"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

1. nodarbības uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Dots kvadrāts ar izmēriem 3×3 rūtiņas. Katrā tā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis. Kvadrātu sauc par maģisku, ja katrā rindā, katrā kolonnā un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas ir vienādas.

a) Vai eksistē tāds maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9?

b) Vai eksistē tāds maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti naturālie skaitļi 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

Atrisinājums.

a) Jā, eksistē, piemēram, skat. 1. att.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

1. att.

b) Nē, neeksistē. Ja šāds kvadrāts eksistētu, tad tā rindu summām būtu jābūt vienādām. Visu trīs rindu summa ir vienāda ar visu rūtiņās ierakstīto skaitļu summu, tas ir,

$$1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 53.$$

Tā kā 53 nedalās ar 3, tad ir iegūta pretruna un šāds maģiskais kvadrāts neeksistē.

2. Dots, ka n ir naturāls skaitlis. Pierādīt vai atspēkot dotos apgalvojumus!

a) Ja n^2 ir nepāra skaitlis, tad n ir nepāra.

b) Ja $n^3 + 5$ ir nepāra skaitlis, tad n ir pāra.

c) Skaitlis $n^2 - n + 41$ vienmēr ir pirmskaitlis.

d) Skaitlis $4^n - 1$ vienmēr dalās ar 3.

Atrisinājums.

a) Mums ir dots, ka n^2 ir nepāra skaitlis. Jāpamato, ka n arī ir nepāra skaitlis. Pieņemsim pretējo, ka n ir pāra skaitlis. Tas nozīmē, ka n var uzrakstīt formā $n = 2k$, kur k ir naturāls skaitlis. Tad $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, tas ir, esam ieguvuši, ka n^2 arī ir pāra skaitlis, kas ir pretrunā ar doto. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka n ir nepāra skaitlis.

b) Dots, ka $n^3 + 5$ ir nepāra skaitlis, un ir jāpamato, ka n ir pāra skaitlis. Pieņemsim pretējo, ka n ir nepāra skaitlis. Tas nozīmē, ka n var uzrakstīt formā $n = 2k - 1$, kur k ir naturāls skaitlis. Tad iegūstam

$$\begin{aligned} &n^3 + 5 = (2k-1)^3 + 5 = (2k-1)(2k-1)(2k-1) + 5 = \\ &= 8k^3 - 12k^2 + 6k + 4 = \\ &= 2 \cdot (4k^3 - 6k^2 + 3k + 2). \end{aligned}$$

Iegūts pāra skaitlis, kas ir pretrunā ar doto, ka $n^3 + 5$ ir nepāra. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka n ir pāra skaitlis.

Piezīme. Binoma kubu $(2k-1)^3$ var ātrāk iegūt, izmantojot formulu $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

c) Dotais apgalvojums ir aplams, jo, ņemot $n = 41$, iegūstam, ka $41^2 - 41 + 41 = 41^2$, kas dalās ar 41, tātad nav pirmskaitlis.

d) Tā kā $4 = 2^2$, tad $4^n - 1 = (2^2)^n - 1 = (2^n)^2 - 1$. Izmantojot kvadrātu starpības formulu, iegūstam, ka $(2^n)^2 - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$. Zināms, ka starp katriem trim pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem tieši viens dalās ar 3. No skaitļiem $2^n - 1$, 2^n un $2^n + 1$ skaitlis 2^n noteikti nedalās ar 3, jo visi tā pirmreizinātāji ir divnieki. Tātad ar 3 dalās vai nu $2^n - 1$, vai arī $2^n + 1$, līdz ar to reizinājums $(2^n - 1)(2^n + 1)$ vienmēr dalās ar 3, tas ir, $4^n - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$ vienmēr dalās ar 3.

3. Plaknē no punkta O dažādos virzienos novilkti 19 stari. Vai starp tiem noteikti eksistē divi tādi stari, starp kuriem leņķis ir mazāks nekā 19° ?

Atrisinājums.

Pierādīsim, ka noteikti eksistē tāds leņķis, kas ir mazāks nekā 19°.

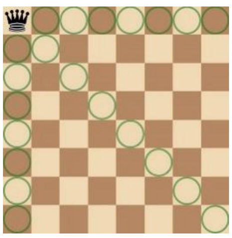
Ievērojam, ka mazākie leņķi veidosies, izvēloties divus blakus esošus starus. Ņemot katrus divus blakus esošus starus, iegūstam 19 leņķus ar kopīgu virsotni punktā O. Tie sadala plakni 19 daļās.

Pieņemsim pretējo, ka no šiem 19 leņķiem neviens nav mazāks kā 19°, tas ir, katrs no leņķiem ir vismaz 19° liels. Tātad šo 19 leņķu summa ir vismaz $19 \cdot 19° = 361°$, bet tā kā šie leņķi aizpilda visu plakni, tad tie veido pilnu leņķi, kura lielums ir $360°$. Iegūta pretruna, tāpēc pieņēmums ir aplams. Tas nozīmē, ka noteikti eksistē divi tādi stari, kuru veidotais leņķis ir mazāks nekā 19°.

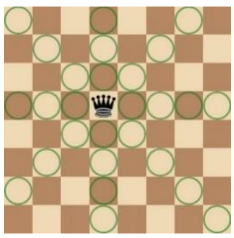
4. Uz šaha galdiņa novietotas 44 dāmas. Pierādīt, ka katra no tām apdraud vismaz vienu citu!

Atrisinājums.

Pieņemsim pretējo, ka ir tāda dāma, kas neapdraud nevienu citu dāmu.
Vismazāk lauciņu dāma apdraud, ja tā stāv stūra lauciņā (skat., piemēram, 2. att. un 3. att.), tas ir, dāma vienmēr apdraud vismaz 21 lauciņu. Ņemot vērā to, ka dāma neapdraud to lauciņu, uz kura viņa stāv, tad neapdraudēti paliek ne vairāk kā $64 - 21 - 1 = 42$ lauciņi, kur izvietot pārējās 43 dāmas. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums ir bijis aplams. Līdz ar to esam pierādījuši, ka katra no dāmām apdraud vismaz vienu citu dāmu.



2. att.



3. att.

5. Kādu dienu Francis aiz garlaicības sāka rakstīt kādu interesantu virkni:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{1}.$$

Tā ir augoša virkne, kuras pirmais loceklis ir 0 un pēdējais loceklis ir 1, bet pārējie virknes locekļi ir nesaīsināmas daļas, kuru saucēji nepārsniedz kādu skaitli, ko sauc par virknes kārtu. Iepriekšējā piemērā Francis bija uzrakstījis 4. kārtas virkni. Pēc kāda laika viņam sanāca uzrakstīt arī 5. kārtas virkni:

$$\frac{0}{1};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{1}{1}.$$

Viņš saskatīja kādu interesantu īpašību – jebkuru divu blakus esošu virknes locekļu saucēju summa pārsniedz virknes kārtu!

a) Pārliecinies arī tu, uzrakstot 7. kārtas virkni!

b) Francis, ilgi domādams, formulēja savu novērojumu apgalvojumā:

Ja ir dota n-tās kārtas virkne, tad jebkuriem diviem blakus esošiem virknes locekļiem $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ ir spēkā nevienādība $b+d>n$.

Palīdzi viņam pierādīt šo apgalvojumu!

Atrisinājums.

a) Septītās kārtas virkne:

$$\frac{0}{1};\frac{1}{7};\frac{1}{6};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{2}{7};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{3}{7};\frac{1}{2};\frac{4}{7};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{5}{7};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7};\frac{1}{1}.$$

b) Pieņemsim pretējo – pastāv tāda n-tās kārtas virkne ar blakusesošiem locekļiem $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$, kuriem $b+d\le n$. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ (jo kādam no abiem blakus esošajiem locekļiem jābūt lielākam par otru).

Izmantojot pieņēmumu, ka $b+d\le n$, mēģināsim atrast tādu daļskaitļi, kura saucējā ir $b+d$ un kurš atrodas starp $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$. (Ja izpildītos $b+d>n$, tad daļskaitlis ar šādu saucēju $b+d$ nepiederētu virknei.) Tādā veidā būs iegūta pretruna ar to, ka $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ ir blakus esoši virknes locekļi.

Apskatām $\frac{a+c}{b+d}$. Pamatosim, ka $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{d+b}$$
$$a(d+b)<b(a+c)$$
$$ad+ab<cb+ab$$
$$ad<cb$$
$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$$

Tā kā iegūta patiesa nevienādība $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, tad arī sākotnējā nevienādība $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$ ir patiesa.

Līdzīgi rīkojas, lai pamatotu $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$:

$$\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$
$$d(a+c)<c(b+d)$$
$$ad+cd<cb+cd$$
$$ad<cb$$
$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$$

Tā kā iegūta patiesa nevienādība $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, tad arī sākotnējā nevienādība $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ ir patiesa.

Tātad esam ieguvuši, ka $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$. Tas nozīmē, ka starp $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ atrodas vēl viens virknes loceklis $\frac{a+c}{b+d}$, bet tas ir pretrunā ar to, ka $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ ir blakus esoši virknes locekļi. Līdz ar to pieņēmums, ka pastāv tāda n-tās kārtas virkne ar blakus esošiem locekļiem $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$, kuriem $b + d \leq n$, ir aplams un Franča apgalvojums ir pierādīts.

Piezīme. Franča uzrakstīto virkni sauc par Fareja virkni.

"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

2. nodarbības uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Pierādi šo Dirihlē principa variantu:

Ja ir doti n truši un m būri, tad noteikti ir vismaz viens būris, kurā ir vismaz $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ truši.

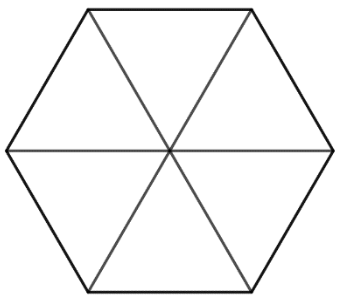
Atrisinājums.

Pieņemsim pretējo, ka katrā būrī ir mazāk nekā $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ truši. Trušu skaits katrā būrī ir vesels skaitlis un arī $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ ir vesels skaitlis. Lielākais veselais skaitlis, kas ir mazāks nekā $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$, ir $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$, tātad trušu skaits katrā būrī nedrīkst pārsniegt šo skaitli. Tā kā $\frac{n}{m} > \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$ (pretējā gadījumā, ja $\frac{n}{m} \leq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$, tad $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$ (vai iespējams kāds vēl mazāks vesels skaitlis) būtu mazākais veselais skaitlis, kas lielāks vai vienāds ar $\frac{n}{m}$, nevis $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$), tad katrā būrī jābūt mazāk nekā $\frac{n}{m}$ trušiem, un tā kā kopā ir m būri, tad kopā visos būros būs mazāk nekā $\frac{n}{m} \cdot m = n$ truši. Iegūta pretruna, jo visos būros kopā ir n truši. Tātad vismaz vienā būrī jābūt vismaz $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ trušiem.

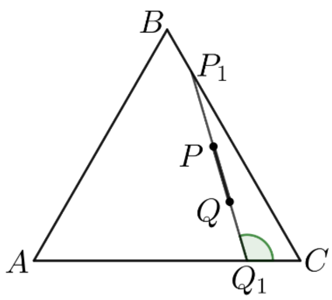
2. Regulāra sešstūra, kura malas garums ir 1, iekšpusē atzīmēti septiņi punkti. Pierādi, ka noteikti var atrast divus tādus punktus, starp kuriem attālums nav lielāks kā 1.

Atrisinājums.

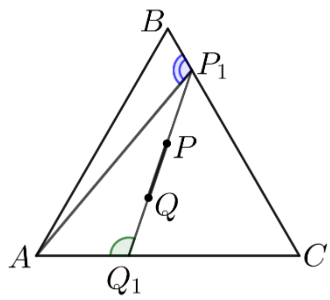
Sadalām regulāro sešstūri sešos regulāros trijstūros ar malu garumiem 1 (skat. 4. att.). Tā kā doti 7 punkti un 6 trijstūri, tad pēc Dirihlē principa ir tāds trijstūris, kurā atrodas vismaz divi punkti (ieskaitot trijstūra kontūru). Tātad jāpamato, ka attālums starp šiem diviem trijstūra punktiem nav lielāks kā 1.



4. att.



5. att.



6. att.

Apzīmējam šos divus patvaļīgos punktus, kas atrodas vienā regulārajā trijstūrī, ar P un Q. Tad pagarinām nogriezni PQ līdz tas krusto trijstūra ABC malas. Krustpunktu ar malu BC apzīmēsim ar P_1 un krustpunktu ar malu AC ar Q_1 (skat. 5. att.). Pieminēsim, ka vienmēr varam pārsaukt trijstūra ABC virsotnes tā, lai punkti P_1 un Q_1 atrastos tieši uz šīm malām. Lai pamatotu, ka nogrieznis PQ nav garāks kā 1, pietiks, ja pamatosim, ka nogrieznis P_1Q_1 nav garāks kā 1, jo nogrieznis PQ ietilpst P_1Q_1, tas ir, $PQ < P_1Q_1$.

Izmantosim zināmu īpašību, ka trijstūrī pret lielāko leņķi atrodas garākā mala. Sadalīsim pierādījumu divos gadījumos.

1. Ja $\sphericalangle P_1Q_1C \geq 90°$ (skat. 5. att.), tad $P_1Q_1 < P_1C \leq BC = 1$. Šajā gadījumā esam pamatojuši, ka attālums starp P un Q (nogriežņa PQ garums) nav lielāks kā 1.
2. Ja $\sphericalangle P_1Q_1C < 90°$ (skat. 6. att.), no kā izriet, ka $\sphericalangle AQ_1P_1 \geq 90°$ kā blakusleņķis. Tātad $AP_1 > P_1Q_1$, jo mala A_1P_1 atrodas pret plato leņķi. Tā kā blakusleņķu summa ir $180°$, tad viens no blakusleņķiem ir vismaz $90°$. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $\sphericalangle CP_1A \geq 90°$, tātad $AP_1 < AB = 1$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $PQ < P_1Q_1 < AP_1 < AB = 1$.

Šie abi gadījumi izsmeļ visus iespējamos gadījumus, tāpēc varam secināt, ka vienādmalu trijstūrī attālums starp jebkuriem diviem punktiem nav lielāks kā 1.

3. Skaitli $\frac{1}{n}$, kur n – naturāls skaitlis, pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu. Pierādi, ka iegūta bezgalīga periodiska decimāldaļa!

Atrisinājums.

Apskatām patvaļīgu naturālu skaitli n. Gadījumā, ja $n = 1$, tad nav ko apskatīt, jo mēs iegūstam $1,(0)$ ar bezgalīgu periodu, kas sastāv no nullēm, tāpēc varam pieņemt, ka $n > 1$.

Lai zinātu, kā rīkoties tālāk, jāatceras, kā notiek dalīšana "stabiņā". Ja mūsu dalītājs ir lielāks par dalāmo, kas arī sakrīt ar mūsu gadījumu, mēs dalāmo pareizinām ar 10, izdalām ar dalītāju n, pilno dalījumu uzrakstam "pa labi aiz komata", izrakstām atlikumu no dalījuma, kas kļūst par jauno dalāmo, un atkārtojam šo procedūru līdz atlikums ir 0 vai arī saskatīts periods. Šo procesu varam aprakstīt šādi:

$$\begin{aligned} 10 &= d_1 n + a_1 \\ 10a_1 &= d_2 n + a_2 \\ 10a_2 &= d_3 n + a_3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Skaitļi d_i būs tie skaitļi, kas tiks rakstīti aiz komata i-tajā pozīcijā jeb $\frac{1}{n} = 0, d_1d_2d_3d_4\ldots$.

Skaitļi a_i ir dalījuma atlikums. Lai pamatotu, ka iegūtais dalījums būs bezgalīga periodiska decimāldaļa, pietiek ar to, ka mēs pamatojam, ka, sākot ar kādu naturālu skaitli K, visiem naturālajiem skaitļiem k, kas ir lielāki nekā K, būtu spēkā $d_k = d_{k+p}$, kur p ir perioda garums. Ar to mēs pamatotu, ka cipari aiz komata sāk atkārtoties periodiski. Lai tas būtu spēkā, nepieciešams, ka $a_K = a_{K+p}$, jo šie skaitļi pilnībā nosaka dalījumu:

$$\begin{aligned} 10a_K &= d_{K+1} n + a_{K+1} \\ 10a_{K+p} &= d_{K+p} n + a_{K+p}. \end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka, ja atkārtojas atlikumi, tad atkārtosies skaitļi d_i, kas arī beigās veidos decimāldaļas periodu.

Tātad esam nonākuši līdz tam, ka jāpamato, ka atlikumi atkārtosies. Tā kā, dalot ar n, var iegūt tikai n dažādus atlikumus $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$, tad dalīšanas procesā pirmajos $(n+1)$ soļos pēc Dirihlē principa noteikti parādīsies vismaz divi dalījumi ar vienādiem atlikumiem. Solis, kurā pirmo reizi parādās atlikums, kurš atkārtojas, būs mūsu K-tais solis, un visi dalījumi pirms šī soļa veidos priekšperiodu. Tā kā šie atlikumi viennozīmīgi nosaka dalījuma nākamo soli (reizinām atlikumu ar 10 un izdalām ar n), skaitļi, kas rodas dalīšanas procesā un tiek rakstīti decimāldaļā, arī atkārtosies. Šādi tiek veidots periods un mēs iegūstam bezgalīgi periodisku decimāldaļu.

4. Šarlote nolēmusi astoņas nedēļas gatavoties šautriņmešanas turnīram. Viņa plānojusi katru dienu izspēlēt vismaz vienu spēli, bet ne vairāk kā 11 spēles nedēļā. Pierādi, ka noteikti varēs atrast tādas secīgas dienas, kurās kopā būs izspēlētas tieši 23 spēles!

Atrisinājums.

Apskatīsim skaitļu virkni, kas apraksta, cik spēļu jau ir izspēlēts līdz n-tajai dienai (ieskaitot), un apzīmēsim atbilstošos skaitļus ar a_n. Tā kā katru dienu tiek izspēlēta vismaz viena spēle, tad šajā virknē ir 56 atšķirīgi skaitļi un a_{56} nepārsniegs 88, jo Šarlote gatavojās 8 nedēļas:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{56} \leq 88.$$

Lai pamatotu, ka varēs atrast secīgas dienas, kurās kopā būs izspēlētas tieši 23 spēles, atliek atrast tādus divus virknes locekļus, kuri atšķiras tieši par 23. Tā kā par starpībām ir grūtāk spriest nekā tad, ja jāpamato, vai vērtības sakrīt, izveidosim papildu virkni $b_n = a_n + 23$, kas satur locekļus a_n, kuriem pieskaitīts 23. Tagad tikai jāpārbauda, vai kāds no virknes a_n locekļiem sakrīt ar kādu no virknes b_n locekli. Jāpiemin, ka virkne b_n var saturēt skaitļus no 24 līdz 111. Tā kā mums kopā ir 112 skaitļi (56 no virknes a_n un 56 no b_n) un 111 vērtības (no 1 līdz 111), ko tie var pieņemt, tad pēc Dirihlē principa secinām, ka var atrast divus vienādus skaitļus. Tātad esam atraduši divus virknes locekļus, kuru vērtības atšķiras tieši par 23. Tā kā katrā virknē nav divu vienādu skaitļu, tad vienādie var būt tikai viens no virknes a_n , bet otrs no virknes b_n. Skaitļi b_n ir iegūti pie katra pirmās virknes skaitļa pieskaitot 23, bet tas nozīmē, ka ir divi virknes a_n locekļi, kas atšķiras tieši par 23, kaas nozīmē, ka ir secīgas dienas, kurās izspēlētas tieši 23 spēles.

5. Teodors ar saviem draugiem aizgāja pusdienās kādā interesantā vietā, kur visi sēž pie apaļa galda, kas spēj rotēt. Katrs no viņiem pasūtīja ēdienu, kas atšķiras no pārējo izvēlēm. Pēc ēdiena atnešanas sanācis tā, ka neviens nesēž pretī savam ēdienam. Pierādi, ka var pagriezt galdu tā, lai vismaz diviem būtu pretī savs ēdiens.

Atrisinājums.

Apzīmēsim pusdienojošo cilvēku skaitu ar n. Katram cilvēkam varam piekārtot skaitli, kas apraksta, cik sēdvietu attālumā pulksteņrādītāja virzienā atrodas viņa ēdiens. Uzreiz varam secināt, ka nevienam cilvēkam netiek piekārtots skaitlis 0, jo tas nozīmētu, ka viņš jau sēž pretī savam ēdienam. Tas pats secināms arī par skaitli n, jo galds ir apaļš un simetrijas dēļ tiktu veikts vesels aplis un viņš tāpat sēdētu pretī savam ēdienam. Tas nozīmē, ka katram cilvēkam tiek piekārtots kāds skaitlis no 1 līdz $n-1$. Tā kā kopā ir n cilvēku, bet skaitļus skaits ir $(n-1)$, tad pēc Dirihlē principa ir vismaz divi cilvēki, kam ir piekārtots viens un tas pats skaitlis x. Ja pagriežam galdu pulksteņrādītāja virzienā par x sēdvietām, tad iegūstam situāciju, kurā vismaz divi cilvēki sēž pretī savam ēdienam.

"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

3. nodarbības uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Uz galda ir kaut kāds skaits kartīšu (vismaz 4). Uz katras kartītes uzrakstīts naturāls skaitlis, visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi. Vai katrām divām no šīm kartītēm a un b var atrast citas divas c un d tā, lai uz tām uzrakstīto skaitļu summas būtu vienādas $a + b = c + d$?

Atrisinājums.

Tā kā uz katras kartītes urzrakstīts naturāls skaitlis, tad varam paņemt tās divas kartītes, uz kurām uzrakstīti mazākie skaitļi. Šo kartīšu summa būs mazākā iespējamā. Tā kā uz pārējām kartītēm uzrakstīti lielāki skatļi, secinām, ka šo nevarēs vienmēr izdarīt.

2. Doti naturālie skaitļi no 1 līdz 75. Pierādīt, ka no tiem (tos neatkārtojot) nevar izvēlēties 55 skaitļus tā, lai to summa būtu vienāda ar atlikušo 20 skaitļu summu!

Atrisinājums.

Summa 55 mazākajiem skaitļiem ir 1540. Tas nozīmē, ka, lai kā arī izvēlētos šos 55 skaitļus, to summa vienmēr būs vismaz 1540, bet atlikušie skaitļi summā neveidos ne vairāk kā 1310. Tā kā šis summas nekad nesakritīs, secinām, ka tas nav iespējams.

3. Kādā vasaras dienā Jana ar saviem draugiem izlēma spēlēties ar ūdens baloniem. Viņi sapildīja balonus ar ūdeni un gāja klajā laukā. Katrs paņēma balonu un aizgāja nostāties laukā tā, lai attālums starp jebkuriem diviem cilvēkiem būtu atšķirīgs. Pēc signāla katrs meta ar balonu sev tuvākajam cilvēkam. Pierādīt, ka noteikti būs tādi divi cilvēki, kas meta viens otram!

Atrisinājums.

Tā kā attālumi ir unikāli, apskatam to draugu pāri, starp kuriem ir īsākais attālums. Viņi metīs vienam otram, jo, ja tas tā nebūtu, kādam būtu jāstāv tuvāk. Ja kāds stāvētu tuvāk, tad tas būtu pretrunā ar pieņēmumu, ka mēs apskatām draugu pāri, starp kuriem ir īsākais attālums.

4. Tomass palīdzēja skolai veidot papīra rotājumus Ziemassvētkiem. Kad viss bija pabeigts, viņa galds bija pilnībā noklāts ar 10 dažādiem papīra izgriezumiem. Daži pārklājās viens ar otru, bet daži pat pārkarājās pāri galdam. Tomasam bija skaidrs, ka jāsakārto galds, bet viņš sevi izaicināja. Tomass grib noņemt no galda pusi no papīra izgriezumiem tā, lai vismaz puse no galda vēl būtu noklāta ar atlikušajiem izgriezumiem. Vai viņam vienmēr tas var izdoties?

Atrisinājums.

Vispirms katram atgriezumam nogriezīsim nost to daļu, kas pārkarājas pāri galdam, lai paliek tikai galds noklāts. Katrs atgriezums noklāj kādu galda laukuma daļu. Tā kā šie 10 gabali noklāj visu galdu, tad lielākajam gabalam jānosedz vismaz $\frac{1}{10}$ no visa galda. Noņemot šo gabalu no galda, ne vairāk kā $\frac{9}{10}$ no galda jābūt nosegtām. Skatoties uz nākošo lielāko gabalu, līdzīgi varam secināt, ka tam jānosedz vismaz $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$ no galda. Šādi varam turpināt izvēlēties ar līdzīgiem spriedumiem līdz esam izvēlējušies 5 lielākos gabalus un ne vairāk kā $\frac{5}{10}$ no galda ir nosegtas. Tātad atlikušie gabali ir tie, kas būtu jānoņem no galda, lai Tomass veiksmīgi izpildītu savu izaicinājumu, jo, noņemot tos, vismaz puse no galda paliks nosegta.

5. Trasē stāv 21 identiska mašīna. Zināms, ka tām visām kopā ir pietiekoši daudz benzīna, lai viena mašīna varētu apbraukt tikai vienu apli. Pamatot, ka var atrast tādu mašīnu, kura var veikt vienu apli, ja tā paņem benzīnu no katras stāvošās mašīnas, ko apbrauc!

<u>Atrisinājums.</u>

Izveidosim testa braucienu ar mašīnu, kurai bākas ietilpība ir pietiekoši liela, lai turētu vairāk benzīnu nekā ir uz trases un kurai jau ir nepieciešamais benzīns, lai apbrauktu apli. Izvēlamies jebkuru mašīnu, no kurienes sākt braucienu. Paņemam tās benzīnu un atzīmējam, cik bākā palicis benzīns. Braucam līdz nākošajai mašīnai, un, pirms paņemam tās benzīnu, atzīmējam, cik bākā palicis benzīns. Šādi apbraucam apli līdz sākotnējai mašīnai. Mēs esam ievākuši datus ar benzīna daudzumu bākā. Starp šiem datiem būs mazākais rādītājs un tieši šī mašīna ir arī tā, kura būs jāizvēlas. Tā kā šis ir mazākais rādītājs, tad tas nozīmē, ka tas nevar krist zemāk par to. Tātad, izvēloties šo mašīnu, mums nebeigsies benzīns pirms neesam apbraukuši apli.

"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

4. nodarbības uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Kasparam dārzā izaugušas 2019 mutantu nezāles. Gandrīz vienmēr lai cik viņš izrautu ārā, tikpat nezāles izaug atpakaļ. Bet kaut kas dīvains notiek, ja izrauj tieši 5, 14, 19, 33 vai 77 nezāles reizē. Šajos gadījumos atauga attiecīgi 21, 2, 7, 41 un 53 nezāles. Kaspars prātoja, vai ir iespējams iznīdēt visas nezāles. Vai viņam tas var izdoties?

Atrisinājums.

Apskatamies, par cik tieši izmainās kopējais nezāļu skaits, ja izrauj $5, 14, 19, 33$ vai 77 nezāles. Tas attiecīgi ir $16, -12, -12$, $8, -24$. Katrs no šiem skaitļiem dalās ar 4, bet sākotnējais nezāļu skaits nedalās. Tā kā vēlamais rezultāts (0) dalās ar 4, tad secinām, ka Kasparam tas nevar izdoties.

2. Agnija un Raitis uz tāfeles uzrakstīja naturālos skaitļus no 1 līdz 100. Katrā solī Agnija un Raitis izvēlas katrs pa vienam skaitlim no tāfeles, attiecīgi a un b, un aizstāj tos ar skaitli $ab + a + b$. Skaidrs, ka pēc 99 soļiem uz tāfeles paliks viens skaitlis. Vai šis skaitlis ir atkarīgs no tā, kā Raitis un Agnija izvēlas skaitļus?

Atrisinājums.

Varam saskatīt, ka $ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$. Ja šo skaitli apvienu ar kādu citu skaitli c, tad iegūstam $(((a + 1)(b + 1) - 1) + 1)(c + 1) - 1 = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1$. Šādi induktīvi darbojoties, varam saskatīt, ka rezultējošais skaitlis nebūs atkarīgs no tā, kā Raitis un Agnija izvēlas skaitļus, jo vienmēr iegūst skaitli $101! - 1$.

3. Rūķīšu ciemā tiek rīkots pikošanās dueļa turnīrs, kurā piedalīsies 2019 rūķīši. Pamatot, ka turnīra beigās rūķīšu skaits, kas izspēlēja nepāra skaita spēļu, būs pāra skaitlis!
Piezīme. Turnīra struktūrai nav nozīmes. Neviens cilvēks nevar aptvert, kā rūķīši rīko turnīrus. Pat ja tiek rīkots turnīrs, kur netiek izspēlēta neviena spēle. Šādā gadījumā rūķīšu skaits, kas izspēlē nepāra skaitu spēles, ir 0, kas ir pāra skaitlis, kā tas tiek pieprasīts uzdevumā.

Atrisinājums.

Katrs rūķītis ir izspēlējis savu skaitu spēļu. Ja saskaitām visu rūķīšu izspēlēto spēļu skaitu, iegūsim pāra skaitli, jo tiklīdz notiek viens duelis, abiem rūķiem spēļu skaits pieaug par 1 jeb kopsummā par 2. Kopējo spēļu skaitu var sadalīt divās daļās – summa no tiem rūķiem, kas izspēlējuši pāra skaitu spēļu P, un tie, kas nepāra - N. Tātad $P + N$ ir pāra skaitlis. Mēs zinām, ka P ir pāra skaitlis, jo tiek saskaitīti pāra skaitļi, bet tad tas nozīmē, ka N arī ir pāra skaitlis, jo rezultāts ir pāra skaitlis. Tā kā N ir pāra skaitlis, kas sastāv no nepāra skaitļu summas, varam secināt, ka šo saskaitāmo ir pāra skaits. Esam pamatojuši prasīto.

4. Vienpadsmit draugi izlēma iet uzspēlēt basketbolu. Katrā komandā ir pieci spēlētāji, un viens paliek par tiesnesi. Lai komandu sadalījums būtu godīgs, tad komandas tiek sadalītas tā, lai katras komandas spēlētāju kopējā masa sakristu ar otras komandas kopējo masu. Izrādās, lai arī kuru izvēlas par tiesnesi, vienmēr var izveidot komandas, lai masas sakristu. Pamato, ka visi vienpadsmit draugi sver vienādi!

Atrisinājums.

Pieņemsim, ka visi draugi nesver vienādi. Ja jau šis ir iespējams, tad apskatīsim gadījumu, kad visu 11 draugu kopējā masa ir vismazākā iespējamā. Tad, izvēloties jebkuru cilvēku par tiesniesi, redzam, ka starpība starp visu 11 draugu kopējo masu un tiesneša masu ir pāra skaitlis, jo šis sakrīt ar abu komandu masu summu, kuras ir vienādas pēc masas. Tā kā tas ir spēkā jebkuram tiesnesim, tad secinām, ka masu paritāte sakrīt visiem draugiem. Ja visi sver pāra skaitli, tad, dalot visu masas ar 2, iegūstam situāciju, kad ir iegūtas masas, kas ir mazākas par sākotnējām, bet vēl joprojām ir atšķirīgi, iegūstot pretrunu ar to, ka mēs apskatām vismazāko iespējamo kopējo masu. Līdzīgi gadījumā, ja visi sver nepāra skaitli, tad atņemot no visu masām 1, iegūstam tādu pašu situāciju, iegūstot pretrunu.

Piezīme. Uzdevuma formulējumā diemžēl ir izlaists, ka sportistu masas ir naturāli skaitļi, neskatoties uz to, ka apgalvojums ir spēkā arī reāliem skaitļiem. Pārsvarā visi, kas iesniedza risinājumu, veiksmīgi arī pieņēma, ka sportistu masas ir veseli skaitļi.

5. Naturālu skaitli katru minūti var vai nu reizināt, vai dalīt vai nu ar 2, vai 3 (darbības jāveic tā, lai rezultāts vienmēr būtu naturāls skaitlis). Vai tieši vienas stundas laikā no skaitļa 216 var iegūt 972?

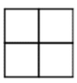
Atrisinājums.

Sadalot skaitļus pirmreizinātājos, iegūstam, ka $216 = 2^3 \cdot 3^3$ un $972 = 2^2 \cdot 3^5$. Redzam, ka rezultātā ir nepāra skaits pirmreizinātāju, bet sākumā pāra. Tā kā stundā ir pāra skaits minūšu, tad rezultātā varam tikai iegūt skaitli, kam ir pāra skaits pirmreizinātāju.

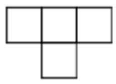
"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

5. nodarbības uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Vai šaha galdiņu var pārklāt, izmantojot vienu 7. att. doto figūru un 15 figūras, kas dotas 2. att.? Katra figūra pārklāj tieši četrus lauciņus, šaha galdiņam jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus šaha galdiņa, figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.



7. att.

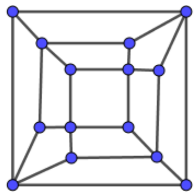


8. att.

Atrisinājums.

Šaha galdiņam ir 32 balti un 32 melni lauciņi. 7. att figūra vienmēr noklās 2 baltus un 2 melnus lauciņus. Tas nozīmē, ka ar atlikušajām 15 8. att figūrām jānoklāj 30 balti un 30 melni lauciņi. 8. att figūra var noklāt 3 melnus un 1 baltu vai tieši otrādi 3 baltus un 1 melnu lauciņu. Lai noklātu pāra skaitu jebkuras krāsas, nepieciešams pāra skaits 8. att figūru. Bet mums ir 15 figūras, tāpēc rezultātā no katras krāsas varēsim noklāt tikai nepāra skaitu lauciņu. Tā kā no katras krāsas jānoklāj 30, kas ir pāra skaits, secinām, ka to nevar izdarīt.

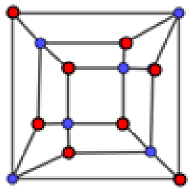
2. Kartē (skat. 9. att.) ar punktiem apzīmētas pilsētas, bet ceļi – ar nogriežņiem. Vai no kartē dotajiem ceļiem var izveidot tādu maršrutu, kas katru no 14 pilsētām satur tieši vienu reizi?



9. att.

Atrisinājums.

Katru pilsētu varam nokrāsot sarkanu vai zilu tā, lai jebkuras divas kaimiņpilsētas būtu pretējās krāsās (skat. 10. att.). Šādam maršrutam tad būtu alternējoši jāiet caur 7 sarkanām un 7 zilām pilsētām, bet kopumā ir tikai 6 zilas pilsētas, tāpēc secinām, ka tas nav iespējams.



10. att.

3. Katrs naturālais skaitlis tiek izkrāsots melns vai balts. Zināms, ka jebkuru divu dažādi nokrāsotu skaitļu summa ir melns skaitlis, bet to reizinājums ir balts skaitlis. Kādā krāsā ir divu baltu skaitļu reizinājums?

Atrisinājums.

Zināms, ka $b+m=m$ un $b\cdot m=b$. Tātad $b\cdot(b+m)=b$. Atverot iekavas, iegūstam, ka

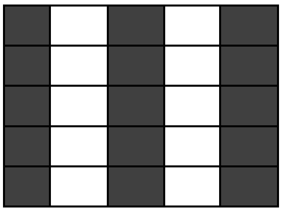
$$\begin{aligned} b\cdot b+b\cdot m &= b\cdot b+b \\ &= b. \end{aligned}$$

Tā kā $m+b=m$, tad esam spiesti izvēlēties, ka $b\cdot b=b$ jeb baltu skaitļu reizinājums ir balts.

4. Dots kvadrāts ar izmēriem 5×5 rūtiņas. Katrā rūtiņā sēž tieši viena vabole. Pēc signāla katra vabole aizrāpo rūtiņu, kam ar esošo ir kopīgs stūris, bet nav kopīga mala. Pēc šī signāla var gadīties, ka kādā rūtiņā var sēdēt vairākas vaboles un dažās rūtiņās – neviena. Kāds ir mazākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits pēc signāla?

Atrisinājums.

Katru kvadrāta kolonnu varam nokrāsot alternējoši melnu vai baltu (skat. 11. att.). Katra vabole pēc lēciena mainīs sava lauciņa krāsu. Sākotnēji uz melnajiem lauciņiem atrodas kopumā 15 vaboles, bet pēc signāla to būs par 5 mazāk, jo ir tikai 10 baltu lauciņu. Tātad vienmēr būs vismaz 5 tukšas rūtiņas pēc signāla. Tas, ka to patiešām var izdarīt, tiek atstāts kā vingrinājums lasītājam.

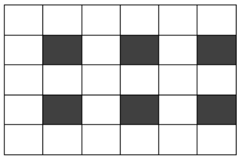


11. att.

5. Taisnstūra formas grīda ir noklāta ar 2×2 un 1×4 izmēra flīzēm. Gadījās, ka viena flīze tika saplēsta, bet to aizvietot var tikai ar otra veida flīzi. Pamatot, ka nevar pārkārtot flīzes, lai vēlreiz noklātu grīdu!

Atrisinājums.

Nokrāsojot grīdu kā redzams 12. att., varam saskatīt, ka 2×2 izmēra flīze vienmēr noklās tikai vienu melnu laucinu, bet 1×4 izmēra flīze 0 vai 2 melnos laucinus. Tātad rezultātā nevarēs pārkārtot flīzes, jo nesakritīs melno laucinu skaits.



12. att.