540 neder. Lai noskaidrotu 5-*vertikāli* vērtību, izmantosim to, ka 9-*vertikāli* ir skaitļa 5-*vertikāli* dalītājs. Skaitlis 9-*vertikāli* sastāv no 2 cipariem un beidzas ar 3. Pārbaudīsim, vai kādam no skaitļiem 504 un 576 ir dalītājs, kas atbilst skaitlim 9-*vertikāli*:

$$504 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$$
$$576 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

Redzam, ka skaitlim 576 nav divciparu dalītāja, kas beigtos ar 3, bet skaitlim 504 šāds dalītājs ir 63. Tātad **5-*vertikāli* ir 504** un **9-*vertikāli* ir 63**.

Tagad izmantosim 2) nosacījumu: 4 · (23705 – *4-vertikāli* + 5) = *1-vertikāli*. Tātad 4 ·4-*vertikāli* = 94840 – 1-*vertikāli*. No šīs izteiksmes secinām, ka skaitļa 4 ·4-*vertikāli* pēdējais cipars ir 6, tātad skaitļa 4-*vertikāli* pēdējais cipars ir 4 vai 9. Tā kā katru ciparu drīkst izmantot tieši divas reizes, bet abi četrinieki jau ierakstīti krustskaitļu mīklas rūtiņās, tad 4-*vertikāli* pēdējais cipars noteikti ir 9.

4-*vertikāli* vidējais cipars var būt 1, 2, 5, 6, 7, 8 vai 9 (cipars 0 jau ir izmantots divas reizes). Pakāpeniski pārbaudot šīs vērtības, ievietojot katru reizi iegūto skaitli 4-*vertikāli* izteiksmē 1-*vertikāli* = 4 · (23705 – *4-vertikāli*) + 5, redzam, ka vienīgais derīgais cipars ir 8. Tātad **4-*vertikāli* ir 289**.

Atlikušajās rūtiņās var ievietot ciparus 1, 2, 5 un 7. Skaitlis 1-*horizontāli* ir trīsciparu skaitlis, kas dalās ar 36 un sākas ar 9. Vienīgā iespēja no atlikušajiem cipariem izveidot šādu skaitli, ir, ja izmanto ciparus 7 un 2, t.i., **1-*horizontāli* = 972**.

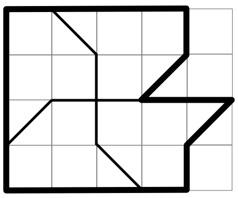
Skaitļa 8-*horizontāli* trūkstošais cipars ir 1, jo visi pārējie cipari jau ir izmantoti 4-*horizontāli* un 8-*horizontāli*. Tāpēc atlikušais skaitlis **7-*horizontāli* ir 50**.

Atrisināto krustskaitļu mīklu skat. 1.zīm.

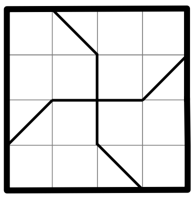
	^{1} **9**	^{2} **7**	^{3} **2**	
^{4} **2**	**3**	**7**	**0**	^{5} **5**
^{6} **8**	**6**		^{7} **5**	**0**
^{8} **9**	**8**	^{9} **6**	**1**	**4**
	^{10} **4**	**3**	**1**	

1. zīm.

4. Attēloto figūru var sagriezt, piemēram, tādās daļās, kā parādīts 2.zīm., no kurām var salikt kvadrātu (skat. 3.zīm.).



2. zīm.



3. zīm.

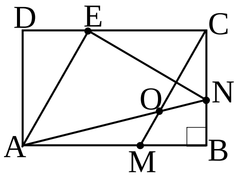
5. Var ievērot, ka burti sadalīti grupās pēc tā, vai to pieraksts veido simetrisku (aksiāli vai centrāli) figūru vai nē. Simetriskās figūras sadalītas 1., 2. un 3.grupā, bet nesimetriskās – 4.grupā.

Figūras, kurām ir **tikai** vertikālā simetrijas ass, atrodas 1.grupā; figūras, kurām ir **tikai** horizontālā simetrijas ass, atrodas 2.grupā. Centrāli simetriskas figūras (tātad arī tās, kurām ir gan horizontālā, gan vertikālā simetrijas ass) atrodas 3.grupā.

Pēc šī paša principa sadalot latviešu alfabēta burtus, iegūstam šādu sadalījumu:

1. grupa: A Ā Ī M T U Ū V
2. grupa: B C D E K
3. grupa: H I N O S Z
4. grupa: Č Ē F G Ģ J Ķ L Ļ Ņ P R Š Ž

6. Atliksim punktu *D* tā, lai izveidojas taisnstūris *ABCD* (skat. 4.zīm.), un punktu *E* uz taisnstūra malas *DC* tā, lai $AE \parallel CM$.



4. zīm.

Savienojot ar taisnes nogriezni punktus *E* un *N*, iegūst taisnleņķa trijstūri *ECN*.
Tā kā *ABCD* – taisnstūris un pēc dotā $AM = CB$, tad $AM = AD$. Un tā kā *AECM* – paralelograms (tā pretējās malas pa pāriem paralēlas), tad $EC = AM = AD$.
Savukārt $DE = DC - EC = AB - AM = MB = CN$. Tā kā $EC = AD$ un $DE = CN$, tad taisnleņķa trijstūri *ECN* un *ADE* vienādi pēc pazīmes *kk*. Tātad arī to hipotenūzas ir vienādas, t.i., $AE = EN$ un trijstūris AEN - vienādsānu.
Leņķu DEA un CEN summa ir $90°$, tātad $\angle AEN = 90°$ un $\angle EAN = 45°$. Tā kā $\angle EAN$ un $\angle CON$ – kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm, tad tie ir vienādi, t.i., $\angle CON = 45°$, k.b.j.

7. Varam pieņemt, ka skaitlis, kas atbilst abu skolotāju dzimšanas gadam, nav mazāks nekā 1911 un nav lielāks par 1993 (pretējā gadījumā skolotājām būtu vai nu vairāk nekā 100 gadi, vai arī viņas būtu nepilngadīgas).
Ar *x* apzīmēsim mācību grāmatas lappušu skaitu, kas izņemtas līdz skolotājas nomaiņai. Šo lappušu numuru summa vienāda ar $\frac{x(x+1)}{2}$.

Tātad varam sastādīt nevienādību sistēmu: $\begin{cases} \frac{x(x+1)}{2} \geq 1911 \\ \frac{x(x+1)}{2} \leq 1993 \end{cases}$. Vienīgā naturālā *x* vērtība, kas apmierina šīs abas nevienādības, ir 62. Tātad Sandras iepriekšējā skolotāja dzimusi 1953. gadā.
Ja ar *y* apzīmējam grāmatas visu lappušu skaitu, tad jaunās skolotājas dzimšanas gads vienāds ar $\frac{y(y+1)}{2} - 1953$. Atkal sastādām nevienādību sistēmu $\begin{cases} \frac{y(y+1)}{2} - 1953 \geq 1911 \\ \frac{y(y+1)}{2} - 1953 \leq 1993 \end{cases}$, par kuras vienīgo atrisinājumu naturālos skaitļos der $y = 88$. Tātad jaunā skolotāja dzimusi 1963.gadā, un viņa ir par 10 gadiem jaunāka nekā iepriekšējā skolotāja.

8. Ja ar regulārajiem daudzstūriem plakne ir pilnībā pārklāta, tad to leņķu summai, kas atrodas ap kopīgo virsotni, jābūt $360°$. Regulāra daudzstūra visu leņķu lielumi ir vienādi, tātad tiem jābūt skaitļa 360 veseliem dalītājiem.
Varam sastādīt tabulu, kur attēloti regulāru *n*-stūru leņķu lielumi:

n	Leņķa lielums
3	$60°$
4	$90°$
5	$108°$

6	120°
8	135°
9	140°
10	144°
...	

Redzam, ka 360 dalās tikai ar 60, 90 un 120. Tātad plakni var pārklāt ar regulāriem trijstūriem, četrstūriem vai sešstūriem.

9. a) Kopējā zināmā sešu vērtējumu summa bija 55. Tā kā jānoņem viens augstākais vērtējums, tad noteikti jāatmet 10. Ja septītais tiesnesis būtu ielicis Annai vērtējumu 10, tad Annas kopējais vērtējums (ņemot vērā arī „atmesto" zemāko vērtējumu) būtu 47, kas ir pretrunā ar doto. Atņemot no zināmo sešu punktu kopsummas augstāko jau zināmo vērtējumu – 10, iegūst kopsummā 45, kas ir dotais Annas kopējais vērtējums. Tātad septītā tiesneša vērtējums ir zemākais; tas var būt jebkurš naturāls skaitlis no 1 līdz 8.

b) Zināmo punktu kopsumma ir 39. Ja pārējie divi vērtējumi nav lielāki par 8, tad augstākais vērtējums – 9 – tiek „atmests", un Kates kopējais vērtējums ir ne lielāks kā $4 \cdot 8 + 7 = 39$. Tātad no viena no tiesnešiem Kate ieguva 9 vai 10, kas tika „atmests". Tā kā tagad Katei ir 39 punkti, viņai jāiegūst vēl viens punkts no pēdējā tiesneša. To var izdarīt, ja zemākais vērtējums – 7 – tiek atmests, bet tā vietā viņa iegūst 8 no pēdējā tiesneša. Tātad viens no pārējo divu tiesnešu vērtējumiem bija 9 vai 10, bet otrs – 8.

c) Šķirosim gadījumus, atkarībā no tā, vai Zaiga ieguva 10 punktus vai nē:

- Pieņemsim, ka Zaiga neieguva nevienu vērtējumu 10. Tad 9 ir augstākais vērtējums, kas tika „atmests. Tā kā visu tiesnešu vērtējumi bija dažādi, Zaiga kopsummā iegūt 27 punktus varēja vienā no diviem gadījumiem:
  - Ja vērtējums 2 nav zemākais, tad $2+5+8+*+*=27$ (ar * apzīmējam nezināmos vērtējumus); tātad divu nezināmo vērtējumu summai jābūt 12, bet šie vērtējumi nedrīkst būt 1, 2, 5, 8, 9 vai 10. Bet nekādu divu skaitļu 3, 4, 6 un 7 summa nav 12.
  - Ja vērtējums 2 ir zemākais, tad $5+8+*+*+*=27$; tātad trīs nezināmo vērtējumu summai jābūt 14, bet nedrīkst būt 1, 2, 5, 8, 9 vai 10. Vienīgā iespēja ir $3+4+7=14$.
- Pieņemsim, ka Zaiga ieguva 10 punktus. Tā kā visi vērtējumi bija dažādi, tad 10 tika „atmests". Kopējais vērtējums 27 varēja tikt iegūts vienā no šiem veidiem:
  - Ja 2 nav zemākais vērtējums, tad $2+5+8+9+*=27$; tātad $*=3$, kas ir atļauta vērtība.
  - Ja 2 ir zemākais vērtējums, tad $5+8+9+*+*=27$; tad diviem nezināmajiem vērtējumiem summā jābūt 5, bet tie nedrīkst būt 1, 2, 5, 8, 9 vai 10. Tas nav iespējams, jo nekādu divu skaitļu 3, 4, 6 un 7 summa nav 5.

Tātad Zaigas priekšnesuma pārējo trīs tiesnešu vērtējumi varēja būt 3, 4, un 7 vai 1, 3 un 10.

10. 1) Pieņemsim, ka nosmērējies ir viens pasažieris. Viņš redz, ka pārējo pasažieru sejas ir tīras. Bet, tā kā vagonā kāds ir nosmērējies, tad tas ir viņš. Tāpēc viņš jau pirmās stāvēšanas laikā iet mazgāties. Bet uzdevumā teikts, ka visi pasažieri bija tīri tikai pēc 4 vilciena pieturām.

2) Pieņemsim, ka vagonā ir divi nosmērējušies pasažieri. Katrs no viņiem spriež tā: „Es redzu vienu pasažieri ar netīru seju. Ja es esmu tīrs, tad viņš pirmajā pieturā dosies mazgāties". Bet pieturā neviens pasažieris neiet mazgāties. Tad abi nosmērējušies pasažieri turpina spriest tā: „Tātad netīrais pasažieris, kuru es redzu, nebija pārliecināts, ka ir nosmērējies; bet tad viņš noteikti domā, ka netīrs esmu es, jo arī viņš redz, ka visi pārējie ir tīri." Otrajā pieturvietā abi netīrie pasažieri dodas mazgāties. Tātad jau pēc divām pieturām visi vagona pasažieri bija tīri, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

3) Pieņemsim, ka nosmērējušies ir trīs pasažieri. Katrs no viņiem domā: „Es redzu divus netīrus pasažierus. Ja es esmu tīrs, tad pārējie divi aizies mazgāties otrajā apstāšanās reizē" (sk. 2.

gadījumu). Bet otrajā pieturā neviens negāja mazgāties, tāpēc visi netīrie pasažieri bija pārliecināti, ka arī ir netīri, un trešajā pieturā aizgāja mazgāties. Tātad pēc trim pieturām visi pasažieri bija tīri, bet tas atkal ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.
4) Pieņemsim, ka nosmērējušies ir četri pasažieri. Katrs no viņiem redz trīs netīrus pasažierus un veic tādus pašus spriedumus kā iepriekšējā gadījumā. Viņi gaida trešo pieturvietu, bet, kad tajā neviens pasažieris neiet mazgāties, visi četri netīrie pasažieri saprot, ka ir netīri un dodas mazgāties. Tādā veidā pēc 4 pieturām visi pasažieri ir tīri, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.
Gadījumā, ja nosmērējušies vairāk nekā četri pasažieri, veicot analoģiskus spriedumus, var pārliecināties, ka būs nepieciešamas vairāk nekā 4 pieturas, lai visi atkal būtu tīri.

2011./2012. mācību gads
3. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Vienkāršojot izteiksmi $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$, iegūstam $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}$.

Redzam, ka katru divu daļu reizinājumā *saīsinās* vienas daļas saucējs un otras daļas skaitītājs. Pēc visām saīsināšanām, skaitītājā paliek tikai $n+1$, bet saucējā 2. Tātad iegūstam, ka dotās izteiksmes vērtība vienāda ar $\frac{n+1}{2}$. No šejienes redzam, ka daļa ir vesels skaitlis tad un tikai tad, ja *n* ir nepāra skaitlis.

2. Izmantosim šādu sakarību: ja taisnstūris ir sadalīts četros taisnstūros, kuru laukumi ir *J*, *K*, *L*, *M* (sk. 1.zīm.), tad $J\cdot M = K\cdot L$, jo $J\cdot M = ac\cdot bd = abcd = bc\cdot ad = K\cdot L$.

	a	b
c	J	K
d	L	M

1.zīm.

Dotajā taisnstūrī nezināmos taisnstūru laukumus apzīmēsim ar *A*, *B*, *C*, *D* un malu garumus ar *p*, *q*, *r*, *x*, *y*, *z*, kā parādīts 2.zīm.

	p	q	r
x	42	A	15
y	7	B	C
z	D	8	5

2.zīm.

No iepriekš pierādītās sakarības varam seko, ka $A\cdot 5 = 8\cdot 15$, tātad $A = 8\cdot 3 = 24$. Līdzīgi

$C\cdot 42 = 7\cdot 15$, no kurienes $C = 2{,}5$;

$D\cdot 15 = 42\cdot 5$, tāpēc $D = 14$;

$B\cdot 42 = 7\cdot A = 7\cdot 24$, tātad $B = 4$.

Tātad pārējo taisnstūru laukumi ir šādi: $A = 24\ \text{cm}^2$, $B = 4\ \text{cm}^2$, $C = 2{,}5\ \text{cm}^2$, $D = 14\ \text{cm}^2$.

3. Dotās sakarības varam uzrakstīt vienādojumu veidā:

$$a+b = \frac{1}{2}(c+d) \qquad (1)$$

$$a+c = 2(b+d) \qquad (2)$$

$$a+d = \frac{3}{2}(b+c) \qquad (3)$$

Redzam, ka uzdevumā ir 4 nezināmi skaitļi, bet no dotajiem nosacījumiem varam izveidot tikai trīs vienādojumus. Tātad, atrisinot šo trīs vienādojumu sistēmu, nevarēsim viennozīmīgi noteikt skaitļu *a*, *b*, *c* un *d* vērtības. Tāpēc jācenšas atrast sakarības starp šiem skaitļiem un novērtēt to summas vērtību.

No vienādojuma (1) varam iegūt sakarību

$$a = -b + \frac{1}{2}(c+d). \qquad (4)$$

Ievietojot šo a izteiksmi vienādojumā (2), iegūstam $-b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d+c=2b+2d$, kuru vienkāršojot iegūstam $\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}d=3b$. Reizinot iegūtā vienādojuma abas puses ar $\frac{2}{3}$ (jeb dalot ar $\frac{3}{2}$), iegūstam

$$c-d=2b. \qquad (5)$$

Līdzīgi, ievietojot (4) vienādojumā (3), iegūstam $-b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d+d=\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}c$, tātad

$$-c+\frac{3}{2}d=\frac{5}{2}b. \qquad (6)$$

Saskaitot vienādojumus (5) un (6), iegūstam $\frac{1}{2}d=\frac{9}{2}b$, tātad $d=9b$.

Ja varēsim noteikt summas $b+d$ mazāko vērtību, tad no sakarības (2) atradīsim arī $a+c$ mazāko vērtību, un tad būs viegli noteikt summas $a+b+c+d$ mazāko vērtību.

Tā kā b un d ir naturāli skaitļi, tad to mazākās iespējamās vērtības, lai $d=9b$, ir $b=1$ un $d=9$. Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (5), iegūstam $c=11$, bet tad no sakarības (4) varam aprēķināt, ka $a=9$. Pārbaudot iegūtās skaitļu vērtības, ievietojot vienādojumos (1), (2) un (3), secinām, ka tās apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad mazākā summas $a+b+c+d$ vērtība ir 30.

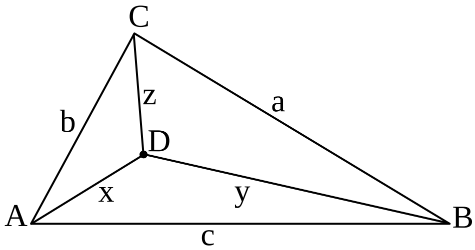
4. Redzam, ka reizinājums $C\cdot C$ ir skaitlis, kas beidzas ar ciparu *C*. Tas ir iespējams, ja $C=1$, $C=5$ vai $C=6$. Reizinājums ir nepāra skaitlis tad un tikai tad, ja visi reizinātāji ir nepāra skaitļi, tāpēc gan $\overline{AC}$, gan $\overline{CA}$ jābūt nepāra skaitļiem, tātad gan *A*, gan *C* ir nepāra cipari. Tātad $C=1$ vai $C=5$ un $C\neq 6$.

Tā kā $\overline{CA}$ arī ir nepāra skaitlis, tad *A* var būt 1, 3, 5, 7 vai 9. Apskatīsim gadījumu, kad $C=5$. Ja $A=1$, tad $15\cdot 1=15$, bet pēc uzdevumā dotā šim reizinājumam ir jābūt trīsciparu skaitlim. Ja *A* ir 3, 5, 7 vai 9, tad pirmā reizinātāja reizinājumam ar otrā reizinātāja pirmo ciparu jābūt divciparu skaitlim, bet visi šie reizinājumi (attiecīgi $35\cdot 5$, $55\cdot 5$, $75\cdot 5$ un $95\cdot 5$) ir trīsciparu skaitļi. Tātad vērtība $C=5$ neapmierina uzdevuma nosacījumus; no šejienes seko, ka *C* var būt tikai 1. Tad iespējamās *A* vērtības var būt 1, 3, 5, 7 un 9. Ja *A* ir 1, tad $11\cdot 1=11$ nav trīsciparu skaitlis, tāpēc $A\neq 1$. Ja $A=3$, tad $\overline{AC}\cdot C=31\cdot 3=93$, kas ir divciparu skaitlis, bet $\overline{AC}\cdot C$ ir jābūt trīsciparu skaitlim. Ja $A=7$ vai $A=9$, tad $\overline{AC}\cdot\overline{CA}$ ($71\cdot 17$ vai $91\cdot 19$) – četrciparu skaitlis, bet ir nepieciešams trīsciparu skaitlis. Tātad, vienīgā iespējamā *A* vērtība ir 5, un uzdevumam ir viens vienīgs atrisinājums (sk. 3.zīm.).

$$\begin{array}{r} 5\;1 \\ \cdot\;\;1\;5 \\ \hline 2\;5\;5 \\ 5\;1\;\;\; \\ \hline 7\;6\;5 \end{array}$$

3.zīm.

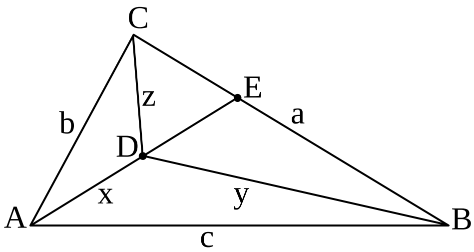
5. Apzīmēsim $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ (sk. 4.zīm.).



4.zīm.

Tad perimetrs $P = a + b + c$. No trijstūra nevienādības seko, ka $a < y + z$, $b < x + z$, $c < x + y$. Saskaitot visas šīs nevienādības, iegūstam $a + b + c < 2x + 2y + 2z$ jeb $P < 2(x + y + z)$. Dalot iegūtās nevienādības abas puses ar 2, iegūstam $\frac{P}{2} < x + y + z$, kas ir pierādāmās nevienādības kreisā puse.

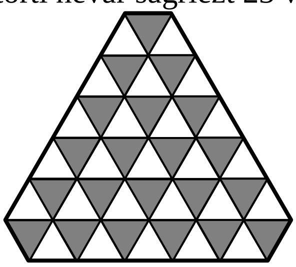
Pierādīsim tagad prasītās nevienādības labo pusi, t.i., ka $x + y + z < P$. Sākumā pierādīsim, ka $x + y < a + b$. Apzīmēsim ar E taisnes AD krustpunktu ar trijstūra malu BC (sk. 5.zīm.).



5.zīm.

Pēc trijstūra nevienādības $x + DE < b + CE$. Pieskaitām nevienādības abām pusēm BE, tad $x + DE + BE < b + CE + BE = a + b$. Tā kā $y < DE + BE$ (trijstūra nevienādība), tad $x + y < a + b$. Līdzīgi varam pierādīt, ka $x + z < a + c$ un $y + z < b + c$. Saskaitot šīs trīs nevienādības, iegūstam $2x + 2y + 2z < 2P$, tātad $x + y + z < P$, k.b.j.

6. Izkrāsosim figūru tā, kā parādīts 6. zīmējumā. Ja torti ir iespējams sagriezt kā prasīts uzdevumā, tad katrs gabaliņš sastāvēs no diviem trijstūriem – viena pelēka un viena balta trijstūra. Tāpēc pelēkajiem un baltajiem trijstūriem ir jābūt vienādā skaitā. Bet ir redzams, ka ir 21 pelēks trijstūris un 25 balti trijstūri. Tātad torti nevar sagriezt 23 vienādos gabalos.



6.zīm.

7. Tā kā abas izteiksmes ir simetriskas, varam pieņemt, ka $b \geq a$ (simetrijas dēļ jāatceras: ja skaitļu pāris $(x; y)$ ir uzdevuma atrisinājums, tad arī $(y; x)$ ir atrisinājums).

Tā kā $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ jābūt veselam skaitlim, tad $a^2 + b \geq b^2 - a$.

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, pakāpeniski iegūstam

$$a + b \geq b^2 - a^2$$

$$a + b \geq (b - a)(b + a)$$

Tā kā a un b ir naturāli skaitļi, tad abas nevienādības puses varam dalīt ar $a + b \geq 0$, iegūstot $1 \geq b - a$ jeb $b \leq a + 1$.

Tā kā $b \geq a$ un $b \leq a+1$, varam secināt, ka $b = a$ vai $b = a+1$. Apskatīsim katru no šiem gadījumiem.

I. Ja $b = a$. Tad $\frac{a^2+b}{b^2-a} = \frac{b^2+a}{a^2-b} = \frac{a^2+a}{a^2-a}$.

Pārveidojam $\frac{a^2+a}{a^2-a} = \frac{a^2+a+(-a+a)}{a^2-a} = \frac{a^2-a+2a}{a^2-a} = \frac{a^2-a}{a^2-a} + \frac{2a}{a^2-a} = 1 + \frac{2a}{a^2-a}$. Tā kā *a* ir naturāls skaitlis, tad $\frac{a^2+a}{a^2-a} = 1 + \frac{2a}{a^2-a} > 1$. Turklāt no tā, ka $\frac{a^2+a}{a^2-a}$ ir vesels skaitlis, seko, ka $\frac{a^2+a}{a^2-a} \geq 2$, no kurienes iegūstam $a^2 + a \geq 2a^2 - 2a$ un tālāk $3a \geq a^2$. Dalot nevienādības abas puses ar $a \neq 0$, iegūstam, ka $a \leq 3$. Ievērojam, ka gadījumā, ja $a = 1$, izteiksme $\frac{a^2+a}{a^2-a}$ nav definēta. Ja $a = 2$ vai $a = 3$, tad izteiksmes vērtība būs vesels skaitlis. Tātad gadījumā, ja $b = a$, par atrisinājumu der divi skaitļu pāri: (*a*; *b*) = (2; 2) un (*a*; *b*) = (3; 3).

II. Ja $b = a+1$. Tad $\frac{a^2+b}{b^2-a} = \frac{a^2+a+1}{a^2+a+1} = 1$ vienmēr ir vesels skaitlis. Tātad mums jāapskata otra izteiksme: $\frac{b^2+a}{a^2-b} = \frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}$. Varam šo izteiksmi pārveidot:

$$\frac{a^2+3a+1-a+a-1+1}{a^2-a-1} = \frac{a^2-a-1+4a+2}{a^2-a-1} = \frac{a^2-a-1}{a^2-a-1} + \frac{4a+2}{a^2-a-1}$$

Lai šīs izteiksmes vērtība būtu vesels skaitlis, $4a+2$ jādalās ar a^2-a-1. Tā kā a^2-a-1 vērtība visiem naturāliem skaitļiem *a* vienmēr ir nepāra skaitlis (trīs nepāra skaitļu algebriskā summa ir nepāra skaitlis; arī divu pāra skaitļu un viena nepāra skaitļa algebriskā summa ir nepāra skaitlis), bet $4a+2$ visiem naturāliem skaitļiem *a* ir pāra skaitlis, tad $2a+1$ jādalās ar a^2-a-1. Tātad $a^2-a-1 \leq 2a+1$, ko varam pārveidot par $a^2-3a-2 \leq 0$.

Pieņemsim, ka $a \geq 4$. Tad $a^2-3a-2 = a \cdot a - 3a - 2 \geq 4a - 3a - 2 = a - 2 \geq 4 - 2 = 2 > 0$. Esam ieguvuši pretrunu, jo $a^2-3a-2 \leq 0$. Tātad $a < 4$.

Pārbaudām atlikušās *a* vērtības. Ja $a = 3$, tad $b = 4$ un otrās izteiksmes vērtība nav vesels skaitlis.

Savukārt gan vērtības $a = 2$ un $b = 3$, gan $a = 1$ un $b = 2$ apmierina uzdevuma nosacījumus (otrās izteiksmes vērtības tad ir attiecīgi 11 un -5).

Tātad par uzdevuma atrisinājumu der seši skaitļu pāri: $(2;2)$, $(3;3)$, $(1;2)$, $(2;1)$, $(2;3)$ un $(3;2)$.

8. Ja *a*, *b*, *c*, *d* un *e* ir dažādi veseli skaitļi, tad arī reizinātāji $4-a$, $4-b$, $4-c$, $4-d$, $4-e$ ir dažādi veseli skaitļi.

Lai dalījums būtu vesels skaitlis, šiem reizinātājiem ir jābūt skaitļa 12 dalītājiem: -12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12.

Ja viens no reizinātājiem ir -12; -6; -4; 4; 6 vai 12, tad trīs no atlikušajiem ir 1 vai -1; tātad divi no trīs atlikušajiem reizinātājiem ir vienādi, kas ir pretrunā uzdevuma nosacījumiem.

Tātad reizinātāji var būt tikai skaitļi -3; -2; -1; 1; 2 un 3.

Tā kā skaitļu -3 un 3 reizinājums ir -9, bet nav tāda vesela skaitļa, kuru reizinot ar -9 iegūtu 12, tad par reizinātājiem vienlaicīgi nevar būt skaitļi -3 un 3. No tā var secināt, ka pārējie četri reizinātāji noteikti ir -2; -1; 1 un 2. Tad piektais reizinātājs ir vai nu -3, vai 3. Ja tas ir -3, tad visu piecu skaitļu reizinājums ir -12 (pretruna). Tātad piektais reizinātājs ir 3.

Tā kā gan reizināšana, gan saskaitīšana ir komutatīvas operācijas (mainot reizinātāju vai saskaitāmo secību, reizinājums vai summa nemainās), tad nav būtiski, kurš no reizinātājiem $4-a$, $4-b$, $4-c$, $4-d$, $4-e$ ir -2; -1; 1; 2 vai 3.

Tāpēc varam pieņemt, ka $a < b < c < d < e$, no kā seko, ka $4-a > 4-b > 4-c > 4-d > 4-e$. Tagad varam aprēķināt atbilstošās *a*, *b*, *c*, *d* un *e* vērtības:

$4-a=3$, tātad $a=1$;
$4-b=2$, tātad $b=2$;
$4-c=1$, tātad $c=3$;
$4-d=-1$, tātad $d=5$;
$4-e=-2$, tātad $e=6$.

Prasītā skaitļu summa ir $1+2+3+5+6=17$, kas ir vienīgā iespējamā uzdevuma atbilde.

9. Viens atrisinājums ir samainīt vietām šādus monētu pārus: *HK*, *HE*, *HC*, *HA*, *IL*, *IF*, *ID*, *KL*, *GJ*, *JA*, *FK*, *LE*, *DK*, *EF*, *ED*, *EB* un *BK*. Šim uzdevumam ir arī citi atrisinājumi.

10. Sniegbaltīte sastaptajam rūķītim varētu uzdot šādu jautājumu: „Vai Jūs dzīvojat šajā ciematā? ” Pieņemsim, ka rūķītis pateica „Jā”. Ja šis rūķītis ir ciemata *A* iedzīvotājs, tad viņš pateica taisnību un Sniegbaltīte atrodas ciematā *A*. Ja rūķītis ir ciemata *B* iedzīvotājs, tad viņš sameloja un uz Sniegbaltītes jautājumu arī atbildēja „Jā”. Un tas nozīmē, ka Sniegbaltīte atrodas ciematā *A*. Analoģiski var spriest, ja atbilde ir „Nē”. Tikai tad Sniegbaltīte atradīsies ciematā *B*.

2011./2012. mācību gads
4. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Pārveidojam doto vienādojumu: $a^2b+12=2012$;

$$a^2b=2012-12;$$
$$a^2b=2000.$$

Atrisinājumu skaits ir vienāds ar skaitļu kvadrātu skaitu, ar kuru skaitlis 2000 dalās bez atlikuma:

$$1^2\cdot 2000=2000;$$
$$2^2\cdot 500=2000;$$
$$4^2\cdot 125=2000;$$
$$5^2\cdot 80=2000;$$
$$10^2\cdot 20=2000;$$
$$20^2\cdot 5=2000.$$

Redzam, ka dotajam vienādojumam ir tieši 6 atrisinājumi.

2. Mazākais nepieciešamais gājienu skaits ir 3. Piemēru, kā ar trim gājieniem kartiņas var sakārtot augošā secībā, skat., 1. zīm.

1. solis: $1\ 5\ 9\ 2\ 7\ \boxed{3\ \ 6}\ 8\ 4 \longrightarrow 1\ 5\ 9\ 2\ \boxed{3\ \ 6}\ 7\ 8\ 4$

2. solis: $1\ \boxed{5\ \ 9}\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ 4 \longrightarrow 1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ 4\ \boxed{5\ \ 9}$

3. solis: $1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ \boxed{4\ \ 5}\ 9 \longrightarrow 1\ 2\ 3\ \boxed{4\ \ 5}\ 6\ 7\ 8\ 9$

1.zīm.

Tā kā nepieciešams vismaz pa vienam gājienam gan lai kartiņu ar ciparu 9 novietotu kā pēdējo, gan lai *izšķirtu* kartiņas ar cipariem 5 un 9, gan arī lai kartiņas ar cipariem 2, 7, 3 un 6 sakārtotu pareizā secībā (turklāt ar vienu gājienu nevar izdarīt vienlaicīgi divas no minētajām darbībām), tad nepieciešami vismaz trīs gājieni.

3. a) Skaitļu 59, 82 un 19 ar Pauļa metodi aprēķinātie kvadrāti attēloti 2. zīm.

59^2	82^2	19^2
45	16	09
2581	6404	0181
45	16	09
3481	6724	361

2.zīm.

Īss metodes apraksts:

1) Tabulas otrajā un ceturtajā rindā ieraksta dotā skaitļa abu ciparu reizinājumu (ja reizinājums ir viencipara skaitlis, tad pirmā cipara vietā raksta 0). Iegūtā reizinājuma pirmais cipars jāraksta sākot no rezultāta simtu šķiras (t.i., tieši zem dotā skaitļa).
2) Trešajā rindā jāraksta četrciparu skaitlis, kura pirmie divi cipari ir dotā skaitļa pirmā cipara kvadrāts, bet otrie divi cipari ir dotā skaitļa otrā cipara kvadrāts (ja kāds no kvadrātiem ir viencipara skaitlis, tad pirmā cipara vietā raksta 0). Šī četrciparu skaitļa pirmais cipars jāraksta sākot no rezultāta tūkstošu šķiras (t.i., divi vidējie cipari jāraksta tieši zem dotā skaitļa).
3) Jāsaskaita iegūtie trīs skaitļi pa vertikālēm. Aprēķinātā summa ir dotā skaitļa kvadrāts.

b) Lai metodes pierādījums būtu uzskatāmāks, pierakstīsim uzdevuma formulējumā dotajā piemērā pirmajam un trešajam saskaitāmajam labajā pusē katram vienu nulli (tātad skaitli 42, kas ir skaitļu 6 un 7 reizinājums, pareizinām ar 10; skat. 3.zīm.). Viegli saprast, ka, veicot saskaitīšanu stabiņā, šī nulle rezultātu neietekmē.

$$\begin{array}{r} 67^2 \\ \hline 420 \\ 3649 \\ 420 \\ \hline 4489 \end{array}$$

3.zīm.

Pierādīsim, ka šī metode ir korekta, lai aprēķinātu jebkura naturāla divciparu skaitļa kvadrātu.

Jebkuru divciparu skaitli $x = \overline{ab}$ (pieraksts $\overline{ab}$ nozīmē, ka a ir šī skaitļa desmitu cipars, b – skaitļa vienu cipars) var pierakstīt kā summu $x = 10a + b$.

Skaitļa x kvadrātu tad varam uzrakstīt:

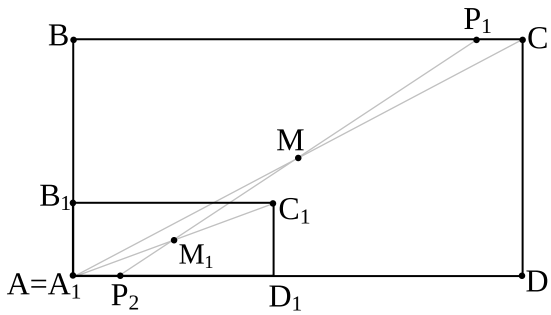
$$x^2 = (10a + b)^2 =$$
$$= 100a^2 + 20ab + b^2 =$$
$$= 10ab + (100a^2 + b^2) + 10ab$$

Apskatīsim pirmo un trešo saskaitāmo. Redzam, ka tas izsaka skaitļa x abu ciparu un skaitļa 10 reizinājumu. Tā kā divu viencipara skaitļu reizinājums satur ne vairāk kā divus ciparus, tad šī reizinājuma reizinājums ar 10 saturēs ne vairāk kā 3 ciparus, turklāt pēdējais cipars būs 0, kuru Paulis neraksta.

Apskatīsim vidējo saskaitāmo. Tas sastāv no diviem saskaitāmajiem: $100a^2$ un b^2. Tā kā gan a, gan b ir viencipara skaitļi, tad to kvadrāti satur katrs ne vairāk kā 2 ciparus. Skaitļa a^2 reizinājums ar 100 ir vai nu četrciparu skaitlis (ja a^2 ir divciparu), vai arī trīsciparu skaitlis (ja a^2 ir viencipara), turklāt pēdēji divi šī skaitļa cipari ir nulles. Tātad pieskaitot tam skaitli b^2 (kurš, kā jau iepriekš nospriedām, satur ne vairāk kā divus ciparus), iegūtās summas $100a^2 + b^2$ pirmie divi cipari veidos skaitli a^2, bet pēdējie divi – skaitli b^2 (ja b^2 ir viencipara skaitlis, tad tas tiek pierakstīts kā divciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir 0), kas atbilst Pauļa metodes vidējam saskaitāmajam.

Tātad esam pierādījuši, ka Pauļa atrastā metode ir korekta, aprēķinot jebkura naturāla divciparu skaitļa kvadrātu.

4. Apzīmējam taisnstūra $ABCD$ diagonāles AC viduspunktu ar M, bet taisnstūra $A_1B_1C_1D_1$ diagonāles A_1C_1 viduspunktu ar M_1 (skat. 4. zīm.).



4.zīm.

Sākumā pierādīsim, ka taisne MM_1 krusto taisnstūrī $ABCD$ vai nu malas AD un BC, vai arī malas AB un CD (acīmredzams, ka MM_1 jākrusto vismaz viena taisnstūra mala) vai arī sakrīt ar AC, ja $C_1 \in AC$.

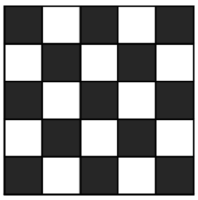
Pieņemsim, ka MM_1 krusto malu BC. Apzīmēsim šo krustpunktu ar P_1. Apskatīsim punktu P_2, kas ir centrāli simetrisks punktam P_1 ar simetrijas centru punktā M. Punkts M ir gan diagonāles AC viduspunkts, gan arī taisnstūra simetrijas centrs – katrs taisnstūra punkts attēlojas caur M par kādu citu atbilstošu taisnstūra punktu. Tādējādi mala BC attēlojas par malu AD. Arī taisne MM_1 ir simetriska pret punktu M, attēlojoties pati par sevi. Tātad, tā kā punkts P_1 pieder taisnei MM_1 un atrodas uz taisnstūra $ABCD$ malas BC, tad simetriskais punkts P_2 arī pieder taisnei MM_1 un atrodas uz taisnstūra pretējās malas AD. Tātad MM_1 krusto arī malu AD.

Līdzīgi arī gadījumos, kad pieņemam, ka MM_1 krusto kādu no malām AB, AD vai CD, izmantojot simetriju pret punktu M, mēs iegūtu, ka MM_1 krusto arī attiecīgi malu CD, BC vai AB. Tālāk varam pieņemt, ka MM_1 krusto malas BC un AD. Otrs gadījums (MM_1 krusto malas AB un CD) simetrijas dēļ var tikt apskatīts analoģiski.
Taisnes MM_1 krustpunktu ar malu BC apzīmējam ar P_1, bet krustpunktu ar malu AD – ar P_2.
Diagonāle AC sadala taisnstūri $ABCD$ divos vienlielos trijstūros ABC un CDA, kuru laukums ir $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CDA} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$.
Ja $P_1 = C$ un $P_2 = A$, tad diagonāle AC atrodas uz taisnes MM_1, tātad MM_1 sadala taisnstūri $ABCD$ divos vienlielos trijstūros.
Tāpēc apskatīsim vispārīgāku gadījumu: punkts P_1 nesakrīt ar C un punkts P_2 nesakrīt ar A.
Pierādīsim, ka arī tad taisne MM_1 gan abus taisnstūrus, gan sešstūri sadala divās vienlielās daļās.

1. pierādījums.
Jebkurš taisnstūris ir centrāli simetriska figūra attiecībā pret tā diagonāļu krustpunktu (tas ir arī diagonāļu viduspunkts) M. Tā kā P_1 un P_2 atrodas uz taisnes, kas vilkta caur simetrijas centru M, un punkti pieder attiecīgi BC un AD, tad tie arī ir novietoti simetriski pret punktu M. Tātad arī četrstūri ABP_1P_2 un P_2P_1CD ir simetriski pret punktu M, tāpēc to laukumi ir vienādi. Tātad MM_1 sadala taisnstūri $ABCD$ divās vienlielās daļās.
Analoģiski pierāda, ka MM_1 sadala taisnstūri $A_1B_1C_1D_1$divās vienlielās daļās.
Tā kā sešstūra $B_1BCDD_1C_1$ laukums ir abu taisnstūru laukumu starpība, arī tas ar taisni MM_1 ir sadalīts divās vienlielās daļās.

2. pierādījums.
Diagonāle AC sadala taisnstūri $ABCD$ divās vienlielās daļās.
Tā kā $BC \| AD$, tad $\angle MAP_2 = \angle MCP_1$ (iekšējie šķērsleņķi); savukārt $\angle P_2MA = \angle CMP_1$ kā krustleņķi. Tā kā M ir AC viduspunkts, tad $AM = MC$. Tātad $\Delta AMP_2 = \Delta MP_1C$ ($\ell m \ell$). Tātad MM_1 sadala taisnstūri $ABCD$ divās vienlielās daļās. Līdzīgi pierāda, ka MM_1 sadala divās vienlielās daļās arī taisnstūri $A_1B_1C_1D_1$.
Tā kā sešstūris $B_1BCDD_1C_1$ ir abu taisnstūru laukumu starpība, kuri ar taisni MM_1 ir sadalīti divās vienlielās daļās, tad arī šis sešstūris ar taisni MM_1 ir sadalīts divās vienlielās daļās.

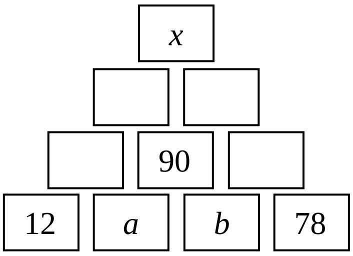
5. Atbilde: nē, tā nevar gadīties.
Pierādījums. Izkrāsosim kvadrātu šaha galdiņa veidā (skat. 5.zīm.), kreiso augšējo stūra rūtiņu iekrāsojot melnu. Redzam, ka kvadrātā ir 13 melnas un 12 baltas rūtiņas.



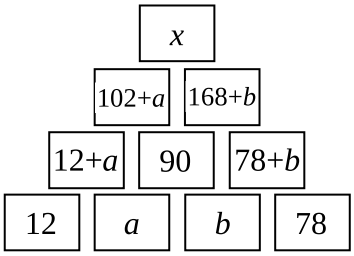
5.zīm.

Apskatīsim visas tās figūriņas, kas sākumā atradās uz melnajām rūtiņām – tādu kopskaitā ir 13. Rūtiņas, kas atrodas blakus melnajām rūtiņām, ir baltās rūtiņas. Tātad pēc pārvietošanas figūriņām no melnajām rūtiņām jāatrodas baltajās rūtiņās. Tā kā figūriņu, kas jāpārvieto, ir 13, bet balto rūtiņu, uz kurām tās var likt, ir tikai 12, tad to nevar izdarīt.

6. Atbilde: $x = 360$.
1. risinājums. Apakšējā rindā tukšajās rūtiņās ierakstītos skaitļus apzīmējam ar a un b (skat. 7. zīm.). Tad varam ievērot, ka $a + b = 90$.



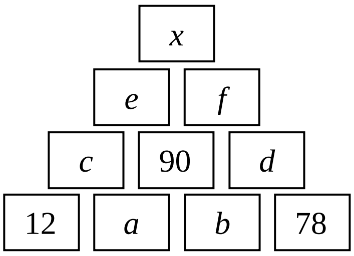
7.zīm.



8.zīm.

Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, aizpildām pārējās *piramīdas* rūtiņas (skat. 8. zīm.). Iegūstam, ka $x = 102 + a + 168 + b = 270 + (a + b) = 270 + 90 = 360$.

2. risinājums. Apzīmējam tukšajās rūtiņās ierakstāmos skaitļus ar *a*, *b*, *c*, *d*, *e* un *f*, kā parādīts 9. zīm.



9.zīm.

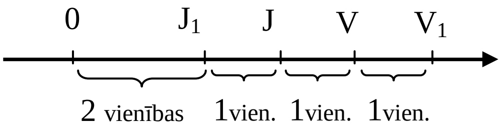
Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem $a + b = 90$, tad $b = 90 - a$. Savukārt $d = b + 78 = (90 - a) + 78 = 168 - a$. Un tālāk $f = 90 + d = 90 + (168 - a) = 258 - a$.

Līdzīgi apskatīsim arī piramīdas kreiso pusi. Redzam, ka $c = 12 + a$. Bet $e = c + 90 = (12 + a) + 90 = 102 + a$.

Tā kā $x = e + f$, tad, ievietojot iegūtās izteiksmes skaitļiem *e* un *f*, iegūstam, ka $x = e + f = (102 + a) + (258 - a) = 360$.

7. Sniegsim divus uzdevuma risināšanas variantus – gan ar vienādojumu sistēmas palīdzību, gan arī interpretējot uzdevuma nosacījumus uz skaitļu ass.

1. risinājums. Uzdevumu atrisināsim grafiski ar skaitļu ass palīdzību (skat. 10. zīm.).



10. zīm.

Nogrieznis OJ ir jaunākā vīra vecums un nogrieznis OV vecākā vīra vecums. Nogrieznis JV izsaka abu vīru vecuma starpību un to pieņem kā vienu vienību.

Pirmais nosacījums: Kad vecākā vīra vecums bija vienāds ar jaunākā vīra vecumu (nogrieznis OJ), tad jaunākā vīra vecums bija izsakāms ar nogriezni OJ_1. Tā kā divu cilvēku vecumu starpība ir nemainīgs lielums, tad $J_1J = JV = 1$ vienība. Tā kā vecākā vīra vecums ir divreiz lielāks nekā jaunākā vīra vecums iepriekš, tad nogrieznis OV ir divreiz garāks par nogriezni OJ_1. Tātad, $OJ_1 = J_1V = 2$ vienības.

Otrais nosacījums: Kad jaunākā vīra vecums būs vienāds ar vecākā vīra tagadējo vecumu tagad (nogrieznis OV), tad vecākā vīra vecums būs nogrieznis OV_1 un abu vīru vecumu starpība būs nogrieznis VV_1, kas ir 1 vienību garš.

Tātad, vecākā vīra vecums būs nogrieznis OV_1, kas ir 5 vienības garš, bet jaunākā vīra vecums būs nogrieznis OV, kas ir 4 vienības garš. Pēc dotā abu vīru kopējais vecums būs 63 gadi, kam atbilst 9 vienības uz ass. Varam aprēķināt, ka vienai vienībai atbilst $63 : 9 = 7$ gadi.

Tātad jaunākajam vīram ir $3 \cdot 7 = 21$ gads un vecākajam vīram ir $4 \cdot 7 = 28$ gadi.

2. risinājums. Apzīmēsim vecākā vīra vecumu gados ar *x*, bet jaunākā vīra vecumu gados – ar *y*. Tad vecākais vīrs šobrīd ir par $x - y$ gadiem vecāks nekā jaunākais vīrs.
Pirmo apgalvojumu – *man tagad ir divreiz vairāk gadu, nekā jums bija tad, kad man bija tikpat gadu, cik jums ir tagad* – varam pierakstīt ar vienādību $\frac{x}{2} = y - (x - y)$, jo vecākajam vīram tikpat gadu, cik jaunākajam ir tagad, bija pirms tik gadiem, par cik viņš tagad ir vecāks nekā jaunākais vīrs.
Otro apgalvojumu – *kad jums būs tikpat gadu, cik man ir tagad, tad mums kopā būs 63 gadu* – varam pierakstīt ar vienādību $(y + (x - y)) + (x + (x - y)) = 63$, jo jaunākajam būs tikpat gadu, cik pašlaik ir vecākajam, pēc tik gadiem, kāda šobrīd ir abu vīriešu gadu skaitu starpība.

Esam ieguvuši vienādojumu sistēmu $\begin{cases} \frac{x}{2} = y - (x - y) \\ x + (x + (x - y)) = 63 \end{cases}$.

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\begin{cases} x = 4y - 2x \\ x + 2x - y = 63 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x = 4y \\ 3x - y = 63 \end{cases}.$$

Otrajā vienādojumā ievietojot pirmajā vienādojumā iegūto sakarību, iegūstam, ka $4y - y = 63$, no kurienes $3y = 63$ un $y = 21$. Tad no pirmā vienādojuma $x = \frac{4}{3}y = \frac{4 \cdot 21}{3} = 28$. Tātad vecākā vīra vecums ir 28 gadi, bet jaunākā – 21 gadi.

8. Attēlosim skolotāju atbildes tabulā:

	1. vieta	*2. vieta*	*3. vieta*	*4. vieta*	*5. vieta*	*6. vieta*	*7. vieta*
Sk. Bērziņš	Emma	Dainis	Anna	Fredis	Gatis	Centis	Baiba
Sk. Kārkliņš	Centis	Emma	Baiba	Fredis	Gatis	Dainis	Anna

Tā kā abi skolotāji kopā ir pareizi nosaukuši deviņas vietas, tad noteikti divas no vietām abi ir nosaukuši pareizi vienlaicīgi. Šādas divas vietas, kurām abi skolotāji ir nosaukuši vienus un tos pašus bērnus, ir 4. un 5. vieta, kuras ieņēmuši attiecīgi Fredis un Gatis.
Tātad skolotājs Bērziņš pareizi ir atminējis vēl divas vietas, bet skolotājs Kārkliņš – vēl trīs vietas. Iegūstam, ka kopā skolotāji pareizi atminējuši vēl 5 vietas, kas atbilst arī vēl nenoskaidrotajām pareizajām vietām. Tas nozīmē, ka katrā no nenoskaidrotajām vietām kāds no diviem skolotāju minētajiem skolēniem ir pareizs.
Pieņemsim, ka skolotājs Bērziņš ir pareizi atminējis, ka 1. vietu ieguva Emma, bet šajā gadījumā viņš pareizi uzminējis, ka 2. vietu ieguvis Dainis (jo Emma to nav ieguvusi, tātad ieguvis ir otra skolotāja minētais skolēns), savukārt tad 6. vietu ieguvis Centis. Bet tad skolotājs Bērziņš pareizi atminējis vēl trīs vietas, tātad kopā pavisam piecas, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.
Tātad skolotājs Bērziņš kļūdījās par 1. vietas ieguvēju, kas nozīmē, ka skolotājam Kārkliņam bija taisnība – 1. vietu ieguva Centis; tad 6. vietu ieguva Dainis un 2. vietu – Emma. Tā kā skolotājs Kārkliņš vairāk pareizu atbilžu nepateica, tad par 3. vietas un 7. vietas ieguvēju viņš kļūdījās (un tātad pareizi uzminēja skolotājs Bērziņš), un tās ieguva attiecīgi Anna un Baiba.
Esam ieguvuši, ka skolēni finišēja šādā secībā:

1. vieta	*2. vieta*	*3. vieta*	*4. vieta*	*5. vieta*	*6. vieta*	*7. vieta*
Centis	Emma	Anna	Fredis	Gatis	Dainis	Baiba

9. Atbilde: Nē, šāds daudzskaldnis neeksistē.

Risinājums. Pieņemsim, ka šāds daudzskaldnis eksistē. Deviņiem trijstūriem kopā ir 27 malas. Tā kā daudzskaldnī *blakus esošām* skaldnēm ir kopīga šķautne, tad daudzskaldņa kopējais šķautņu skaits ir divas reizes mazāks nekā kopējais skaldņu veidojošo daudzstūru malu skaits. Bet 27 nedalās ar 2. Tātad šādu daudzskaldni izveidot nav iespējams.

10. Ja šie abi izveidotie apgalvojumi ir par vienu un to pašu objektu, tad skaidrs, ka tie abi nevar būt patiesi. Tātad apgalvojumi jāizvēlas tā, lai tie runātu par dažādiem objektiem.

Par uzdevumā prasītajiem apgalvojumiem der, piemēram, šādi divi teikumi:

„Taisnība, ka šajā teikumā ir septiņi vārdi.”

„Nav taisnība, ka šajā teikumā ir septiņi vārdi.”

Skaidrs, ka tie abi ir patiesi, turklāt katrs no tiem ir par citu objektu.

Piezīme. Šādi (un līdzīgi) apgalvojumi „Jānis ir labs skolnieks” un „Nav taisnība, ka Jānis ir labs skolnieks” nav uzskatāmi par korektu uzdevuma atrisinājumu. Nav pareizi spriest, ka šajos apgalvojumos nav zināms, par kādu Jāni ir runa, un tāpēc, ja runā par vienu Jāni, pareizs ir pirmais apgalvojums, bet, ja runā par otru Jāni – otrais. Kļūda ir tieši tā, ka, kamēr nav noteikts, par kādu Jāni tiek runāts, ne par vienu no šiem apgalvojumiem vispār nevar pateikt ne to, ka tas ir aplams, ne to, ka tas ir pareizs – abi apgalvojumi ir nenoteikti. Bet, tikko izvēlēts kāds noteikts Jānis, viens no apgalvojumiem būs patiess, otrs – aplams.

2011./2012. mācību gads
5. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Pie katras no 12 kuba šķautnēm veidojas 8 kubi ar izmēriem 1×1 cm, kuriem ir tieši divas nokrāsotas skaldnes. Kopā ir $8\cdot12=$ **96** šādi kubi. Katras skaldnes iekšējais kvadrāts ar izmēriem 8×8 cm veidojas no 64 kubiem, kuriem ir tieši viena nokrāsota skaldne. Tātad, kopā ir $64\cdot6=$ **384** kubi, kuram ir tieši viena nokrāsota skaldne.

2. Ievērosim, ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad arī skaitlis, kas no tā iegūstams ar šajā uzdevumā pieļaujamajām operācijām, dalās ar 3. Attiecībā uz pirmo operāciju tas ir acīmredzams. Pierādīsim šo apgalvojumu pārējām divām operācijām:

b) Ja pāra skaitlis *2n* dalās ar 3, tad vai nu 2, vai *n* dalās ar 3. Bet 2 ar 3 nedalās, tātad *n* dalās ar 3.

c) Trešajai operācijai apgalvojums izriet no dalāmības pazīmes ar 3. Ja dotā skaitļa ciparu summa dalās ar 3, tad jauniegūtā skaitļa ciparu summa, kas ir divreiz lielāka nekā sākotnējā skaitļa ciparu summa, arī dalās ar 3; tātad arī pats jauniegūtais skaitlis dalās ar 3.

Tā kā uzdevumā dotais skaitlis 24 dalās ar 3, tad arī skaitļiem, kurus var iegūt no 24, jādalās ar 3. Bet 2012 ar 3 nedalās. Tātad skaitli 2012 nevar iegūt.

3. Līdzīgi kā risinot Profesora Cipariņa kluba 3.kārtas 2.uzdevumu, izmantosim šādu sakarību:

- Ja taisnstūris ir sadalīts četros taisnstūros, kuru laukumi ir *J*, *K*, *L*, *M* (sk. 1.zīm.), tad ***J · M = K · L***, jo $J\cdot M = ac\cdot bd = abcd = bc\cdot ad = K\cdot L$.

	a	*b*
c	*J*	*K*
d	*L*	*M*

1.zīm.

Nezināmos taisnstūru laukumus apzīmēsim ar *A*, *B*, *C*, *D* un *E* (skat. 2. zīm.).

A	10	20
B	2	*C*
3	*D*	*E*

2. zīm.

Izmantojot augšminēto sakarību, viegli aprēķināt taisnstūra *C* laukumu:

$$10\cdot C = 2\cdot 20$$
$$10C = 40$$
$$C = 4\ cm^2$$

No zīmējuma ir redzams, ka $A=5B$, $E=2D$ un $BD=2\cdot3$.
Zināms, ka *B* un *D* ir veseli skaitļi, tātad to reizinājums var būt 6 tikai pie šādām *B* un *D* vērtībām:

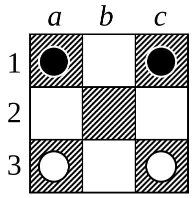
$B=1,\ D=6$ vai $B=2,\ D=3$, vai $B=3,\ D=2$, vai $B=6,\ D=1$.

Apskatīsim katru gadījumu atsevišķi:

- Ja $B=1, D=6$, tad $A=5$ un $E=12$. Tad taisnstūra laukums ir $5+10+20+1+2+4+3+6+12=63\ cm^2$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.
- Ja $B=2, D=3$, tad $A=10$ un $E=6$. Tad taisnstūra laukums ir $10+10+20+2+2+4+3+3+6=60\neq 63\ cm^2$. Tātad šis gadījums neder.
- Ja $B=3, D=2$, tad $A=15$ un $E=4$. Tad taisnstūra laukums ir $15+10+20+3+2+4+3+2+4=63\ cm^2$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.
- Ja $B=6, D=1$, tad $A=30$ un $E=2$. Tad taisnstūra laukums ir $30+10+20+6+2+4+3+1+2=78\neq 63\ cm^2$, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

Tātad šim uzdevumam ir divi atrisinājumi: $A=5$, $B=1$, $C=4$, $D=6$, $E=12$ cm^2 vai $A=15$, $B=3$, $C=4$, $D=2$, $E=4$ cm^2.

4. Gar vienu šaha galdiņa malu uzrakstam burtus, gar otru – ciparus (skat. 3. zīm.).



3.zīm.

Sāksim gājienu ar melno šaha zirdziņu, kas atrodas augšējā rindā, labajā stūrī (lauciņš *c*1). No šī lauciņa zirdziņu pārvietosim uz lauciņu *b*3 un turpmāk to pierakstīsim šādi: *c*1 – *b*3.

Lai samainītu vietām melnos un baltos šaha zirdziņus, secīgi jāizdara šādi gājieni:

*a*3 – *b*1, *a*1 – *c*2, *c*1 – *b*3, *c*3 – *a*2, *b*3 – *a*1,
*b*1 – *c*3, *c*2 – *a*3, *a*2 – *c*1, *a*1 – *c*2, *c*3 – *a*2,
*a*3 – *b*1, *c*1 – *b*3, *c*2 – *a*3, *a*2 – *c*1, *b*1 – *c*3, *b*3 – *a*1.

5. Pieņemsim, ka mums doti *A* santīmi *B* monētās, turklāt 1 sant. monētu skaits ir x_1, 2 sant. monētu skaits ir x_2, 5 sant. monētu skaits ir x_3, 10 sant. monētu skaits ir x_4, 20 sant. monētu skaits ir x_5, 50 sant. monētu skaits ir x_6, bet 1 lata monētu skaits ir x_7. Iegūstam kopējo naudas daudzumu santīmos *A* varam izteikt $A=x_1+2x_2+5x_3+10x_4+20x_5+50x_6+100x_7$. Ar *B* apzīmējot kopējo monētu skaitu, iegūstam $B=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$.

Tagad ņemsim nākamo monētu komplektu: 1 sant. monētas $100x_7$, 2 sant. monētas $50x_6$, 5 sant. monētas $20x_5$, 10 sant. monētas $10x_4$, 20 sant. monētas $5x_3$, 50 sant. monētas $2x_2$, 1 lata monētas x_1. Redzam, ka kopējais naudas daudzums ir

$$100x_1+50x_2\cdot 2+20x_3\cdot 5+10x_4\cdot 10+5x_5\cdot 20+2x_6\cdot 50+x_7\cdot 100=$$
$$=100(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)=100B \text{ santīmi jeb } B \text{ lati.}$$

Viegli ievērot, ka kopējais monētu skaits ir vienāds ar *A*. Tātad uzdevumā prasītais ir pierādīts.

6. Tā kā sešu vienādu pēdējo ciparu summa, t.i., $6\cdot S$ beidzas ar ciparu 4, tad *S* var būt vai nu 4, vai 9. Ja *S* būtu 4, tad $6\cdot 4=24$, tātad veidojas *pārnesums* 2 nākamajai summai. Bet piecu vienādu ciparu *G* summa kopā ar pieskaitīto *pārnesumu* (t.i., $5\cdot G+2$) nevar beigties ar ciparu 5. Tātad ***S* = 9**.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & {\scriptstyle 5} & 9\\
 & & & & {\scriptstyle x} & G & 9\\
 & & & {\scriptstyle y} & E & G & 9\\
 & & {\scriptstyle z} & I & E & G & 9\\
 & & N & I & E & G & 9\\
+ & 9 & N & I & E & G & 9\\
\hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}$$

4.zīm.

Ar *x*, *y*, *z* apzīmēsim pārnesumus, kas rodas no iepriekšējās šķiras (skat. 4. zīm.). Lielākā iespējamā *x* vērtība ir 4 (gadījumā, ja *G* ir 7 vai 8); lielākā *y* vērtība ir 3 (ja *E* ir 7 vai 8); lielākā iespējamā *z* vērtība ir 2 (ja $I \geq 6$ un $y \geq 2$).

Tagad apskatīsim, kādas ir iespējamās *N* vērtības. Tā kā $S = 9$ un summas pirmais cipars arī ir 9, tad saskaitot $N + N + z$ pārnesumi nerodas (t.i., summa ir viencipara skaitlis). Turklāt no tā, ka $z \leq 2$, secinām, ka *N* ir vai nu 3, vai 4.

Pieņemsim, ka $N = 3$. Tad no vienādojuma $z + N + N = 8$ iegūstam, ka $z = 2$, t.i., *I* ir 6, 7 vai 8 (atceramies, ka 9 ir jau izmantots). Tā kā $y \leq 3$, tad summas $I + I + I$ pēdējam ciparam jābūt 4, 5, 6 vai 7. Vienīgā no minētājām *I* vērtībām, kura apmierina šo nosacījumu, ir 8.

Tādā gadījumā $y = 3$. Tas iespējams tikai tad, ja *E* ir 7 (gan 8, gan 9 jau izmantojām), bet tā kā skaitlis $E \cdot 4 = 7 \cdot 4$ beidzas ar 8, bet summai $x + E + E + E + E$ jābeidzas ar ciparu 6 un $x \leq 4$, tad tas nav iespējams. Esam ieguvuši, ka $N \neq 3$.

Atliek tikai, ka $N = 4$ un $z = 0$. Tad $I = 2$ (*I* nevar būt 1, jo tad *y* jābūt 4, bet zināms, ka $y \leq 3$; *I* nevar būt arī 3 vai lielāks skaitlis, jo tad noteikti veidosies pārnesums) un $y = 1$ (skat. 4. zīm.).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & {\scriptstyle 5} & 9\\
 & & & & {\scriptstyle x} & G & 9\\
 & & & {\scriptstyle y=1} & E & G & 9\\
 & & {\scriptstyle z=0} & 2 & E & G & 9\\
 & & 4 & 2 & E & G & 9\\
+ & 9 & 4 & 2 & E & G & 9\\
\hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}$$

4.zīm.

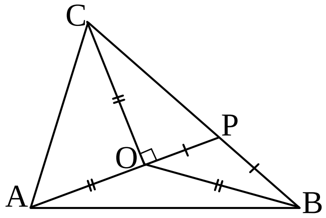
Tā kā $y = 1$ un skaitļi 2 un 4 jau ir izmantoti, tad atliek, ka $E = 3$; tad $x = 4$. Tātad *G* ir vismaz 7. Tomēr, tā kā summas $G + G + G + G + G + 5$ pēdējam ciparam jābūt 5, tad skaidrs, ka *G* jābūt pāra skaitlim, tātad $G = 8$.

Esam ieguvuši, ka uzdevumam ir tieši viena atbilde (skat. 5. zīm.).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 9\\
 & & & & & 8 & 9\\
 & & & & 3 & 8 & 9\\
 & & & 2 & 3 & 8 & 9\\
 & & 4 & 2 & 3 & 8 & 9\\
+ & 9 & 4 & 2 & 3 & 8 & 9\\
\hline
 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4
\end{array}$$

5.zīm.

7. Konstruēsim perpendikulu *CO* pret taisni *AP* (skat. 6. zīm.).



6.zīm.

Tā kā ΔCOP ir taisnleņķa trijstūris ar šauro leņķi $\angle CPO = 60°$ (tātad $\angle OCP = 90° - 60° = 30°$), tad tā katetes *OP* garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas *CP* garuma.

Tā kā gan $OP = \frac{1}{2}CP$, gan pēc dotā arī $PB = \frac{1}{2}CP$, tad $OP = PB$. Tāpēc trijstūris OPB ir vienādsānu trijstūris.

Tad $\angle OPB = 180° - \angle OPC = 180° - 60° = 120°$ un $\angle POB = \angle PBO = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$.

Savukārt $\angle OBA = \angle CBA - \angle PBO = 45° - 30° = 15°$ un

$\angle AOB = 360° - \angle COP - \angle COA - \angle POB = 360° - 90° - 90° - 30° = 150°$

Tad $\angle OAB = 180° - \angle AOB - \angle OBA = 180° - 150° - 15° = 15°$. Tā kā $\angle OAB = \angle OBA$ un trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad $OB = OA$ un trijstūris AOB ir vienādsānu.

Tagad apskatīsim trijstūri BOC. Tā $\angle OCB = \angle OCP = 30°$. Tā kā $\angle OCB = \angle PBO$, tad trijstūris BOC arī ir vienādsānu un $OC = OB$.

Tā kā $OC = OB$ un $OB = OA$, tad arī $OA = OC$ un trijstūris AOC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris. Tāpēc $\angle ACO = 45°$.

Vajadzīgais leņķis $\angle ACB = \angle ACO + \angle OCP = 45° + 30° = 75°$.

8. Zāles daudzumu, ko 1 govs apēd 1 dienā, nosauksim par 1 vienību.

Aprēķināsim, cik vienību zāles apēd 70 govis 24 dienās: $24 \cdot 70 = 1680$ zāles vienības. Šajās 1680 vienībās ietilpst zāle, kas jau bija izaugusi, pirms govis bija izlaistas pļavā, un zāle, kas izauga 24 dienās.

Savukārt 30 govis 60 dienās apēd: $30 \cdot 60 = 1800$ zāles vienības.

Tā kā abos gadījumos tika apēsta visa zāle, tad varam aprēķināt, cik daudz zāles izaug 60 – 24 = 36 dienās: 1800 – 1680 = 120 vienības. Tad 24 dienās izaug 80 vienības zāles, un sākotnējais zāles daudzums pļavā ir $1680 - 80 = 1600$ vienības.

Prasītajās 96 dienās sākotnējam zāles daudzumam pļavā klāt izaugs $80 \cdot 4 = 320$ vienības zāles, tādējādi kopējais zāles apjoms, ko govis ēdīs 96 dienas, būs 1600 + 320 = 1920 vienības. Katrā no šīm 96 dienām tiks apēstas $1920 : 96 = 20$ zāles vienības, tātad būs nepieciešamas 20 govis.

9. Ievērosim, ka pirmajā virknītē ir divi cipari, otrajā – $2 \cdot 2 = 4$ cipari, trešajā – $2 \cdot 4 = 8$, ceturtajā – $2 \cdot 8 = 16$, piektajā – $2 \cdot 16 = 32$, sestajā – $2 \cdot 32 = 64$, septītajā – $2 \cdot 64 = 128$, astotajā – $2 \cdot 128 = 256$, devītajā – $2 \cdot 256 = 512$, desmitajā – $2 \cdot 512 = 1024$, vienpadsmitajā – $2 \cdot 1024 = 2048$ cipari. Tātad, vienpadsmitā virknīte ir pirmā, kurā ir vismaz 2012 cipari.

Noskaidrosim, kāds ir šīs virknītes 2012-ais cipars: 0 vai 1? Apzīmēsim to ar *s*.

Teiksim, ka ciparam 0 inversais cipars ir 1, bet ciparam 1 inversais cipars ir 0. Ciparam *x* inverso ciparu apzīmēsim ar x^*. Acīmredzot, $\left(x^*\right)^* = x$. Tiešām, $\left(0^*\right)^* = 1^* = 0$ un $\left(1^*\right)^* = 0^* = 1$.

Katram $n = 1; 2; 3; ...; 10; 11$ apskatāmo virknīti apzīmēsim ar α_n, bet tās „otrādo kopiju” ar $\hat{\alpha}_n$. Virknīšu α_n un $\hat{\alpha}_n$ k-tos ciparus apzīmēsim attiecīgi ar $\alpha_n(k)$ un $\hat{\alpha}_n(k)$.

Pēc uzdevuma nosacījumiem, katram *n*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \hat{\alpha}_n .$$

Pie $n = 10$ iegūstam šādu virknīti:

$$\alpha_{11} = \underbrace{\alpha_{10}}_{1024\, cipari} \underbrace{\hat{\alpha}_{10}}_{1024\, cipari} .$$

Redzam, ka meklējamais cipars *s* (virknes α_{11} 2012-ais cipars) ir virknes $\hat{\alpha}_{10}$ $2012 - 1024 = 988$-ais cipars. Citiem vārdiem,

$$s = \alpha_{11}(2012) = \hat{\alpha}_{10}(988) = \alpha^*{}_{10}(988).$$

Tā kā $s = \alpha^*{}_{10}(988)$, tad $s^* = \alpha_{10}(988)$.

Pie $n = 9$ iegūstam

$$\alpha_{10} = \underbrace{\alpha_9}_{512\, cipari} \underbrace{\hat{\alpha}_9}_{512\, cipari} .$$

Tāpēc $s^* = \alpha_{10}(988) = \hat{\alpha}_9(988-512) = \hat{\alpha}_9(476)$, un no vienādības $s^* = \hat{\alpha}_9(476)$ iegūstam $s = \alpha_9(476)$.

Līdzīgi turpinot, pakāpeniski iegūstam:

$$s = \alpha_9(476) = \alpha_9(256+220) = \hat{\alpha}_8(220);$$
$$s^* = \alpha_8(220) = \alpha_8(128+92) = \hat{\alpha}_7(92);$$
$$s = \alpha_7(92) = \alpha_7(64+28) = \hat{\alpha}_6(28);$$
$$s^* = \alpha_6(28) = \alpha_5(28) = \alpha_5(16+12) = \hat{\alpha}_4(12);$$
$$s = \alpha_4(12) = \alpha_4(8+4) = \hat{\alpha}_3(4);$$
$$s^* = \alpha_3(4) = \alpha_2(4) = \alpha_2(2+2) = \hat{\alpha}_1(2);$$
$$s = \alpha_1(2) = 1.$$

Tātad dotajā virknītē 2012. cipars būs 1.

Piezīme. Iesakām patstāvīgi padomāt, kā varētu ātrāk noskaidrot, vai $\alpha_n(k) = 0$ vai $\alpha_n(k) = 1$, ja doti skaitļi *n* un *k*.

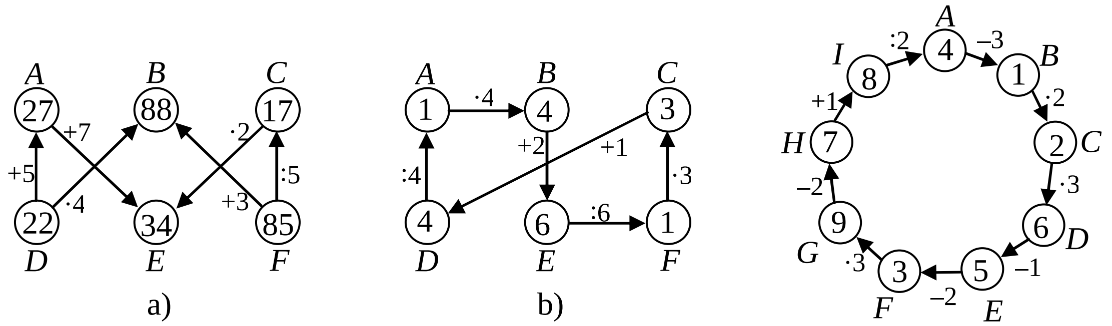
10. Atbilde: pietiek ar vienu svēršanu.

Paņemsim no pirmā maisa 1 monētu, no otrā maisa – 2 monētas, no trešā maisa – 3 monētas, ..., no desmitā maisa – 10 monētas un nosvērsim visas šīs monētas kopā. Ja katra paņemtā monēta svērtu 10 gramus, tad svariem būtu jārāda $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)\cdot 10 = 55\cdot 10 = 550$ g. Svari rādīs vairāk, jo vienā maisā katra monēta sver 11 g. Tātad tas gramu skaits, par kuru svaru rādījums pārsniedz skaitli 550, sakrīt ar maisa numuru, kurā ir smagākās monētas.

2011./2012. mācību gads
6. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: Ja divciparu skaitlim galā pierakstīs to pašu skaitli, tad skaitlis palielināsies 101 reizi.
Pierādījums. Apzīmēsim divciparu skaitļa vienu ciparu ar *a*, bet desmitu ciparu – ar *b*. Tad šo skaitli varam pierakstīt $x = \overline{ab} = 10a + b$. Šim skaitlim labajā pusē pierakstot šo pašu skaitli, iegūstam $\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b = 100(10a + b) + 10a + b = 101(10a + b)$. Viegli redzēt, ka jauniegūtais skaitlis ir 101 reizi lielāks nekā sākotnējais skaitlis.

2. Atbildi skat. 1. zīm.



1.zīm.

3. Ernesta monētu skaits ir par 3 lielāks nekā skaitļa 6 daudzkārtnis, un par 7 lielāks nekā skaitļa 8 daudzkārtnis. Mazākais veselais skaitlis, kas apmierina šos nosacījumus, ir 15.
Mazākais kopīgais skaitļu 6 un 8 dalāmais ir 24, tātad uzdevuma nosacījumi izpildīsies, ja Ernesta monētu kolekcijas apjoms pārsniegs 15 par skaitļa 24 daudzkārtni, t.i., tie var būt skaitļi 39, 63, 87 u.t.t. Tātad, ja Ernests sakārtos monētas kaudzītēs pa 24 monētām katrā, viņam paliks pāri 15 monētas.

4. Vienādībās attēloto sakarību vispārīgi var pierakstīt šādi:

$$\underbrace{111...11}_{2k\ cipari} - \underbrace{222...22}_{k\ cipari} = \left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^2. \qquad (*)$$

Sniegsim divus uzdevuma risinājumus.

1. risinājums. Ievērojam, ka $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari} = \underbrace{999...99}_{2k\ cipari} : 9 = (10^{2k} - 1) : 9$.

Līdzīgi arī $\underbrace{222...22}_{k\ cipari} = 2 \cdot \underbrace{111...11}_{k\ cipari} = 2 \cdot (10^k - 1) : 9$ un

$$\underbrace{333...33}_{k\ cipari} = 3 \cdot \underbrace{111...11}_{k\ cipari} = 3 \cdot (10^k - 1) : 9 = (10^k - 1) : 3.$$

Aplūkosim tagad atsevišķi vienādības (*) kreiso un labo pusi:

- Vienādības (*) labā puse: $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari} - \underbrace{222...22}_{k\ cipari} = \frac{(10^{2k} - 1)}{9} - \frac{2 \cdot (10^k - 1)}{9} =$

$$= \frac{10^{2k} - 1 - 2 \cdot 10^k + 2}{9} =$$

$$= \frac{10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1}{9}$$

- Vienādības (*) kreisā puse: $\left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^2 = \left(\frac{10^k - 1}{3}\right)^2 =$

$$= \frac{10^{2k} - 2\cdot 10^k + 1}{9}$$

Tā kā vienādības (*) labās un kreisās puses izteiksmes ir vienādas, tātad arī dotā vienādība ir patiesa.

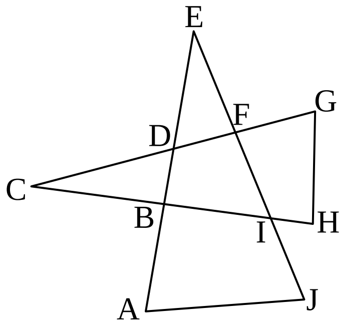
2. risinājums. Apzīmēsim $A = \underbrace{111...11}_{k\ cipari}$. Tad $\underbrace{222...22}_{k\ cipari} = 2A$, $\underbrace{333...33}_{k\ cipari} = 3A$ un $\underbrace{999...99}_{k\ cipari} = 9A$.

Savukārt $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari} = A \cdot \underbrace{100...01}_{k+1\ cipari} = A\left(10^k + 1\right)$.

Tāpēc $\underbrace{111...11}_{2k\ cipari} - \underbrace{222...22}_{k\ cipari} = A\left(10^k + 1\right) - 2A = A\cdot 10^k + A - 2A = A\left(10^k - 1\right) = A \cdot \underbrace{999...99}_{k\ cipari} =$

$= A\cdot 9A = 9A^2 = (3A)^2 = \left(\underbrace{333...33}_{k\ cipari}\right)^2$, kas arī bija jāpierāda.

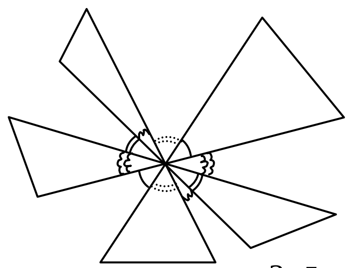
5. Tāds desmitstūris eksistē; 2. zīm. attēlots ieliekts desmitstūris *ABCDEFGHIJ,* kas pārklāt ar trijstūriem *AEJ* un *CGH.*



2.zīm.

Izliekta desmitstūra gadījumā uzdevumam atrisinājums neeksistē. Tiešām, izliekta desmitstūra iekšējo leņķu summa ir $180°\cdot 8$, bet viena trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$. Tā kā izliektā desmitstūrī, pārklājot to ar trijstūriem uzdevumā norādītajā veidā, katrs iekšējais leņķis ir vairāku trijstūru iekšējo leņķu summa, tad desmitstūra pārklāšanai nepieciešami vismaz 8 trijstūri.

6. Doto piecu trijstūru visu piecpadsmit iekšējo leņķu summa ir $5\cdot 180° = 900°$. Savukārt 3. zīmējumā redzams, ka katram no dotajā uzdevumā neiezīmētajiem trijstūru leņķiem ir pretī ar to vienādais krustleņķis. Tā kā centra leņķa lielums ir $360°$, tad doto piecu trijstūru sākotnējā zīmējumā neiezīmēto leņķu kopējā summa ir $360° : 2 = 180°$. Tātad uzdevumā desmit iezīmēto leņķu summa ir $900° - 180° = 720°$.


3.zīm.

7. Doto dalīšanas piemēru varam pierakstīt arī kā reizinājumu (skat. 4. zīm.).

$$\begin{array}{rcccc} & & e & j & a \\ \cdot & & & j & a \\ \hline & & i & j & a \\ & j & a & u & \\ \hline & s & e & j & a \end{array}$$

4.zīm

1) Apskatām reizinājumu $\overline{eja}\cdot a=\overline{ija}$. Acīmredzams, ka a nav 1. Tad a var būt 5 vai 6. Neatkarīgi no tā, vai a ir 5 vai 6, reizinājums ir trīsciparu skaitlis tikai tad, ja ***e* = 1**.
2) Tā kā $\overline{sej}=\overline{jau}+\overline{ij}$ un tātad $j+u=j$, tad skaidrs, ka ***u* = 0**. Ja tagad pieņemam, ka $a=6$, tad $i+a=i+6=11$ (jo iepriekš jau izspriedām, ka e = 1). Tātad i = 5. Bet tas nav iespējams, jo tādā gadījumā reizinājums $\overline{eja}\cdot a=\overline{1j6}\cdot 6$ nevar sākties ar ciparu i = 5, jo tas noteikti ir lielāks nekā $\overline{6**}$.
3) Tātad ***a* = 5**; no $i+a=i+5=11$ iegūstam, ka ***i* = 6**.
4) Ciparam j jābūt pāra, jo $\overline{eja}\cdot j=\overline{jau}$, tātad reizinājuma $a\cdot j$ jeb $5\cdot j$ pēdējais cipars ir u = 0. Turklāt j < 4, pretējā gadījumā $\overline{eja}\cdot a=145\cdot 5=724=\overline{ija}$, kas ir pretrunā ar to, ka i = 6. Vienīgais vēl neizmantotais pāra cipars, kas ir mazāks nekā 4, ir 2; tātad ***j* = 2**.
5) Tā kā $\overline{jau}+\overline{ij}=\overline{sej}$ jeb $250+62=312$, tad ***s* = 3**.
Uzdevuma atbildi skat. 5. zīm.

```
  3 1 2 5 : 1 2 5 = 2 5
 -2 5 0
    6 2 5
   -6 2 5
        0
```

5.zīm.

8. Atbilde: $n=4$.

Risinājums. Četrus punktus saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem izvietot var; kā piemērs der jebkura taisnstūra virsotņu kopa. Pierādīsim, ka vairāk nekā 4 punktus tā izvietot nevar.

Pieņemsim, ka n punkti izvietoti saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Apskatīsim visus nogriežņus, kam abi galapunkti atrodas divos no šiem n punktiem; pieņemsim, ka AB – garākais no šiem nogriežņiem (vai viens no nogriežņiem ar lielāko garumu, ja tādi ir vairāki).

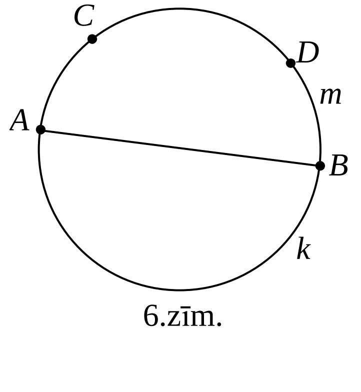
Apzīmēsim ar C jebkuru citu no izvietotajiem n punktiem. Pēc uzdevuma nosacījumiem ΔACB ir taisnleņķa trijstūris. Saskaņā ar punktu A un B izvēli, $AB\geq AC$ un $AB\geq BC$; tātad AB ir trijstūra ABC garākā mala. Tā kā taisnleņķa trijstūrī taisnais leņķis ir tikai viens un tas ir lielākais leņķis, bet katrā trijstūrī pret lielāko leņķi atrodas garākā mala, tad $\angle ACB=90°$.

Aplūkosim riņķa līniju ω ar diametru AB. No skolas kursa zināms, ka to punktu kopa, no kuriem nogriezni AB redz $90°$ leņķī, ir riņķa līnija ω bez punktiem A un B. Tātad visi n punkti pieder riņķa līnijai ω.

Pierādīsim, ka uz katra no lokiem AmB un AkB var atrasties ne vairāk kā viens no apskatāmajiem n punktiem, kas atšķiras no A un B. Pieņemsim pretējo, ka divi loka AmB punkti C un D pieder pie apskatāmās punktu kopas (skat. 6. zīm.). Tad pēc teorēmas par ievilkta leņķa mērīšanu
$\angle ACD=\frac{1}{2}\cup AkD=\frac{1}{2}\left(\cup AkB+\cup BmD\right)=90°+\frac{1}{2}\cup BmD>90°$.

Tātad ΔACD nav taisnleņķa trijstūris, un tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem.

Tā kā $\cup AmB$ un $\cup AkB$ katrs satur ne vairāk kā 1 no dotās kopas punktiem (bez A un B), tad šī kopa nevar saturēt vairāk kā 4 punktus.



6.zīm.

9. Intuitīvi skaidrs, ka viens cilvēks (apzīmēsim to ar *X*) redz skaitli, kas uzrakstīts uz kuba augšējās skaldnes (apzīmēsim šo skaitli ar *a*) un skaitļus, kas uzrakstīti uz divām blakus esošām kuba sānu skaldnēm (apzīmēsim šos skaitļus ar *b* un *c*). Bet otrs cilvēks (apzīmēsim to ar *Y*) redz skaitli *a*, kas uzrakstīts uz kuba augšējās skaldnes, un skaitļus, kas uzrakstīti uz abām pārējām kuba sānu skaldnēm (apzīmēsim tos ar *d* un *e*). Pagaidām pieņemsim, ka šis fakts ir spēkā.

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$a+b+c=15 \qquad (1)$$

$$a+d+e=7 \qquad (2)$$

Ievērosim, ka *a*, *b* un *c* vērtības var būt tikai 1; 2; 3; 4; 5; 6, pie tam *a*, *b* un *c* ir dažādi skaitļi. Tāpēc lielākā iespējamā $a+b+c$ vērtība ir $4+5+6=15$, un vienādība (1) izpildās **tikai** tādā gadījumā, ja *a*, *b* un *c* ir 4, 5 un 6 (pagaidām nav svarīgi, kurš skaitlis pieņem kādu no šīm vērtībām).

Kāda var būt *a* vērtība?

Ja $a=6$, tad no (2) izriet, ka $d+e=1$. Tas nav iespējams, jo $d \ge 1$ un $e \ge 1$.

Ja $a=5$, tad no (2) izriet, ka $d+e=2$. Tā kā $d \ge 1$ un $e \ge 1$, tad secinām, ka $d=1$ un $e=1$. Tas nav iespējams, jo *d* un *e* jābūt dažādiem.

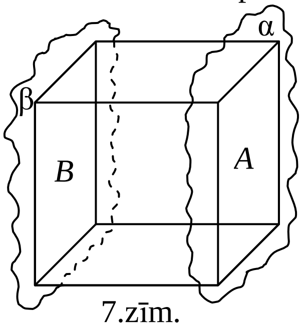
Tātad $a=4$. No (2) izriet, ka $d+e=3$, Tā kā $d \ge 1$, $e \ge 1$ un $d \ne e$, tad $d+e=3$ iespējams tikai tādā gadījumā, ja viens no skaitļiem *d* un *e* ir 1, bet otrs ir 2. Tātad *X* redz skaitļus 4; 5; 6, bet *Y* – skaitļus 4; 1; 2. Vienīgais skaitlis, ko neredz ne *X*, ne *Y* – skaitlis 3 – tātad uzrakstīts uz apakšējās skaldnes.

Lai pierādījums būtu precīzs, vēl jāpamato sākumā izteiktais apgalvojums par to, kādas skaldnes redz *X* un *Y*.

Vispirms pierādīsim palīgrezultātu.

Lemma. Cilvēks nevar vienlaicīgi redzēt abus skaitļus, kas uzrakstīti uz kauliņa pretējām skaldnēm.

Caur kuba divām pretējām skaldnēm *A* un *B* novilksim plaknes α un β (skat. 7. zīm.).



7.zīm.

Tā kā *A* un *B* ir paralēlas skaldnes, tad arī plaknes α un β ir paralēlas. Tātad tās nešķeļas. Lai cilvēks varētu redzēt skaitli uz skaldnes *B*, tam jāatrodas pa kreisi no β; lai varētu redzēt skaitli uz skaldnes *A*, jāatrodas pa labi no α. Tā kā α un β nešķeļas, tad nav tādu punktu, kas vienlaicīgi atrastos pa kreisi no β un pa labi no α. Lemma pierādīta.

Sadalām 4 kuba sānu skaldnes divos pāros tā, ka vienā pārī ietilpst pretējās skaldnes. No lemmas secinām, ka gan *X*, gan *Y* no katra pāra redz tikai vienu skaldni, tātad gan *X*, gan *Y* redz pa divām sānu skaldnēm, pie tam tām ir kopīga šķautne. Tā kā pēc dotā, ka gan *X*, gan *Y* redz pa trim skaldnēm, tad tie abi noteikti redz augšējo skaldni.

1. piezīme. Lemmas pierādījumā pieņemts, ka cilvēks ir „punkts”, kas nevar vienlaicīgi atrasties pa kreisi no β un pa labi no α. Ja ievērojam, ka cilvēkam ir divas acis, no kurām viena varbūt atrodas pa kreisi no β, bet otra – pa labi no α (tas ir iespējams, ja attālums starp acīm ir lielāks nekā kuba šķautnes garums), tad minētais spriedums nav spēkā, un varbūt iespējami arī citi atrisinājumi. Iesakām lasītājam patstāvīgi analizēt šādu situāciju.

2. piezīme. Labojot iesūtītos darbus, profesors Cipariņš neuzskatīs par kļūdu, ja skolēns nebūs pierādījis, ka cilvēks nevar redzēt pretējās skaldnes.

10. Sanumurēsim akmeņus un apzīmēsim tos ar a_1, a_2, ..., a_{14}, a_{15}. Pārbaudām kaudzi $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Ja tajā radioaktīvu akmeņu nav, pārejam pie etapa Σ (skat. tālāk). Ja minētajā kaudzē ir radioaktīvi akmeņi, pārbaudām kaudzi $\{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$. Ja šajā kaudzē radioaktīvu akmeņu nav, tad abi radioaktīvie akmeņi ir starp desmit akmeņiem $a_1, a_2, a_3, a_4, a_{10}, a_{11}$, $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$; pārejam pie etapa Σ, ievērojot, ka starp a_1, a_2, a_3, a_4 ir vismaz viens radioaktīvs akmens. Ja starp a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 ir radioaktīvi akmeņi, pārbaudām akmeni a_5 (trešā pārbaude). Ja a_5 nav radioaktīvs, tad pa vienam radioaktīvam akmenim ir kaudzēs $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ un $\{a_6, a_7, a_8, a_9\}$; katru no šiem akmeņiem var atrast ar divām pārbaudēm. Gadījumā, kad a_5 ir radioaktīvs, starp atlikušajiem 14 akmeņiem viegli atrast vienu radioaktīvo akmeni ar 4 pārbaudēm.

Etaps Σ. Aplūkosim, kā ar 6 pārbaudēm var atrast 2 radioaktīvus akmeņus starp 10 akmeņiem. Apzīmēsim šos desmit akmeņus ar b_1, b_2, ..., b_9, b_{10}.

Pārbaudām kaudzi $A = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ (šī pārbaude nav jāveic, ja zinām, ka starp a_1, a_2, a_3, a_4 (te $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$) ir vismaz viens radioaktīvs akmens). Ja tajā nav neviena radioaktīva akmens, tad atlikušās piecas pārbaudes izmantojam, lai noteiktu, kuri no atlikušajiem akmeņiem b_5, b_6, ..., b_{10} ir radioaktīvi (pārbaudām katru akmeni atsevišķi). Aplūkosim gadījumu, kad kaudzē *A* ir radioaktīvi akmeņi, un parādīsim, kā var pabeigt meklēšanu ar 5 pārbaudēm.

Vispirms pārbaudām kaudzi $B = \{b_4, b_5, b_6\}$. Ja tajā ir radioaktīvi akmeņi, tad otrajā pārbaudē apsekojam akmeņus b_5 un b_6. Ja starp tiem ir radioaktīvs akmens (noteikti tikai viens), tad ar vienu pārbaudi nosakām vienīgo radioaktīvo akmeni (b_5 vai b_6), bet ar divām pārbaudēm nosakām vienīgo radioaktīvo akmeni kaudzē *A*. Ja otrajā pārbaudē radioaktīvi akmeņi nav konstatēti, tad viens no radioaktīvajiem akmeņiem ir b_4, bet otrs atrodas kaudzē $\{b_1, b_2, b_3, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$ un to var noteikt ar trim pārbaudēm.

Ja pirmajā pārbaudē konstatēts, ka kaudzē *B* nav radioaktīvu akmeņu, tad abi radioaktīvie akmeņi ir kaudzē $\{b_1, b_2, b_3, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$, turklāt vismaz viens no tiem ir kaudzē $\{b_1, b_2, b_3\}$. Otrajā pārbaudē apsekojam b_3 un b_7. Ja neviens no tiem nav radioaktīvs, pārbaudām b_1. Ja b_1 nav radioaktīvs, tad viens radioaktīvais akmens ir b_2, bet otrs atrodas kaudzē $\{b_8, b_9, b_{10}\}$ un to var atrast ar divām pārbaudēm. Gadījumā, kad b_1 ir radioaktīvs, otrs radioaktīvais akmens ir kaudzē $\{b_2, b_8, b_9, b_{10}\}$ un to atkal var noteikt ar divām pārbaudēm.

Atliek aplūkot gadījumu, kad radioaktīvie akmeņi ir starp b_3 un b_7. Tad ar trešo pārbaudi pārbaudām kaudzi $\{b_1, b_2\}$. Ja tajā ir radioaktīvs akmens (noteikti tikai viens), tad ar divām atlikušajām pārbaudēm abus radioaktīvos akmeņus var noteikt – viens no tiem ir kaudzē $\{b_1, b_2\}$, bet otrs – kaudzē $\{b_3, b_7\}$. Ja turpretī kaudzē $\{b_1, b_2\}$ radioaktīvu akmeņu nav, tad viens no radioaktīvajiem akmeņiem ir b_3, bet otrs ir meklējams kaudzē $\{b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$ un to var atrast ar divām pārbaudēm.