2012./2013. mācību gads
1. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: Kūka *Skudru pūznis* ir divas reizes dārgāka nekā kūka *Cielaviņa*.

Sniegsim divus risināšanas veidus.

1. risinājums. Apzīmēsim vienas kūkas *Skudru pūznis* cenu ar P, kūkas *Kristīne* cenu ar K, bet kūkas *Cielaviņa* cenu – ar C.

Apgalvojumu „trīs kūkas *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik četras kūkas *Kristīne*" pierakstīsim: $PPP = KKKK$.

Apgalvojumu „divas kūkas *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik viena *Cielaviņa* un divas *Kristīnes* kopā" pierakstīsim: $PP = CKK$.

Pirmās vienādības kreisajā pusē, atbilstoši otrās vienādības sakarībai, PP aizstāsim ar CKK, iegūstot sakarību $PCKK=KKKK$. Tā kā abām pusēm kopīgs ir KK (jeb abās pusēs divreiz pieskaitīta kūkas *Kristīne* cena), tad vienādības patiesums nemainīsies, ja šos KK no abām pusēm *atmetam*, iegūstot: $PC = KK$.

Līdzīgi vienādības patiesums nemainīsies, ja abām pusēm pieskaitīsim C; to izdarot, iegūstam vienādību $PCC = CKK$.

Atkal izmantosim otro uzdevumā doto sakarību un aizstāsim CKK ar PP, iegūstot $PCC = PP$. Ievērojam, ka abās vienādības pusēs ir kopīgs P, tāpēc, to *atmetot*, iegūstam $CC = P$, no kurienes secinām uzdevumā prasīto sakarību: viena kūka *Skudru pūznis* maksā tikpat, cik divas kūkas *Cielaviņa*.

2. risinājums. Uzdevumu var viegli atrisināt, tā nosacījumu pierakstot ar vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 3p = 4k \\ 2k + c = 2p \end{cases} \quad (1),$$

kur p – kūkas *Skudru pūznis* cena, k – kūkas *Kristīne* cena, c – kūkas *Cielaviņa* cena.

Pareizināsim pirmā vienādojuma abas puses ar skaitli 2, bet otrā vienādojuma abas puses – ar 3, tādējādi iegūstot

$$\begin{cases} 6p = 8k \\ 6k + 3c = 6p \end{cases}.$$

Atbilstoši sistēmas pirmajam vienādojumam, otrā vienādojuma labajā pusē esošo $6p$ aizstājam ar $8k$, iegūstot sakarību $6k + 3c = 8k$. No vienādības abām pusēm atņemot $6k$ (jeb *pārnesot* $6k$ uz vienādības labo pusi), iegūstam, ka $3c = 2k$.

Vienādojumam abām pusēm pieskaitām c:

$3c + c = 2k + c$ un

$4c = 2k + c$

Ievērojam, ka vienādojumu sistēmā (1) no otrā vienādojuma var secināt, ka $2k + c$ vienāds ar $2p$, tāpēc jau iegūtā sakarība *pārvēršas* par $4c = 2p$. Vienādības abas puses izdalot ar vienu un to pašu skaitli 2, iegūstam, ka $2c = p$, no kurienes arī iegūstam uzdevuma atbildi: kūka *Skudru pūznis* ir divas reizes dārgāka nekā kūka *Cielaviņa*.

2. Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās gan ar skaitli 3, gan ar 5. Turklāt, ja skaitlis dalās ar 5, tad pēdējais tā cipars ir 0 vai 5. Meklētā palindroma pēdējais cipars nevar būt 0, jo tad arī tā pirmajam ciparam būtu jābūt 0, kas būtu pretrunā ar nosacījumu, ka jāmeklē sešciparu palindroms.

Tātad mums jāmeklē lielākais sešciparu palindroms, kura pirmais un pēdējais cipars ir 5 un kurš dalās ar 3. Lielākais šāds sešciparu skaitlis var tikt uzrakstīts formā $59aa95$, kur a – cipars.

Atcerēsimies naturāla skaitļa pazīmi dalīšanai ar 3: naturāls skaitlis dalās ar skaitli 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3. Iegūtā skaitļa ciparu summa ir $5+9+a+a+9+5=18+10+2a=18+2(5+a)$. Tā kā 18 jau dalās ar 3, tad, lai summa $18+2(5+a)$ dalītos ar 3, arī $2(5+a)$ jādalās ar 3. Šis reizinājums dalās ar 3 tad, ja iekavās esošā izteiksme dalās ar 3. No visiem cipariem kā a vērtība der skaitļi 1; 4 un 7. Tā kā mums jānosaka lielākais sešciparu skaitlis, tad $a = 7$. Tātad uzdevumā prasītais skaitlis ir **597795**.

3. Katrs pārgājiena dalībnieks izēd pusi no zupas iepakojuma, trešdaļu no salātu iepakojuma un ceturto daļu no šokolādes krēma porcijas. Tātad katrs pārgājiena dalībnieks ir izēdis $\frac{1}{2}^{(\cdot 6} + \frac{1}{3}^{(\cdot 4} + \frac{1}{4}^{(\cdot 3} = \frac{13}{12}$ no visiem pārtikas iepakojumiem. Tad pavisam kopā ir izēsti $\frac{13}{12} \cdot n$ pārtikas iepakojumi, kur n – kopīgais pārgājiena dalībnieku skaits.

Tā kā dots, ka kopējais izlietoto iepakojumu skaits ir 156, varam izveidot vienādojumu:

$$\frac{13}{12} n = 156,$$

no kurienes $n = \frac{12}{13} \cdot 156 = 144$.

Tātad pārgājienā piedalījās **144** dalībnieki.

4. Atbilde: Taisnība ir Dacei; vienādojumam ir divi atrisinājumi: $a = 12$, $b = 2$ un $a = 144$, $b = 4$.

Atrisinājums.

Ievērojam, ka vienādojuma labā puse $9b^2$ ar jebkurām naturāla skaitļa b vērtībām vienmēr būs naturāls skaitlis (naturālu skaitli kāpinot kvadrātā, iegūst naturālu skaitli).

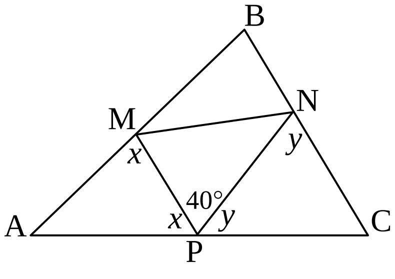
Tātad arī vienādojuma kreisās puses vērtībai ir jābūt naturālam skaitlim. Sadalām to reizinātājos, iegūstot $5a - ab = a(5 - b)$. Tā kā reizinātājs a ir naturāls skaitlis, tad arī iekavās esošajai starpībai jābūt naturālam skaitlim. Tas iespējams tad, ja skaitļa b vērtība nepārsniedz 4 (jeb $b \le 4$). Tāpēc iespējamas četras skaitļa b vērtības: 1; 2; 3 un 4. Apskatīsim katru no tām atsevišķi:

- Ja $b = 1$, tad iegūstam vienādojumu $(5 - 1)a = 9 \cdot 1^2$, tātad $4a = 9$. Redzam, ka šim vienādojumam nav atrisinājumu veselos skaitļos *a*.
- Ja $b = 2$, tad iegūstam vienādojumu $(5 - 2)a = 9 \cdot 2^2$, tātad $3a = 36$ un $a = 12$. Iegūstam vienu no atrisinājumiem: ***a* = 12**, ***b* = 2**.
- $b = 3$, tad iegūstam vienādojumu $(5 - 3)a = 9 \cdot 3^2$, tātad $2a = 81$. Redzam, ka arī šim vienādojumam nav atrisinājumu veselos skaitļos *a*.
- $b = 4$, tad iegūstam vienādojumu $(5 - 4)a = 9 \cdot 4^2$, tātad $a = 144$. Iegūstam otru atrisinājumu: ***a* = 144**, ***b* = 4**.

Jau iepriekš pierādījām, ka apskatītās *b* vērtības ir vienīgās iespējamās, tātad iegūtās ir vienīgās uzdevuma atbildes.

5. Apzīmējam leņķa $\angle AMP$ lielumu ar *x* (skat. 1. zīm.). Tā kā dots, ka *AM* = *AP*, un trijstūrī pretī vienādām malām atrodas vienādi leņķi, tad $\angle APM = \angle AMP = x$.

Līdzīgi apzīmējot $\angle CNP = y$, no malu *NC* un *CP* vienādības izriet, ka $\angle CPN = \angle CNP = y$.



1.zīm.

Tā kā punkti *A*, *P* un *C* atrodas uz vienas taisnes, tad $\angle APC = 180°$; tāpēc $x + y + 40° = 180°$, no kurienes $x + y = 140°$.

Izmantosim to, ka katram trijstūrim visu trīs leņķu summa ir 180°. Tāpēc varam izteikt $\angle BAC$ un $\angle ACB$ lielumu: $\angle BAC = 180° - 2x$ un $\angle ACB = 180° - 2y$.

Savukārt $\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA$. Ievietojot vienādībā izteiktos $\angle BAC$ un $\angle ACB$ lielumus, iegūstam:

$$\angle MBN = \angle ABC = 180° - (180° - 2x) - (180° - 2y) =$$
$$= 180° - 180° + 2x - 180° + 2y =$$

$$= 2x + 2y - 180° =$$
$$= 2(x + y) - 180°$$

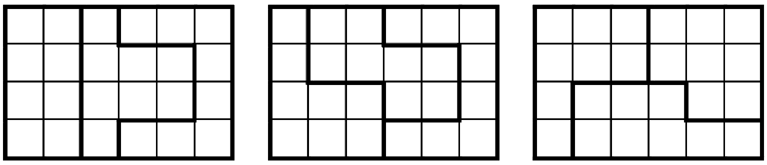
Ievietojam iekavās iepriekš izteikto x un y summas vērtību, iegūstot

$$\angle ABC = 2 \cdot 140° - 180° =$$
$$= 280° - 180° =$$
$$= \mathbf{100°}$$

6. a) Tā kā katra dotā puzles gabaliņa laukums ir 8 rūtiņas, tad trīs gabaliņu veidotā taisnstūra laukumam jābūt $3 \cdot 8 = 24$ rūtiņas. Iespējamie taisnstūra malu garumi var būt 1×24, 2×12, 3×8, 4×6 rūtiņas.

Noteikti nevar salikt taisnstūri ar izmēriem 1×24, jo visu puzles gabaliņu garums un platums ir lielāki nekā 1 rūtiņa; arī taisnstūri ar izmēriem 2×12 salikt nevar, jo tikai divu figūriņu platums ir divas rūtiņas, bet nepieciešams izmantot trīs figūriņas. Patstāvīgi var pārliecināties, ka arī taisnstūri ar izmēriem 3×8 salikt nevar.

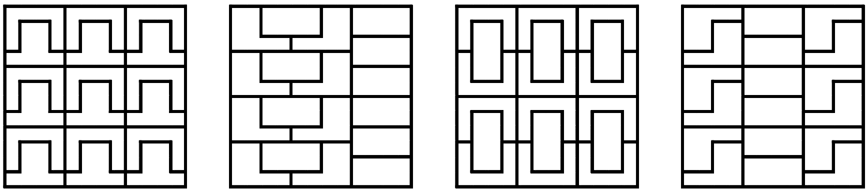
Trīs piemērus, kā var salikt taisnstūri ar izmēriem 4×6 rūtiņas, skat., 2. zīm.



(2), (3), (1) (5), (8), (1) (5), (4), (7)

2.zīm.

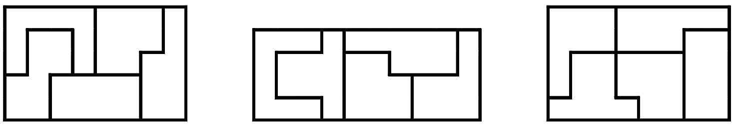
b) Vairākus piemērus, kā prasīto var izdarīt, skat., 3. zīm.



(1) & (3) (2) & (5) (1) & (2) (2) & (5)

3.zīm.

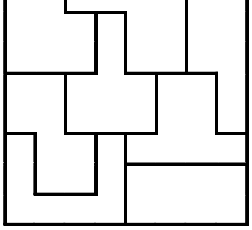
c) Vairākus piemērus, kā prasīto var izdarīt, skat., 4. zīm.



(1), (2), (4), (7), (8) (1), (3), (4), (5), (7) (2), (3), (4), (5), (7)

4.zīm.

Atbildi **patstāvīgajam treniņam** dotajam uzdevumam skat. 5. zīm.



5.zīm.

7. a) Izmantojot uzdevumā doto darbības ∇ definīciju, aprēķinām $2\nabla 5 = \dfrac{2+5}{1+2\cdot 5} = \dfrac{7}{11}$.

b) Ievērojot darbību secību, vispirms aprēķinām iekavās esošās izteiksmes vērtību:

$$(1\nabla 2)\nabla 3 = \left(\frac{1+2}{1+1\cdot 2}\right)\nabla 3 = \left(\frac{3}{3}\right)\nabla 3 = 1\nabla 3 = \frac{1+3}{1+1\cdot 3} = 1.$$

Piezīme. Var pierādīt, ka katram nenegatīvam skaitlim *b*, izteiksmes $1\nabla b$ vērtība ir vienāda ar 1. Patiešām, $1\nabla b = \frac{1+b}{1+1\cdot b} = \frac{1+b}{1+b} = 1$.

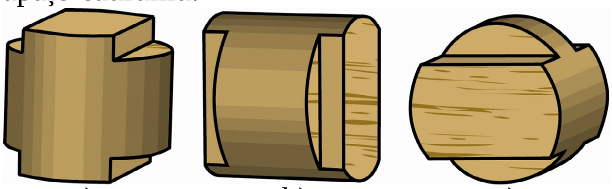
c) Izsakām $2\nabla x$, izmantojot doto darbības definīciju:

$$2\nabla x = \frac{2+x}{1+2x}.$$

Tātad $\frac{2+x}{1+2x} = \frac{5}{7}$.

Tā kā algebriskās daļas saucēja $1+2x$ vērtība visiem pieļaujamajiem x nav 0 (darbība ∇ definēta tikai nenegatīviem skaitļiem), tad, vienādojot abu vienādojuma pušu saucējus, iegūstam $7(2+x) = 5(1+2x)$, no kurienes tālāk $14+7x = 5+10x$ un $9 = 3x$, tātad ***x* = 3**.

8. Viens piemērs, kā var izskatīties korķis, ar kuru var aiztaisīt visus trīs uzdevumā dotos caurumus, parādīts 6. zīm.; attēlā korķis redzams no trim pusēm.
Pagriežot korķi, kā parādīts a) gadījumā, var aiztaisīt *krustveida* caurumu; pagriežot korķi, kā parādīts b) gadījumā, var aiztaisīt taisnstūra veida caurumu; pagriežot korķi, kā parādīts c) gadījumā, var aiztaisīt apaļo caurumu.



a) b) c)

6.zīm.

9. Uzdevumā prasīto var izdarīt diezgan vienkārši – vispirms visi draugi automašīnā ieliek veļas mašīnu, un divi draugi kopā ar veļas mašīnu aizbrauc līdz dzīvoklim. Tur viens no viņiem izkāpj, bet otrs – aizbrauc pakaļ trešajam draugam. Kad arī viņi ir aizbraukuši uz dzīvokli, visi trīs draugi izceļ veļas mašīnu un nogādā to dzīvoklī.

10. Viens no uzdevuma atrisinājumiem ir šāds (tabulas augšā norādīts trauku tilpums, zemāk – sākotnējais piena daudzums, bet katrā nākamajā rindā – piena daudzums katrā traukā pēc katras darbības):

80 *l*	80 *l*	5 *l*	4 *l*
80	80	0	0
75	80	5	0
75	80	1	4
79	80	1	0
74	80	0	1
74	80	5	1
74	80	2	4
78	80	2	0
78	76	2	4
80	76	2	2

Tātad no vienas kannas piepilda 5 *l* krūzi, tad no tās pārlej pienu 4 *l* krūzē. Pēc tam 4 *l* krūzes saturu ielej atpakaļ kannā u.t.t. Tas viss ir viegli izdarāms. Pievērsiet uzmanību divām pēdējām asprātīgajām operācijām: 4 *l* krūzi pielej no otras kannas, pēc tam līdz augšai piepilda pirmo kannu.

2012./2013. mācību gads
2. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: Sprīdītis nevarēs izpildīt Skopuļa prasību.

Risinājums. Dotā skaitļa ciparu summa ir 5. Zināms, ka 5 nedalās ar 3. Tātad arī dotais skaitlis nedalās ar 3.

Triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa S dalās ar 3:

$$S = n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1).$$

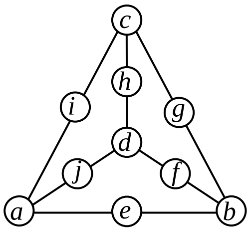
Arī triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu reizinājums $R = n(n+1)(n+2)$ dalās ar 3. Pierādīsim to. Apskatīsim skaitļa n iespējamos atlikumus, dalot ar 3:

- Ja n dalās ar 3, tad ar 3 dalās arī reizinājums R.
- Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad $n + 2$ dalās ar 3 un tāpēc arī R dalās ar 3.
- Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad $n + 1$ dalās ar 3 un arī R dalās ar 3.

Tā kā n vai nu dalās ar 3 bez atlikuma, vai arī dod atlikumā 1 vai 2, tad esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus.

Tātad gan S, gan R dalās ar 3. Tāpēc varam izteikt $S = 3 \cdot k$ un $R = 3 \cdot m$, kur k un m – veseli skaitļi. Tad starpība $S - R = 3k - 3m = 3(k - m)$ arī dalās ar 3. Tā kā dotais skaitlis nedalās ar 3, bet meklējamo skaitļu starpība noteikti dalās ar 3, tad Skopuļa prasību izpildīt nevar.

2. Apzīmēsim ar S uz katras taisnes esošo trīs skaitļu summu, un ar burtiem no a līdz j apzīmēsim aplīšos ierakstītos skaitļus, kā parādīts 1. zīm.



1.zīm.

Ievērojam, ka skaitļi a, b, c, d sastopami pavisam uz trīs taisnēm, bet visi pārējie – katrs tieši uz vienas taisnes. Tāpēc, saskaitot uz visām sešām taisnēm uzrakstīto skaitļu summas, iegūstam

$$3(a+b+c+d) + (e+f+g+h+i+j) = 6S \text{ jeb}$$

$$2(a+b+c+d) + (a+b+c+d) + (e+f+g+h+i+j) = 6S. \qquad (1)$$

Visu desmit skaitļu no 1 līdz 10 summa ir 55, t.i.,

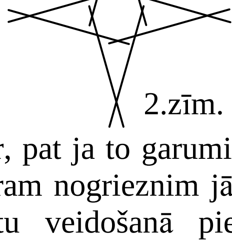
$$(a+b+c+d) + (e+f+g+h+i+j) = 55.$$

Tad vienādību (1) varam pārrakstīt

$$2(a+b+c+d) + 55 = 6S.$$

Ievērojam, ka skaitlis 55 ir nepāra skaitlis, bet $2(a+b+c+d)$ un $6S$ – pāra skaitļi. Esam ieguvuši pretrunu, tāpēc uzdevumā prasīto izdarīt nav iespējams.

3. Astoņus nogriežņus tā uzzīmēt var (skat. 2. zīm.).

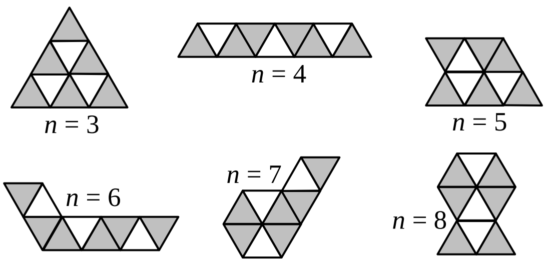


2.zīm.

Septiņus nogriežņus tā uzzīmēt nevar, pat ja to garumi būtu dažādi. Taču pieņemsim, ka to var izdarīt. Tā kā, pēc noteikumiem, katram nogrieznim jākrusto 3 citi, varam saskaitīt to veidotos krustošanās punktus: 3 krustpunktu veidošanā piedalās 1. nogrieznis, 3 krustpunktu – 2. nogrieznis, ..., 3 krustpunktu – 7. nogrieznis; pavisam iegūstam 21 krustošanās punktu. Taču katru divu nogriežņu *a* un *b* krustošanās te ieskaitīta divas reizes: krustošanās, kurās piedalās nogrieznis *a*, un krustošanās, kurās piedalās nogrieznis *b*. Tātad rezultātā būtu jāiegūst pāra skaitli, taču ieguvām nepāra skaitli. Šī pretruna rāda, ka sākotnējais pieņēmums bijis nepareizs un 7 nogriežņus prasītajā veidā uzzīmēt nevar.

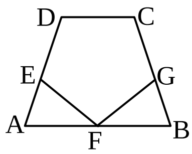
4. Kad Didzis bija veicis $\frac{1}{6}$ jeb $\frac{4}{24}$ visas distances, Raivis jau bija veicis $\left(1-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}=\frac{5}{6}-\frac{1}{8}=\frac{17}{24}$ visas distances. Tātad Raivja ātrums ir $\frac{17}{4}$ reizes lielāks nekā Didža ātrums. Didzim vēl bija jāskrien $\frac{5}{6}$ visas distances, bet viņa sāncensim – tikai $\frac{1}{6}$ distances. Tātad, lai Didzis varētu finišēt vienlaikus ar Raivi, viņam jāskrien ar ātrumu, kas 5 reizes lielāks nekā Raivja ātrums, t.i., 5 reizes lielāku nekā $\frac{17}{4}$ no Didža sākotnējā ātruma. Tātad Didzim jāskrien $\frac{85}{4}$ reizes ātrāk nekā sākumā.

5. Visām trim trapecēm kopā ir 12 virsotnes. Savienojot divas trapeces kopā, iegūtās figūras virsotņu skaits samazinās vismaz par 2. Tāpēc lielākā iespējamā *n* vērtība ir $12-2\cdot 2=8$. Tā kā iegūtajai figūrai jābūt daudzstūrim, tad *n* ir vismaz 3. Piemērus katrai *n* vērtībai no 3 līdz 8 skat. 3. zīm.



3.zīm.

6. Izliekta piecstūra visu leņķu summa ir $180°\cdot(n-2)=180°\cdot(5-2)=540°$. Ja piecstūrim *CDEFG* (skat. 4. zīm.) visi leņķi ir vienādi, tad katrs leņķis ir $540°:5=108°$ liels.



4.zīm.

Pierādīsim, ka ΔAEF ir vienādsānu. Patiešām, $\angle AEF=72°$, jo tas ir piecstūra ārējais leņķis. Tā kā $AB \parallel DC$, un $\angle EAF$ ar $\angle EDC$ ir iekšējie šķērsleņķi, tad $\angle EAF=180°-108°=72°$. Trijstūrī pretī vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tāpēc $AF=EF$. Tātad ΔAEF ir vienādsānu.

Līdzīgi iegūstam, ka arī ΔBGF ir vienādsānu un tāpēc $BF=GF$.

Bet tad $AB=AF+FB=EF+FG=DC+DC=2\cdot DC$ (jo regulāra piecstūra visas malas ir vienāda garuma). Tāpēc $DC=\frac{1}{2}\cdot AB=\mathbf{30}$ ***cm***.

7. Skaitlis dalās ar 8 un 9. Tātad tā ciparu summai jādalās ar 9. Ciparu summa ir $4+2+4+a+b=10+a+b$. Tātad vai nu $a+b=8$, vai arī $a+b=17$ (jo $0\le a\le 9$ un $0\le b\le 9$).

Aplūkojam gadījumu, kad $a+b=8$. Ievērojam, ka triju pēdējo ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 8 (jo $\overline{42a4b}=42000+\overline{a4b}$, un gan $\overline{42a4b}$, gan 42000 dalās ar 8). Pārbaudot iespējas $a=0,1,...,8$, iegūstam 2 atbildes: 1) $a=0$, $b=8$; 2) $a=8$, $b=0$.

Ja $a+b=17$, tad vai nu $a=9$ un $b=8$, vai arī $a=8$ un $b=9$. Pārbaudot redzam, ka neviena no šīm iespējām neder.

8. Apzīmēsim taisnstūra malu garumus ar *x* un *y*. Tad vienīgais nosacījums, kas dots uzdevumā, ir $2x+2y=xy$; bez tam *x* un *y* jābūt veseliem skaitļiem. Šos nosacījumus apmierina, piemēram, vērtības $x=4$, $y=4$, kā arī $x=3$, $y=6$.

Tā kā mums nav nekādu noteikumu, kas dotu iespēju izvēlēties kādu no šīm divām atbildēm (bez tam pastāv iespēja, ka ir arī citas *x* un *y* vērtības, kas apmierina uzdevuma nosacījumu), tad taisnstūra izmērus noteikt nevar.

Noskaidrosim visus iespējamos šādas istabas grīdas izmērus.

Vienādojumu $2x+2y=xy$ var izteikt formā $x(y-2)=2y$. Tā kā $x>0$ un $y>0$, tad arī $y-2>0$; un $x=\frac{2y}{y-2}$. Acīmredzot taisnstūra izmēri var būt jebkuri skaitļi *x* un *y*, kur $y>2$ un $x=\frac{2y}{y-2}$.

Parādīsim, kā atrast visus vienādojuma atrisinājumus **naturālos skaitļos**. Vienādojumu var pārrakstīt arī formā $(x-2)(y-2)=4$. Skaitli 4 var sadalīt 2 naturālu skaitļu reizinājumā tikai 3 veidos: 4 · 1, 2 · 2, 1 · 4. Attiecīgi iegūstam šādas iespējas:

$x-2=4$	$x-2=2$	$x-2=1$
$y-2=1$	$y-2=2$	$y-2=4$

Rezultātā ir 3 atrisinājumi: $x=6$ un $y=3$; $x=4$ un $y=4$; $x=3$ un $y=6$.

9. a) No nosacījumiem (3) un (5) secinām, ka Kristīne sēž kopā ar Lindu. Bet tad no nosacījuma (1) izriet, ka Patrīcijai jāsēž kopā ar Sandru. Tāpēc no nosacījuma (4) secinām, ka Renāte sēdēs kopā ar Annu. Tad atliek, ka Justīnei jāsēž kopā ar Nikolu.

b) Atbilstoši nosacījumam (4), Renāte un Nikola nesēž pie viena sola; tātad Renāte sēž sola vidū un pa labi no viņas – Sandra (6. nosac.). Iegūstam šādu izkārtojumu pie viena no soliem:

	Renāte	*Sandra*

Tā kā Justīne grib sēdēt blakus vai nu Nikolai, vai Annai (1. nosac.), tad viņa noteikti nesēž pie šī paša galda. Savukārt no 2. nosacījuma izriet, ka arī Kristīne sēž pie otra sola. Tātad Justīnei jāsēž blakus gan Kristīnei, gan arī Nikolai vai Annai, tāpēc viņa sēž otra sola vidējā vietā. Tātad šobrīd izkārtojums pie otra sola ir šāds:

	Justīne	*Kristīne*

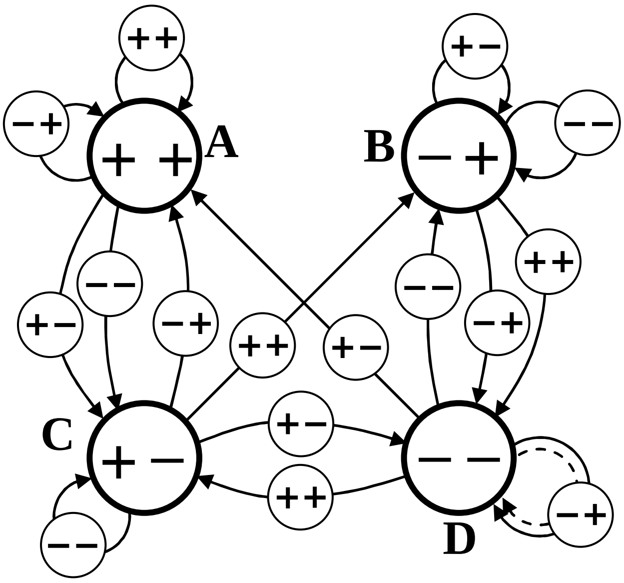
Tā kā Renāte nevēlas sēdēt blakus Nikolai (4. nosac.), tad viņa sēž pie otrā sola (tiek ievērots arī 1. nosacījums), bet tad Anna sēž pirmā sola kreisajā malā (tādējādi tiek apmierināts arī 3. un 5. nosac.).

Esam ieguvuši šādu izkārtojumu pie galdiem (viegli pārbaudīt, ka visi nosacījumi tiek ievēroti):

Anna	*Renāte*	*Sandra*

Nikola	*Justīne*	*Kristīne*

10. Uzdevuma nosacījumus var attēlot ar 5. zīm. doto diagrammu.



5.zīm.

Ar tumšākajām līnijām apvilktie aplīši norāda uz spoku uzvedību: aplītī ierakstītā pirmā zīme rāda, vai dziedošais spoks dzied vai klusē, bet otrā – kā izturas smejošais spoks. Tā, piemēram, aplītis A atbilst stāvoklim, kad abi spoki ir trokšņaini. Skaidrs, ka pavisam iespējami 4 stāvokļi.

Atkarībā no darbībām ar ērģelēm un sveci, spoku izturēšanās mainās. Šīs izmaiņas diagrammā atspoguļojas ar bultiņām. Bultiņu vidū esošajās aplīšos ierakstītās zīmes rāda, kādām darbībām ar ērģelēm un sveci atbilst šī bultiņa: pirmā zīme rāda, vai ērģeles skan vai nē, otrā zīme – svece deg vai nē. Tā, piemēram, bultiņa, kas iet no C uz A, rāda, ka gadījumā, ja kādas minūtes laikā dziedošais spoks dziedājis, bet smejošais spoks klusējis un ērģeles nav skanējušas, bet svece degusi, tad nākošās minūtes laikā abi spoki atkal trokšņos.

Diagramma izveidota, pamatojoties uz uzdevuma noteikumos doto informāciju par spoku izturēšanos: parādīts, kādas izmaiņas notiek katrā stāvoklī, kas atbilst vienam no 4 iespējamiem spoku izturēšanās veidiem, ja veic jebkuru no 4 iespējamām darbībām ar sveci un ērģelēm. No katra stāvokļa A, B, C, D, kas atbilst vienam no iespējamiem spoku izturēšanās veidiem, jāiziet 4 bultiņām (bultiņas, kas iziet no viena stāvokļa un nonāk vienā citā stāvoklī, var arī apvienot, bultiņas vidū esošajā aplītī ierakstot abas ērģeļu un sveces stāvokļu kombinācijas, kurām tās atbilst).

Pēc uzdevuma noteikumiem, pašreizējais stāvoklis atbilst aplītim A, bet pa diagrammas bultiņām mums jānonāk un jāpaliek aplītī D. Acīmredzot to var panākt, ejot, piemēram, no A uz C, no C uz D un pēc tam visu laiku pārejot no D uz D pa bultiņu, kas uzzīmēta ar pārtrauktu līniju. Atceroties, ko norāda zīmes aplīšos bultiņu vidū, redzam, ka to var panākt, piemēram, ar šādām darbībām: pašreizējās minūtes laikā nedara neko (bultiņa, kas iziet no A un atbilst „– –”, novedīs aplītī C), pēc tam vienu minūti jāskan ērģelēm, nedegot svecei (bultiņa, kas iziet no C un atbilst „+ –”, noved aplītī D), bet pēc tam ērģelēm jāapklust un jāiedegas svecei (bultiņa, kas iziet no D un atbilst „– +”, visu laiku atgriežas D).

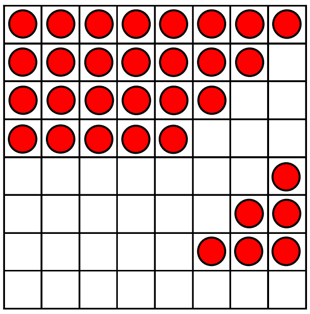
2012./2013. mācību gads
3. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: $4940 + 5940 = 10880$.

Risinājums: Tā kā G ir pārnesums, kas veidojas, saskaitot divus ciparus, tad $G = 1$. Tā kā summa $A + A$ beidzas ar ciparu A, tad tas ir iespējams tikai tad, ja $A = 0$. Tātad nākamajā šķirā pārnesumu nav, t.i., summas $T + T$ pēdējais cipars ir M; tāpēc M ir pāra cipars. Saskaitot $T + T$, pārnesumu nākamajā šķirā nav, pretējā gadījumā rodas pretruna ar to, ka summa $E + E + 1$, kas ir nepāra skaitlis, beidzas ar pāra ciparu M. Tāpēc $2T < 10$ un iespējamās T vērtības ir 2, 3 un 4. Pārbaudīsim visus šo gadījumus:

- Ja $T = 2$, tad $M = 4$ un $E = 7$; bet tad arī B ir jābūt 7; rodas pretruna.
- Ja $T = 3$, tad $M = 6$ un $E = 8$; bet tad B ir jābūt 6; rodas pretruna, jo jau ieguvām, ka $M = 6$.
- Ja $T = 4$, tad $M = 8$ un $E = 9$; tādā gadījumā B ir jābūt 5 un iegūstam vienīgo atbildi: $4940 + 5940 = 10880$.

2. Uzdevumā prasīto var izdarīt, piemēram, kā parādīts 1. zīmējumā.



1.zīm.

3. Atbilde: Ziemeļpolā dzīvo 20 rūķīši.

Risinājums: Apzīmēsim ar n rūķīšu skaitu. Tā kā katru dienu katrs rūķītis izteica vienu komplimentu, tad kopumā tika izteikti $7n$ komplimenti. No otras puses, nedēļas laikā katrs rūķītis saņēma divus komplimentus un Ziemassvētku vecītis – simts komplimentu; tātad kopējo nedēļā izteikto komplimentu skaitu var izteikt arī kā $2n + 100$. Iegūstam vienādojumu $7n = 2n + 100$, no kurienes $n = 20$.

4. Atbilde: Buratino ieguva $18\frac{1}{6}$.

Risinājums: Apskatīsim Malvīnes uzdoto risināšanas gaitu. Pēc kārtas veicamās darbības „izdali ar 8" un „reizini ar 6" aizstāsim ar darbību „reizini ar $\frac{6}{8}$ jeb $\frac{3}{4}$". Ja, veicot šo reizināšanu, iegūtu daļskaitli, tad, no tā atņemot 9, arī iegūtu daļskaitli. Bet rezultātam jābūt pirmskaitlim (tātad veselam skaitlim). Tāpēc, reizinot ar $\frac{3}{4}$ Buratino bija jāiegūst vesels skaitlis, kas turklāt arī dalās ar 3 (reizinot ar $\frac{3}{4}$, skaitītājā esošais trijnieks nevar „saīsināties"). Tad arī pēc atņemšanas skaitlis dalīsies ar 3. Vienīgais pirmskaitlis, kas dalās ar 3, ir pats skaitlis 3. Tātad, ja Buratino būtu visu izdarījis pareizi, tad rezultātā viņš iegūtu 3.

Veicot Malvīnes uzdotās darbības apgrieztā kārtībā, pakāpeniski iegūstam ķēpājumu skaitu:

$$(3 + 9) : 6 \cdot 8 - 7 = 9.$$

Bet Buratino tad ieguva skaitli $(9 \cdot 7 - 8) : 6 + 9 = 18\frac{1}{6}$.

5. Uzrakstīsim pirmos Eināra iegūtās virknes locekļus:

1. virknes loceklis: $x_1 = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$;

2. virknes loceklis: $x_2 = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$;

3. virknes loceklis: $x_3 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$;

4. virknes loceklis: $x_4 = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$.

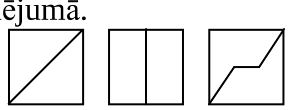
Ievērojam, ka virknes ceturtais loceklis ir vienāds ar virknes pirmo locekli, tātad virknes piektais loceklis būs vienāds ar virknes otro locekli u.t.t. Tātad virknes locekļi atkārtosies ik pēc trīs (t.i., virkne ir periodiska ar periodu 3).

Tātad Eināra iegūtā virkne ir: 2; -1; $\frac{1}{2}$; 2; -1; $\frac{1}{2}$; 2; -1; $\frac{1}{2}$; ... .

Tā kā virknes periods sastāv no 3 skaitļiem, nepieciešams noskaidrot, cik šādu periodu pavisam ietilpst Eināra uzrakstītajā 2012 skaitļus garajā virknē. Tā kā $2012 = 3 \cdot 670 + 2$, periods atkārtojas 670 reizes un divi pēdējie virknes locekļi ir 2 un -1. Tātad pavisam virknē **skaitlis 2 atkārtojas 671 reizi**.

Aprēķināsim summu tiem trīs skaitļiem, kas veido periodu: $2 + (-1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Tā kā šie skaitļi atkārtojas 670 reizes, tad aprēķinām pirmo 2010 skaitļu summu: $\frac{3}{2} \cdot 670 = 1005$. Pieskaitot vēl atlikušos divus virknes locekļus, iegūstam, ka Eināra iegūtās virknes visu locekļu summa ir $1005 + 2 + (-1) = \mathbf{1006}$.

6. Atbilde: Jā, var. Piemēri doti 2. zīmējumā.

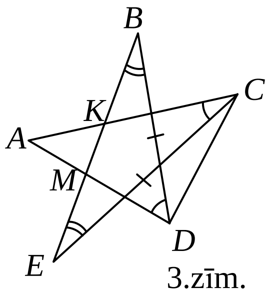


2.zīm.

Piezīme. Pilnam uzdevuma atrisinājumam nepieciešams īsi paskaidrot, kāpēc iegūtie daudzstūri ir vienādi (t.i., norādīt vienādos elementus).

7. Apzīmēsim ar *K* un *M* attiecīgi malu *AC* un *AD* krustpunktus ar malu *BE* (skat. 3. zīm.). No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka trijstūri *CEK* un *DBM* ir vienādi (pazīme *lml*). Tāpēc ***CK* = *DM*** un $\angle CKE = \angle DMB$ kā vienādu trijstūru atbilstošie elementi. Tad arī $\angle AKE = \angle AMB$ kā vienādu leņķu blakusleņķi. Esam ieguvuši, ka trijstūrim *AMK* malas *MK* pieleņķi ir vienādi; tā kā trijstūrī pretī vienādiem leņķiem ir vienādas malas, tad ***AK* = *AM*** un trijstūris *AMK* ir vienādsānu.

Izmantojot izceltās sakarības, iegūstam *AC* = *AK* + *CK* = *AM* + *DM* = *AD*, tātad arī trijstūris *ACD* ir vienādsānu. Tāpēc $\angle ACD = \angle ADC$, k.b.j.



3.zīm.

8. Atbilde: Līga var uzvarēt.

Risinājums: Ievērosim, ka spēle var beigties pēc tiem gājieniem, pēc kuriem kopējais stienīšu skaits dalās ar 3. Tātad pirmo reizi spēle var beigties pēc Jāņa gājiena, bet pēc tam – pēc Līgas gājiena.

Lai uzvarētu, Līgai savā pirmajā gājienā nepieciešams salauzt stienīti tieši uz pusēm. Lai arī kā Jānis pēc tam vienu no iegūtajām pusēm nepārlauztu divās daļās, viņš no iegūtajām daļām nevar salikt trijstūri, jo neizpildās trijstūru nevienādība (divu iegūto stienīšu summa būs tieši vienāda ar trešo stienīti). Līgai savā otrajā gājienā nepieciešams atkārtot Jāņa gājienu, t.i., lielāko stienīti salauzt tādās pašās divās daļās, kādās Jānītis salauza tā paša izmēra stienīti savā iepriekšējā gājienā.

Lai arī kā stienīšus Jānītis salauztu savā nākamajā gājienā, no tiem visiem trijstūrus izveidot viņš nevarēs, jo būs iegūti 5 stienīši. Savukārt, ja Līga pēc tam atkal atkārtos Jānīša gājienu (to viņa noteikti var izdarīt, jo pirms Jānīša gājiena bija divi pāri vienāda garuma stienīšu), pēc viņas gājiena tiks iegūti seši stienīši. Apzīmēsim to garumus ar *a*, *b*, *c*, *a*, *b*, *c*. Pieņemsim, ka $a \geq b \geq c$. Tad Līga var izveidot divus vienādsānu trijstūrus: pirmo ar malām *a*, *a* un *c* un otru – ar malām *b*, *b*, *c*.

9. Tā kā Ellai ir tikai viena kartīte, uz kuras uzrakstīts skaitlis 2012, tad viņai ir tikai viena iespēja – šo kartīti ievadīt skaitļošanas mašīnā un saņemt atpakaļ divas kartītes: 2012 un $\frac{1}{2012}$. Ja mašīnā ievada šīs divas kartītes, tad Ella atpakaļ saņems trīs kartīes: 2012, $\frac{1}{2012}$ un $2011\frac{2011}{2012}$. Ja Ella ievadīs mašīnā kartītes $2011\frac{2011}{2012}$ un $\frac{1}{2012}$, tad bez šīm divām kartītēm Ella iegūs vēl kartīti ar skaitli $2011\frac{2010}{2012}$. Ja katrā nākamajā reizē Ella ievadīs mašīnā iepriekšējā reizē jauniegūto kartīti un kartīti ar skaitli $\frac{1}{2012}$, tad pēc zināma laika Ellas rīcībā nonāks kartīte, uz kuras uzrakstīts skaitlis 2011. Ja tagad Ella ievadīs mašīnā kartītes ar skaitļiem 2012 un 2011, tad meitene savā rīcībā iegūs kartīti ar skaitli 1 (jo $2012-2011=1$). Turpmāk Ellai jāievada kartītes ar skaitļiem 2011 un 1. Tad viņa iegūs kartīti ar skaitli 2010. Šādu procesu turpinot, Ella iegūs kartītes ar skaitļiem 2009, 2008, ..., 102, 101 un visbeidzot 100. Tātad Dzelzs Malkascirtēju Ella būs izglābusi.

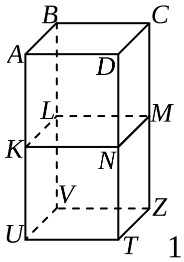
Tagad padomāsim, kā var iegūt kartīti ar skaitli $100\frac{1}{100}$. Ellas rīcībā jau ir kartītes ar skaitļiem 101 un 100. Ievadot mašīnā kartīti ar skaitli 100, var iegūt $\frac{1}{100}$. Ievadot kartītes ar skaitļiem 101 un $\frac{1}{100}$, var iegūt kartīti ar skaitli $100\frac{99}{100}$. Rīkojoties kā iepriekš, var iegūt kartītes ar skaitļiem $100\frac{98}{100}$, $100\frac{97}{100}$, ..., $100\frac{2}{100}$ un visbeidzot $100\frac{1}{100}$.

Piezīme. Iesakām PCK dalībniekiem padomāt, vai ar šādu skaitļošanas mašīnu un kartīti ar skaitli 2012 ir iespējams iegūt skaitli, kurš ir lielāks par 2012? Vai var iegūt jebkuru pozitīvu racionālu skaitli?

10. Dalībnieku iesūtītie veiksmīgākie uzdevumi tiks publicēti mācību līdzeklī, kurā tiks apkopoti visu *A.Liepas NMS* 2012./2013.m.g. organizēto 4. - 9. klasēm paredzēto konkursu un olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi.

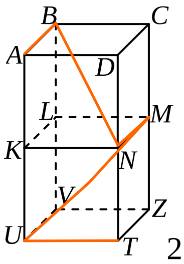
2012./2013. mācību gads
4. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Pēc uzdevuma nosacījumiem skaidrs, ka akvārijs ir paralēlskaldņa formas ar izmēriem $1\times1\times2$ vienības (skat. 1. zīm.). Uzskatīsim, ka zelta zivtiņa peldēja no augšas uz leju.

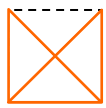


1.zīm.

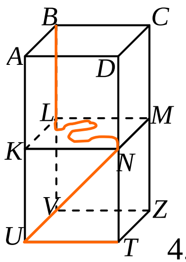
a) Pēc uzdevumā dotā zīmējuma kreisā attēla redzams, ka sākotnēji zivtiņa atradās kaut kur uz šķautnes *AB*, bet no labās puses attēla skaidrs, ka zivtiņa vispirms peldēja no punkta *A* uz *B* pa šķautni *AB*. Tālāk redzams, ka zivtiņa aizpeldēja taisni uz punktu *N*, bet tad peldēja pa nogriezni *NM* un tad uz virsotni *U*. Visbeidzot zivtiņa devās uz virsotni *T* pa šķautni *UT*. Tādējādi zelta zivtiņa peldēja pa maršrutu, kas redzams 2. zīm. To izmantojot, viegli uzzīmēt arī zivtiņas peldējumu, skatoties no augšas (skat. 3. zīm.).



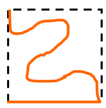
2.zīm.


3.zīm.

b) Pēc uzdevumā dotā attēla redzams, ka zelta zivtiņa sāka ceļu virsotnē *B* un peldēja pa šķautni *BL*. Pēc tam viņa peldēja uz punktu *N*, bet viņas ceļš varēja nebūt taisnes nogrieznis – zivtiņa varēja peldēt pa jebkuru trajektoriju, ja vien *neizpeldēja ārā* no plaknes *KLMN*. No punkta *N* zivtiņa aizpeldēja taisni uz virsotni *U*, bet pēc tam pa šķautni *XT* uz virsotni *T*, kur beidza savu ceļu. Viens no iespējamiem maršrutiem redzams 4. zīmējumā (var atšķirties tikai zivtiņas peldēšanas trajektorija no punkta *L* uz punktu *N*). Uzzīmējot atbilstošo zelta zivtiņas peldējumu, skatoties no augšas, iegūstam 5. zīmējumā redzamo attēlu.

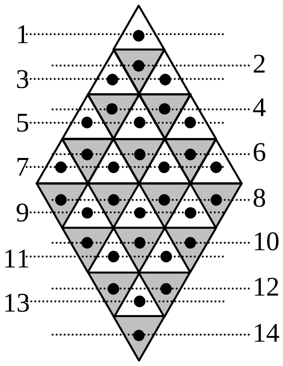


4.zīm.

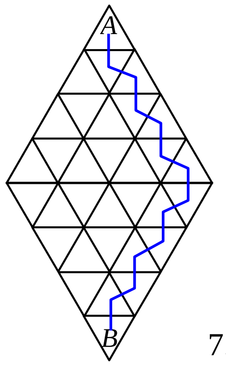

5.zīm.

2. Iekrāsosim trijstūrus, kuru viena virsotne ir uz leju (skat. 6. zīm.). Visus trijstūrus sadalīsim rindās tā, ka vienā rindā visi trijstūri ir pelēki, nākamajā – balti, nākamajā – pelēki u.t.t. Redzam, ka 1.rindā ir tikai augšējais trijstūris *A*; 2. rindā ir viens pelēks trijstūris, kas atrodas blakus trijstūrim *A*; 3. rindā ir divi balti trijstūri; ...; 14.rindā ir viens pelēks trijstūris *B*.

a) Ievērosim, ka ar katru savu gājienu skudra nokļūst rindā, kuras kārtas numurs ir par 1 lielāks nekā tai rindai, kurā tā bija iepriekš. Tātad, lai nokļūtu no 1. rindas līdz 14. rindai, skudrai jāiet cauri visām 14 rindām, tātad jāapmeklē vismaz 14 trijstūri. Turklāt 7. zīmējumā redzams, ka skudrai pietiek apmeklēt **14 trijstūrus**, lai no trijstūra *A* nokļūtu trijstūrī *B*.



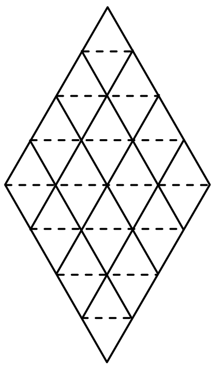
6.zīm.

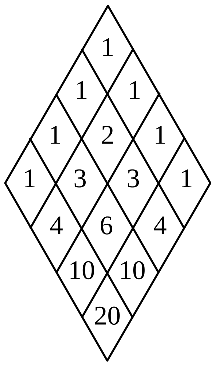


7.zīm.

b) Ievērosim, ka, savā maršrutā izejot caur 14 trijstūriem, skudrai katrā gājienā nepieciešams palielināt rindas kārtas numuru. Tomēr ievērosim, ka no trijstūriem, kas atrodas nepāra rindās, skudrai ir tikai viens iespējamais ceļš uz nākamo rindu – tieši uz leju. Tātad varam apvienot trijstūrus, kā parādīts 8. zīmējumā. To izmantojot, varam izskaitīt, cik dažādos veidos skudra var apmeklēt katru iegūto lauciņu.

Skaidrs, ka augšējo lauciņu skudra var apmeklēt vienā veidā. Lai apmeklētu jebkuru no zemāk esošajiem lauciņiem, skudrai pirms tam jābūt kādā no virs tā esošajiem lauciņiem. Tātad uzzināt, cik veidos skudra apmeklē kādu no lauciņiem, var, noskaidrojot, cik veidos var nokļūt lauciņos, kas atrodas tieši virs šī pa labi un pa kreisi, un iegūtos skaitļus saskaitot kopā. Darbojoties saskaņā ar šo spriedumu, iegūstam 9. zīmējumu; tātad skudra no trijstūra *A* uz trijstūri *B* pa īsāko ceļu var nokļūt **20 veidos**.


8.zīm.



9.zīm.

3. Atbilde: Lielākais trīsciparu skaitlis, kas apmierina visas uzdevuma prasības, ir **311**.

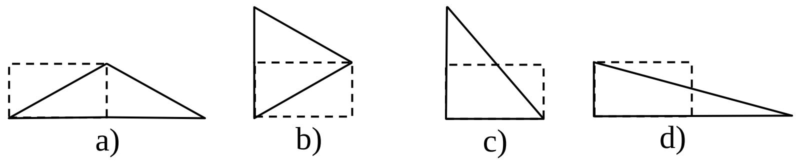
Risinājums: Tā kā visu meklētā skaitļa ciparu reizinājums ir pirmskaitlis, tad skaitļa cipari var būt 1; 1 un *p* (ne obligāti tieši šādā secībā), kur *p* – viencipara pirmskaitlis. Viencipara pirmskaitļi ir 2; 3; 5 un 7. Apskatīsim katru no tiem:

- skaidrs, ka $p = 7$ neder, jo tad meklētā skaitļa ciparu summa $1+1+7=9$, tātad tas dalās ar 9 un nav pirmskaitlis;
- ja $p = 5$, tad vienīgais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir 151 (skaitlis 511 dalās ar 7, bet 115 dalās ar 5; tātad tie nav pirmskaitļi);
- ja $p = 3$, var izveidot trīs uzdevuma nosacījumiem atbilstošus skaitļus: 113, 131 un 311; no šiem lielākais ir 311;
- ja $p = 2$, tad nav neviena skaitļa, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem (skaitlis 121 dalās ar 11, bet skaitlis 112 dalās ar 2; savukārt skaitlī 211, samainot vietām pirmo ar pēdējo ciparu, iegūst 112, kas nav pirmskaitlis).

Viegli pārliecināties, ka no visiem šiem skaitļiem vislielākais ir 311.

4. Jā, tā varēja gadīties; 10. zīmējumā attēlots, kā vienu taisnstūri četros veidos sagriezt divās daļās tā, lai visi iegūtie trijstūri būtu dažādi.

Piezīme. Pilnīgam uzdevuma atrisinājumam nepieciešams īsi paskaidrot, kā taisnstūris sagriezts c) un d) gadījumā.

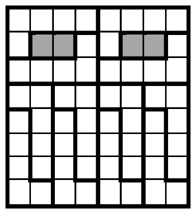


10.zīm.

5. Atbilde: 12 figūras.

Risinājums: Piemēru, kā kvadrātā ievietot 12 figūras, skatīt 11. zīm.

Lai izvietotu 13 figūriņas, būtu nepieciešamas $13 \cdot 5 = 65$ rūtiņas, bet uzdevumā dotajā kvadrātā ir tikai 64 rūtiņas. Tātad 12 ir maksimālais izvietojamais figūriņu skaits.



11.zīm.

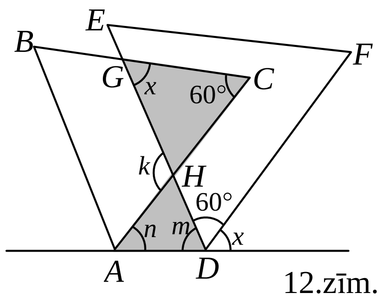
6. Vienādmalu trijstūra katrs leņķis ir 60° liels; tātad $\angle C = 60°$ un $\angle EDF = 60°$ (skat. 12. zīm.). Apzīmēsim $\angle GHA = k$, $\angle HAD = n$ un $\angle HDA = m$.

Tā kā izstiepts leņķis ir 180° liels, tad $m + 60° + x = 180°$ jeb

$$m = 120° - x \qquad (1).$$

Tā kā $\angle GHA$ ir trijstūra CGH ārējais leņķis, tad $k = x + 60°$. No otras puses, $\angle GHA$ ir arī trijstūra AHD ārējais leņķis, tātad $k = n + m$. Iegūstam, ka $n + m = x + 60°$. Izmantojam vienādību (1): $n = x + 60° - (120° - x) = 2x - 60°$.

Tā kā n ir leņķa lielums, tad tas ir pozitīvs skaitlis. Tātad $2x - 60° > 0$, no kurienes $x > 30°$, k.b.j.



12.zīm.

7. No dotās vienādības izriet, ka a, b, $c \neq 0$ un $ab + bc + ca = 0$. Tad $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca =$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2\left(\underbrace{ab + bc + ca}_{=0}\right) = a^2 + b^2 + c^2 \text{, k.b.j.}$$

8. Atbildes: a) $12\dfrac{3576}{894} = 16$;

b) $6\dfrac{13258}{947} = 20$.

9. Atbilde: Noteikti tika izspēlēta vismaz 1 papildus spēle.

Risinājums. Pieņemsim, ka netika izspēlēta neviena papildus spēle. Tādā gadījumā punktu starpība starp 1. un 2. vietu, 3. un 4. vietu, 5. un 6. vietu, 7. un 8. vietu ir vismaz 2 punkti, tātad starpība starp 1. un 8. vietu ir vismaz 8 punkti. Bet katra komanda spēlēja tieši 7 spēles, tātad 1. vietas ieguvēji varēja nopelnīt ne vairāk kā 7 punktus. Esam ieguvuši pretrunu, tātad vismaz viena papildus spēle tika izspēlēta.

To, ka var pietikt ar vienu papildus spēli, var redzēt tabulā:

Komanda	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**Kopā punkti**
1.		1	1	1	1	1	1	1	**7**
2.	0		0	1	1	1	1	1	**5**
3.	0	1		0	0	1	1	1	**4**
4.	0	0	1		1	0	1	1	**4**
5.	0	0	1	0		1	1	1	**4**
6.	0	0	0	1	0		0	1	**2**
7.	0	0	0	0	0	1		1	**2**
8.	0	0	0	0	0	0	0		**0**

10. Atbilde: Jā, Toms noteikti var noķert Džeriju.

Risinājums. Sanumurēsim alas no kreisās uz labo pusi ar skaitļiem no 1 līdz n. Definēsim „attālumu” starp alām i un j (i, j – naturāli skaitļi) ar $i - j$ (šis „attālums” var būt negatīvs skaitlis).

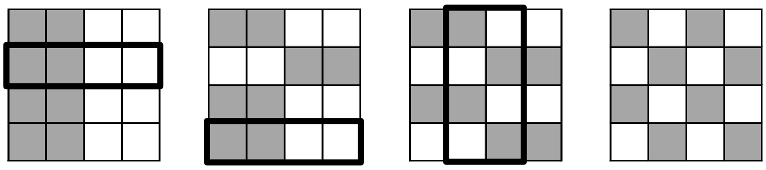
No sākuma Tomam jāpārbauda visas alas pēc kārtas no 1 līdz n. Ja brīdī, kad Toms pārbauda pirmo alu, Džerijs atrodas alā ar nepāra numuru, tad Toms, pēc kārtas pārbaudot alas no 1 līdz n, atradīs Džeriju.

Patiešām, ja brīdī, kad Toms pārbauda pirmo alu, Džerijs atrodas alā ar nepāra numuru, tad „attālums” starp viņiem ir pozitīvs pāra skaitlis. Ja tad, kad Toms pārbauda pēdējo alu, viņš joprojām Džeriju nav noķēris, tas nozīmē, ka „attālums” starp viņiem ir negatīvs skaitlis; turklāt tam joprojām jābūt pāra skaitlim, jo katrā Toma gājienā „attālums” starp viņu un Džeriju vai nu nemainās (ja viņi pārvietojas vienā un tajā pašā virzienā), vai arī mainās par 2 (ja viņi pārvietojas dažādos virzienos). Tātad, ja sākumā „attālums” bija pozitīvs pāra skaitlis, bet beigās – negatīvs pāra skaitlis, tad kādā brīdī attālums ir bijis 0, kas nozīmē, ka Toms noķēris Džeriju.

Atliek apskatīt gadījumu, kad brīdī, kad Toms pārbauda pirmo alu, Džerijs atrodas alā ar nepāra numuru. Tā kā „attālums” starp Tomu un Džeriju katrā gājienā mainās vai nu par 0, vai 2, tad brīdī, kad Toms pārbaudīs n-to alu, Džerijs atradīsies alā, kuras numuram ir cita paritāte, salīdzinot ar skaitli n. Pēc tam Džerijs pārvietojas uz alu, kurai ir tāda pati paritāte, kāda ir skaitlim n. Tālāk, secīgi pārbaudot visas alas no n līdz 1, Toms noteikti noķers Džeriju, jo „attālums” starp viņiem tagad ir pāra skaitlis.

2012./2013. mācību gads
5. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Viens no veidiem, kā prasīto var izdarīt, attēlots 1. zīm.; tajā katrā gājienā iezīmēts taisnstūris, kurā esošo rūtiņu krāsojums mainīts uz pretējo.



1.zīm.

2. Apzīmēsim attālumu starp Nif-Nifa un Naf-Nafa mājām ar *IA*; attālumu starp Nif-Nifa un Nuf-Nufa mājām ar *IU*; attālumu starp Naf-Nafa un Nuf-Nufa mājām ar *AU*.
Attēlojot sivēntiņu sacīto ar nevienādībām, iegūstam:

$IA > 2IU$;
$AU > 2IA$;
$AU > 2IU$.

Izmantojot pirmās divas nevienādības, pakāpeniski iegūstam:

$AU > 2IA = IA + IA > IA + 2IU > IA + IU$.

Bet, tā kā *IA*, *IU* un *AU* ir trijstūra malas, un iegūtā nevienādība $AU > IA + IU$ ir pretrunā ar trijstūra nevienādību, tad nepatiesa ir vai nu pirmā, vai otrā nevienādība (tātad melo vai nu Nif-Nifs, vai Naf-Nafs).
Ja saskaitām otro un trešo nevienādību, tad iegūstam $AU + AU > 2IA + 2IU$, tātad $AU > IA + IU$, bet tas atkal ir pretrunā ar trijstūra nevienādību. Tātad nepatiesa ir vai nu otrā, vai arī trešā nevienādība (tātad melo vai nu Naf-Nafs, vai Nuf-Nufs).
Tā kā zināms, ka vismaz divi sivēntiņi saka taisnību, tad melo Naf-Nafs.

3. Atbilde: 20.
Risinājums. Saskaitot skaitļa *a* atbilstošās daļas, iegūstam:

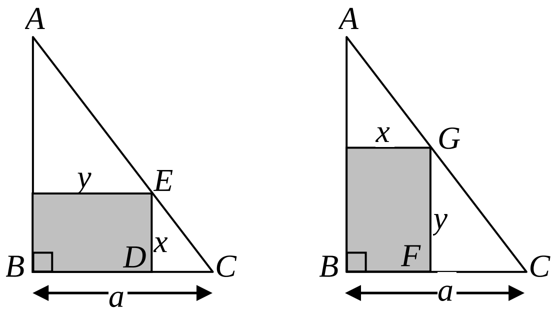
$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot a=\left(\frac{10}{60}+\frac{12}{60}+\frac{15}{60}+\frac{20}{60}+\frac{30}{60}\right)\cdot a=\frac{87a}{60}=\frac{29a}{20}.$$

Lai daļas $\frac{29a}{20}$ vērtība būtu vesels skaitlis, tad skaitlim *a* jādalās ar 20. Mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 20, ir pats skaitlis 20.

4. Atbilde: astoņdesmit viens.
Risinājums: Patriks saka visus tos skaitļus, kuru pierakstā nav cipari 3 un 4. Starp pirmajiem simts skaitļiem tādu ir $(10-2)^2 = 64$ (gan desmitu šķirai, gan vienu šķirai iespējamie 8 cipari), t.i., tad, kad Patriks aizskaitījа līdz simts, patiesībā viņš bija saskaitījies 64 elektrības stabus.
Krišjānis izlaiž skaitļus, kuru pierakstā ir cipars 6. Tāpēc, aizskaitījis līdz „59”, viņš ir izlaidis 6 skaitļus; tātad viņam atliek vēl saskaitīt $64-(59-6)=11$ stabus. Skaitot tos, Krišjānis izlaiž visus skaitļus no 60 līdz 69, kā arī skaitli 76. Tāpēc tad, kad Patriks nosauc skaitli „simts” (jeb patiesībā ir saskaitījis 64 stabus), Krišjānis nosauc skaitli $69+11+1=\mathbf{81}$.

5. Apzīmēsim taisnstūra malu garumus ar *x* un *y* (skat. 2 zīm.).

Tā kā trijstūri *DCE* un *FCG* ir līdzīgi ($\ell\ell$), tad to malas ir proporcionālas, t.i., $\frac{x}{a-y}=\frac{y}{a-x}$ jeb $x(a-x)=y(a-y)$. Atverot iekavas, iegūstam $ax-x^2=ay-y^2$. Pārveidojam šo vienādību un sadalām reizinātājos: $ax-ay=x^2-y^2 \;\Rightarrow\; a(x-y)=(x-y)(x+y)$.
Tā kā taisnstūris ievilkts trijstūrī divos dažādos veidos, tad secinām, ka $x \neq y$, tātad $x-y \neq 0$. Tāpēc iepriekš iegūtās vienādības abas puses izdalām ar $(x-y)$, tāpēc $a=x+y$. No šejienes iegūstam, ka taisnstūra perimetrs ir $2x+2y=2(x+y)=2a$.



2.zīm.

6. Atbilde: a) jā, var; **b)** nē, nevar.
Risinājums: a) Dotos skaitļus sadalām trīs grupās: (2; 4; 5), (1; 3; 7) un (6; 8; 9). Tajās esošo skaitļu summas ir attiecīgi 11, 11 un 23, kas visi ir pirmskaitļi.
b) No dotajiem skaitļiem mazākā iespējamā triju skaitļu summa ir 1 + 2 + 3 = 6, bet lielākā ir 7 + 8 + 9 = 24. Ir seši pirmskaitļi, kas atrodas starp šiem skaitļiem: 7, 11, 13, 17, 19 un 23. Visu deviņu skaitļu summa ir 45, tātad visu šajās trīs grupās esošo skaitļu summai arī jābūt 45. Tas nozīmē, ka no šiem sešiem pirmskaitļiem jāizvēlas 3 dažādi tā, ka to summa ir 45; bet pārbaudot var pārliecināties, ka to izdarīt nevar. Tātad prasītais nav iespējams.

7. Atbilde: Summas pēdējais cipars ir 9.
Risinājums: Izmantojot pakāpju īpašības, pārveidojam doto izteiksmi:

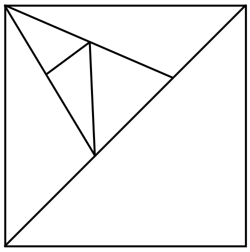
$$\underbrace{2013^{2013}+\ldots+2013^{2013}}_{2013\ reizes}=$$
$$=2013\cdot 2013^{2013}=$$
$$=2013^{2014}.$$

Var pārbaudīt, ka, kāpinot naturālā pakāpē skaitli 3, tā pēdējo ciparu veidotā virkne ir 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; ... . Redzam, ka tā ir periodiska ar periodu 4. Tas nozīmē, ka atliek noskaidrot, kāds ir atlikums, dalot kāpinātāju ar skaitli 4, lai uzzinātu pakāpes pēdējo ciparu:

- ja atlikums ir 1, tad pēdējais cipars ir 3;
- ja atlikums ir 2, tad pēdējais cipars ir 9;
- ja atlikums ir 3, tad pēdējais cipars ir 7;
- ja atlikums ir 0 (kāpinātājs dalās ar 4), tad pēdējais cipars ir 1.

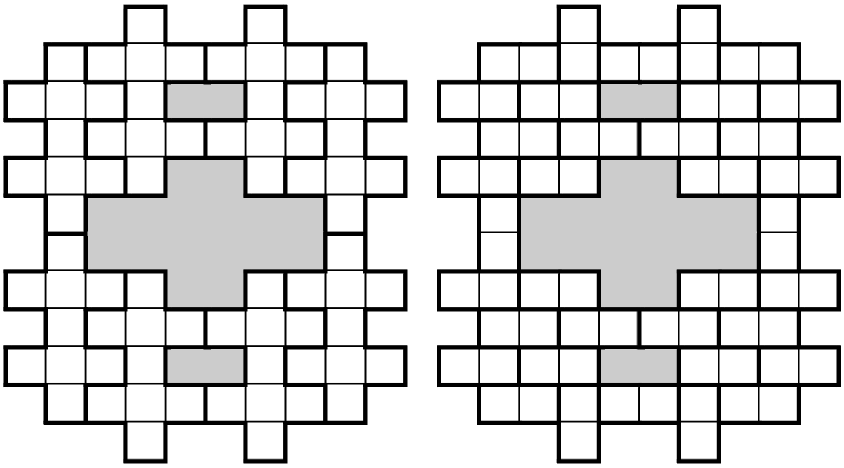
Mūsu gadījumā kāpinātājs ir 2014, kuru izdalot ar skaitli 4, iegūst atlikumā 2; tātad uzdevumā dotās izteiksmes pēdējais cipars ir 9.

8. Uzdevumam ir daudzi atrisinājumi; vienu no tiem skat., piem., 3. zīm.

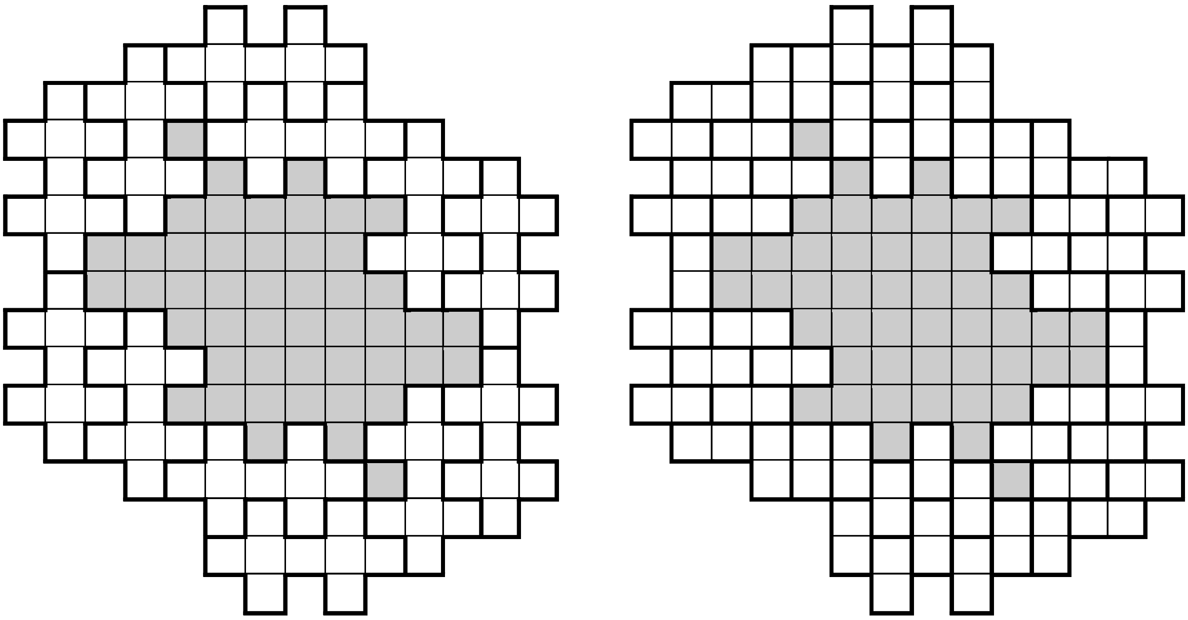


3.zīm.

9. Uzdevumam ir vairāki atrisinājumi. Lasītājam piedāvājam divus piemērus (skat. 4. un 5. zīm.; abus piemērus atsūtījuši PCK dalībnieki).



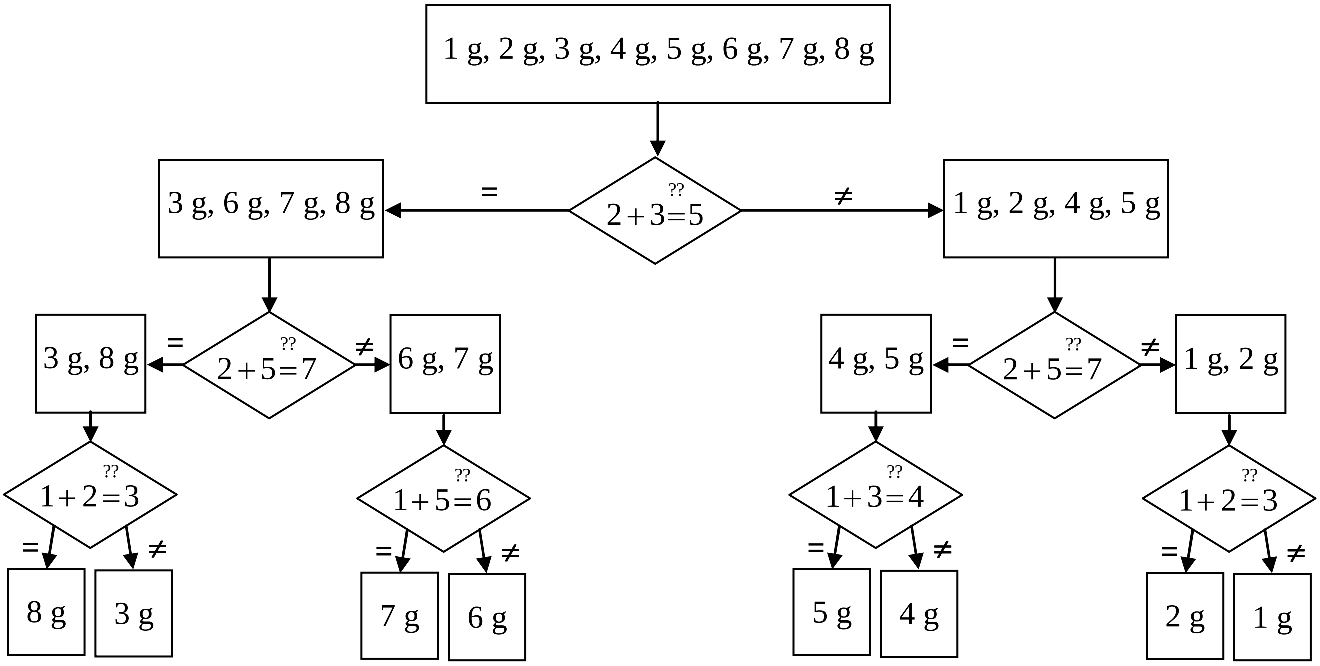
4.zīm.



5.zīm.

10. Uzdevuma nosacījumos Alises jautājumus Tomam var aizstāt ar svēršanu uz sviras svariem – nepieciešams ar trim svēršanām noteikt, kurš no atsvariem ir pazudis.

Viens no variantiem, kā atrisināt uzdevumu, parādīts 6. zīm. Taisnstūros norādīti, kuri atsvari katrā solī vēl var būt noslēpti. Rombos tiek parādīts, kāda svēršana tiek veikta attiecīgajā solī; turklāt svēršanā tiek izmantoti atlikušo atsvaru kārtas numuri.



6.zīm.

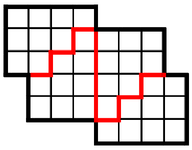
Ievērosim, ka gadījumā, ja noslēpts ir atsvars, kura masa ir *n* grami, tad atsvaru ar kārtas numuriem, kas ir mazāki nekā *n*, masa gramos sakrīt ar to kārtas numuru; savukārt atsvaru ar kārtas numuriem *n* vai lielākiem nekā *n* sver par 1 g vairāk nekā to kārtas numurs.

To zinot, nav grūti pārbaudīt piedāvāto uzdevuma atrisinājuma shēmu. Šobrīd pārbaudīsim tikai pirmo svēršanu. Iespējami 4 gadījumi:

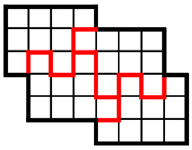
- pazudis atsvars, kurš ir smagāks par 5 gramiem; tādā gadījumā svari nostāsies līdzsvarā: $2+3=5$;
- pazudis atsvars, kura masa ir 4 g vai 5 g; tādā gadījumā svari līdzsvarā nenostāsies: $2+3\neq(5+1)$;
- pazudis atsvars, kura masa ir 3 g; tādā gadījumā atkal būs līdzsvars: $2+(3+1)=(5+1)$;
- pazudis atsvars, kura masa ir 1 g vai 2 g; šajā gadījumā līdzsvars nebūs: $(2+1)+(3+1)\neq(5+1)$.

2012./2013. mācību gads
6. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Divus uzdevuma nosacījumiem atbilstošus piemērus skat. 1. zīm. un 2. zīm.



1.zīm.



2.zīm.

2. Noteikti jānosvītro skaitļi, kas dalās ar 5, jo pretējā gadījumā reizinājuma pēdējais cipars būs 5 vai 0; tātad jānosvītro reizinātāji 5 un 10.

Apskatīsim atlikušo skaitļu reizinājumu: $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$. Reizinājumi $2\cdot3$, $4\cdot9$ un $7\cdot8$ visi beidzas ar ciparu 6, tāpēc arī to visu reizinājums beidzas ar ciparu 6. Tātad nepieciešams izsvītrot vismaz vēl vienu reizinātāju.

Tiešām, pietiek izsvītrot trīs reizinātājus, piemēram, skaitļus 5, 10 un 3, iegūstot reizinājumu $1\cdot2\cdot(4\cdot9)\cdot(7\cdot8)\cdot6$, kas beidzas ar tādu pašu skaitli, ar kādu beidzas reizinājums $2\cdot6\cdot6\cdot6$, t.i., ar ciparu 2.

Piezīme. Var izsvītrot arī ciparus 5, 10 un 8; arī šajā gadījumā reizinājuma pēdējais cipars ir 2.

3. Atbilde: Ierašanās pie Ēzelīša I-ā bija paredzēta plkst. 12:40.

Piedāvājam divus risināšanas veidus.

1. risinājums. Tā kā Sivēntiņš skrēja divas reizes ātrāk nekā gāja Vinnijs Pūks, tad tajā brīdī, kad Vinnijs Pūks ieradās pie Ēzelīša I-ā, Sivēntiņš atkal bija pusceļā līdz Ēzelīša mājai. Tā kā viņš nokavēja 10 minūtes, tad Vinnijs Pūks pusceļu nogāja 20 minūtēs, bet visu ceļu – 40 minūtēs.

2. risinājums. Apzīmēsim ar t laiku minūtēs, cik ilgi Vinnijs Pūks gāja no Sivēntiņa mājas līdz Ēzelīša I-ā mājai. Sivēntiņš pusceļu nogāja kopā ar Vinniju Pūku; tātad tas bija $\frac{t}{2}$ minūtes. Pēc tam viņš noskrēja attālumu, kas vienāds ar $\frac{3}{2}$ attāluma no viņa mājas līdz Ēzelīša mājai. Tā kā viņš skrēja divas reizes ātrāk, tad viņam šī attāluma veikšanai bija nepieciešams divas reizes mazāk laika nekā Vinnijam, tātad $\frac{3}{4}\cdot t$ minūtes. Tātad kopā Sivēntiņa pavadītais laiks ceļā pie Ēzelīša ir $\frac{t}{2}+\frac{3}{4}\cdot t=\frac{5}{4}\cdot t$. Sivēntiņš nokavēja 10 minūtes, tātad $\frac{5}{4}\cdot t-t=10$, no kurienes t = 40 minūtes.

4. a) Četras monētas atbilstošu uzdevuma noteikumiem var apgriezt tā, kā redzams 3. zīmējumā.

3.zīm.

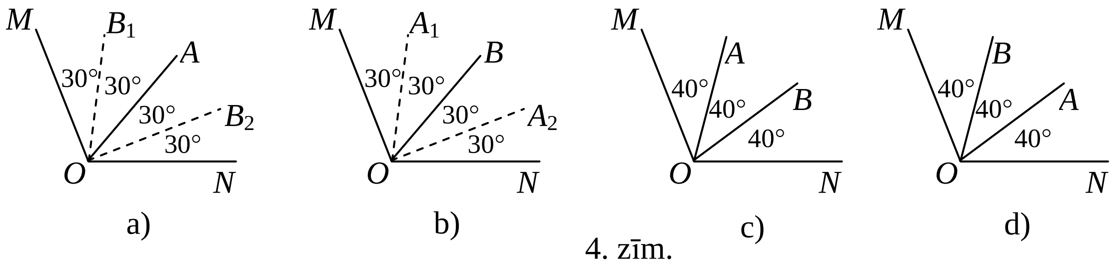
b) Ja sākumā dotas 5 monētas, tad tās šādi apgriezt nav iespējams. Pieņemsim pretējo – ka ir izdevies no sākumā dotām piecām monētām ar ģerboni uz augšu iegūt visas piecas ar ciparu uz augšu. Tad katrai monētai jābūt apgrieztai nepāra skaitu reižu (jo, apgriežot vienu monētu pāra skaitu reižu, iegūstam tās sākuma stāvokli).

Pieņemsim, ka pirmā monēta apgriezta n_1 reizes, otrā monēta apgriezta n_1 reizes, trešā monēta apgriezta n_3 reizes, ceturtā monēta apgriezta n_4 reizes, piektā monēta apgriezta n_5 reizes (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 – nepāra skaitļi).

Tā kā katru reizi apgriež 4 monētas, tad kopējam monētu apgriešanu skaitam jādalās ar 4: $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 4k$, bet tas nav iespējams, jo piecu nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis un ar 4 dalīties nevar.

Piezīme. Līdzīgi varam pierādīt, ka tad, ja dotas n monētas, kur n – nepāra skaitlis, un ar vienu gājienu atļauts apgriezt $n - 1$ monētas, tad visas monētas vienlaicīgi otrādi apgrieztas nevar būt.

5. Atbilde: Leņķa *MOA* lielums var būt 30°, 40°, 60°, 80° vai 90°. Visi iespējamie staru izkārtojumi redzami 4. zīm.



4. zīm.

Risinājums. Apskatīsim visus iespējamos staru izkārtojumus:

a) Ja stars *OA* ir dotā leņķa *MON* bisektrise (skat. 4.a) zīm.), tad $\angle MOA = 60°$ (neatkarīgi no tā, vai stars *OB* ir leņķa *MOA* vai leņķa *NOA* bisektrise).

b) Ja stars *OB* ir dotā leņķa *MON* bisektrise (skat. 4.b) zīm.), tad $\angle MOA = 30°$ (ja stars *OA* ir leņķa *MOB* bisektrise) vai $\angle MOA = 90°$ (ja stars *OA* ir leņķa *NOB* bisektrise).

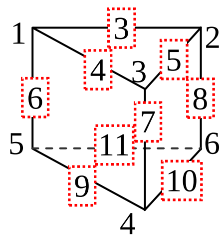
c) Ja stars *OA* ir leņķa *MOB* bisektrise, bet stars *OB* ir leņķa *NOA* bisektrise (skat. 4.c) zīm.), tad dotais leņķis tiek sadalīts trīs vienādās daļās un $\angle MOA = 40°$.

d) Ja stars *OB* ir leņķa *MOA* bisektrise, bet stars *OA* ir leņķa *NOB* bisektrise (skat. 4.d) zīm.), tad dotais leņķis atkal tiek sadalīts trīs vienādās daļās, bet šajā gadījumā $\angle MOA = 80°$.

6. Atbilde: šādi skaitļi neeksistē.

Risinājums. Ja n ir pāra skaitlis, tad vienādības kreisā puse ir nepāra skaitlis, bet labā puse – pāra skaitlis. Ja n ir nepāra skaitlis, tad vienādības kreisā puse ir pāra skaitlis, bet labā puse – nepāra skaitlis. Tātad nav tādu veselu skaitļu, ar kuriem būtu patiesa dotā vienādība.

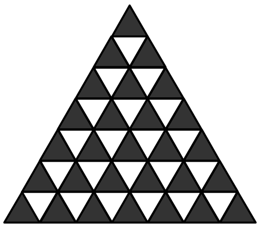
7. Atbilde: Jā, to var izdarīt; vienu piemēru skat. 5. zīmējumā (uz šķautnēm uzrakstītās summas izceltas ar sarkanu rāmīti).



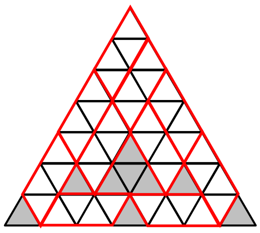
5.zīm.

8. Atbilde: 10 paralelogrami.

Risinājums. Izkrāsosim mazos trijstūrīšus baltā un melnā krāsā, kā parādīts 6. zīm. Var ievērot, ka katrs paralelograms satur divus baltos trijstūrīšus; tā kā pavisam lielajā trijstūrī ir 21 balts trijstūrītis, tad paralelogramu skaits nepārsniedz 10. Tas, ka 10 paralelogramus izgriezt ir iespējams, redzams 7. zīm.



6. zīm.



7.zīm.

9. Atbilde: 3 vai 5.

Risinājums. Apzīmēsim ar x kopējo salas iedzīvotāju skaitu. Katrs no viņiem sniedza $x-1$ atbildi, tāpēc kopējais atbilžu skaits ir $x(x-1)=26+30$, tātad $x=8$.

Ar y apzīmēsim papadumi cilts rūķu skaitu, tad čapati rūķu skaits ir $8-y$. Katrs no papadumi cilts rūķiem atbildēja „papadumi" $y-1$ reizi, bet katrs no čapati cilts rūķiem atbildi „papadumi" sniedza $7-y$ reizes. Iegūstam vienādojumu $y(y-1)+(8-y)(7-y)=26$. Atverot iekavas un vienkāršojot vienādību, iegūstam kvadrātvienādojumu $y^2-8y+15=0$, kuram ir divas saknes: $y=3$ un $y=5$. Pārbaudot secinām, ka tās abas apmierina uzdevuma nosacījumus (abos gadījumos 30 reizes iegūst atbildi „čapati").

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī veicot pilno pārlasi. Lai pārlasi vienkāršotu, var ievērot, ka skaitlim 30 jādalās gan ar divkāršotu čapati cilts, gan divkāršotu papadumi cilts rūķu skaitu. Tiešām, ja ir y papadumi cilts rūķu un z čapati cilts rūķu, tad $yz+zy=30$ jeb $2zy=30$.

10. Lai izdarītu prasīto, pietiek pārbaudīt, cik ir kopā monētu lādēs, kuras atrodas pāra pozīcijās, t.i., cik ir kopā monētu otrajā, ceturtajā, sestajā, astotajā un desmitajā lādē.

Pārliecināsimies, ka ar šo pārbaudi patiešām pietiek, lai noskaidrotu, no kuras lādes paņemtas monētas. Apskatīsim atsevišķi divus gadījumus – monētas paņemtas no lādes, kuras numurs ir pāra skaitlis, vai arī no lādes, kuras numurs ir nepāra skaitlis.

a) Pieņemsim, ka lāde, no kuras izņemtas monētas, atrodas pāra vietā; apzīmēsim lādes atrašanās vietu ar naturālu skaitli n, kur $n \le 10$ un ir pāra skaitlis. Lai pārliktu tieši pa vienai monētai katrā no lādēm, kas atrodas pa labi no izvēlētās lādes, nepieciešams no n-tās lādes izņemt $(11-n)$ monētas; savukārt visās lādēs, kas no n-tās lādes atrodas pa labi, pēc monētu pārlikšanas atrodas par vienu monētu vairāk nekā sākumā.

Monētu kopējo daudzumu 2., 4., 6., 8. un 10. lādēs var uzrakstīt kā sākotnējo monētu daudzumu summu katrā no lādēm, no kuras atņemts *izņemto* monētu skaits, bet pieskaitīts *papildināto* pāra lāžu skaits. Var pamanīt, ka, ja izņem monētas no n-tās lādes un n ir pāra skaitlis, tad pārējās lādēs, kuru numuri ir pāra skaitļi, monētu skaits palielinājies kopā par $\left(5-\frac{1}{2}n\right)$ monētām.

Tātad, veicot pārbaudi, tiks iegūts skaitlis, kuru var uzrakstīt kā izteiksmi $5\cdot 100-(11-n)+\left(5-\frac{1}{2}n\right)$, kuru vienkāršojot iegūstam $494+0{,}5n$. Tā kā $n \le 10$, tad arī $494+0{,}5n \le 494+0{,}5\cdot 10=499$, tātad iegūtā summa būs mazāka nekā 500.

b) Pieņemsim, ka lāde, no kuras izņemtas monētas, atrodas nepāra vietā; apzīmēsim lādes atrašanās vietu ar naturālu skaitli n, kur $n \le 11$ un ir nepāra skaitlis. Tāpat kā iepriekšējā gadījumā, lai pārliktu tieši pa vienai monētai katrā no lādēm, kas atrodas pa labi no izvēlētās lādes, atkal nepieciešams no n-tās lādes izņemt $(11-n)$ monētas; savukārt visās lādēs, kas no n-tās lādes atrodas pa labi, pēc monētu pārlikšanas atrodas par vienu monētu vairāk nekā sākumā.

Skaidrs, ka šoreiz, noskaidrojot kopējo monētu daudzumu 2., 4., 6., 8. un 10. lādēs, šajā summā neietilps monētu skaits lādē, no kuras monētas tika paņemtas. Tātad pārbaudē iegūtais skaitlis var tikt izteikts kā sākotnējo monētu daudzumu summa katrā no lādēm, pie kura pieskaitīts *papildināto* pāra lāžu skaits. Var ievērot, ka, ja izņem monētas no n-tās lādes un n ir nepāra skaitlis, tad pārējās lādēs, kuru numuri ir pāra skaitļi, monētu skaits palielinājies kopā par $\left(5-\frac{n-1}{2}\right)$ monētām.

Tātad, veicot pārbaudi, tiks iegūts skaitlis, kuru var uzrakstīt kā izteiksmi $5\cdot 100+\left(5-\frac{n-1}{2}\right)$, kuru vienkāršojot iegūstam $505{,}5-0{,}5n$. Tā kā n ≤ 11, tad arī $505{,}5-0{,}5n \geq 505{,}5-0{,}5\cdot 11=500$, tātad iegūtā summa būs vismaz 500.

Lai noskaidrotu, no kuras lādes monētas tika paņemtas, jāveic iepriekš aprakstītā pārbaude un, ja iegūtais skaitlis ir mazāks nekā 500, tad skaidrs, ka monētas izņemtas no pāra lādes un n var aprēķināt no a) gadījumā iegūtās sakarības, savukārt, ja iegūtā summa ir 500 vai lielāka, tad monētas izņemtas no nepāra lādes un, lai aprēķinātu n vērtību, jāizmanto b) gadījumā iegūtā sakarība.