"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

1. nodarbības uzdevumi

1. Dots kvadrāts ar izmēriem 3×3 rūtiņas. Katrā tā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis. Kvadrātu sauc par maģisku, ja katrā rindā, katrā kolonnā un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas ir vienādas.

a) Vai eksistē tāds maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9?

b) Vai eksistē tāds maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti naturālie skaitļi 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

2. Dots, ka n ir naturāls skaitlis. Pierādīt vai atspēkot dotos apgalvojumus!

a) Ja n^2 ir nepāra skaitlis, tad n ir nepāra.

b) Ja $n^3 + 5$ ir nepāra skaitlis, tad n ir pāra.

c) Skaitlis $n^2 - n + 41$ vienmēr ir pirmskaitlis.

d) Skaitlis $4^n - 1$ vienmēr dalās ar 3.

3. Plaknē no punkta O dažādos virzienos novilkti 19 stari. Vai starp tiem noteikti eksistē divi tādi stari, starp kuriem leņķis ir mazāks nekā 19° ?

4. Uz šaha galdiņa novietotas 44 dāmas. Pierādīt, ka katra no tām apdraud vismaz vienu citu!

5. Kādu dienu Francis aiz garlaicības sāka rakstīt kādu interesantu virkni:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{1}.$$

Tā ir augoša virkne, kuras pirmais loceklis ir 0 un pēdējais loceklis ir 1, bet pārējie virknes locekļi ir nesaīsināmas daļas, kuru saucēji nepārsniedz kādu skaitli, ko sauc par virknes kārtu. Iepriekšējā piemērā Francis bija uzrakstījis 4. kārtas virkni. Pēc kāda laika viņam sanāca uzrakstīt arī 5. kārtas virkni:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1}.$$

Viņš saskatīja kādu interesantu īpašību – jebkuru divu blakus esošu virknes locekļu saucēju summa pārsniedz virknes kārtu!

a) Pārliecinies arī tu, uzrakstot 7. kārtas virkni!

b) Francis, ilgi domādams, formulēja savu novērojumu apgalvojumā:

Ja ir dota n-tās kārtas virkne, tad jebkuriem diviem blakus esošiem virknes locekļiem $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ ir spēkā nevienādība $b + d > n$.

Palīdzi viņam pierādīt šo apgalvojumu!

"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

2. nodarbības uzdevumi

1. Pierādi šo Dirihlē principa variantu:

Ja ir doti n truši un m būri, tad noteikti ir vismaz viens būris, kurā ir vismaz $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ truši.

2. Regulāra sešstūra, kura malas garums ir 1, iekšpusē atzīmēti septiņi punkti. Pierādi, ka noteikti var atrast divus tādus punktus, starp kuriem attālums nav lielāks kā 1.

3. Skaitli $\frac{1}{n}$, kur n – naturāls skaitlis, pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu. Pierādi, ka iegūta bezgalīga periodiska decimāldaļa!

4. Šarlote nolēmusi astoņas nedēļas gatavoties šautriņmešanas turnīram. Viņa plānojusi katru dienu izspēlēt vismaz vienu spēli, bet ne vairāk kā 11 spēles nedēļā. Pierādi, ka noteikti varēs atrast tādas secīgas dienas, kurās kopā būs izspēlētas tieši 23 spēles!

5. Teodors ar saviem draugiem aizgāja pusdienās kādā interesantā vietā, kur visi sēž pie apaļa galda, kas spēj rotēt. Katrs no viņiem pasūtīja ēdienu, kas atšķiras no pārējo izvēlēm. Pēc ēdiena atnešanas sanācis tā, ka neviens nesēž pretī savam ēdienam. Pierādi, ka var pagriezt galdu tā, lai vismaz diviem būtu pretī savs ēdiens.

"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

3. nodarbības uzdevumi

1. Uz galda ir kaut kāds skaits kartīšu (vismaz 4). Uz katras kartītes uzrakstīts naturāls skaitlis, visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi. Vai katrām divām no šīm kartītēm a un b var atrast citas divas c un d tā, lai uz tām uzrakstīto skaitļu summas būtu vienādas $a + b = c + d$?

2. Doti naturālie skaitļi no 1 līdz 75. Pierādīt, ka no tiem (tos neatkārtojot) nevar izvēlēties 55 skaitļus tā, lai to summa būtu vienāda ar atlikušo 20 skaitļu summu!

3. Kādā vasaras dienā Jana ar saviem draugiem izlēma spēlēties ar ūdens baloniem. Viņi sapildīja balonus ar ūdeni un gāja klajā laukā. Katrs paņēma balonu un aizgāja nostāties laukā tā, lai attālums starp jebkuriem diviem cilvēkiem būtu atšķirīgs. Pēc signāla katrs meta ar balonu sev tuvākajam cilvēkam. Pierādīt, ka noteikti būs tādi divi cilvēki, kas meta viens otram!

4. Tomass palīdzēja skolai veidot papīra rotājumus Ziemassvētkiem. Kad viss bija pabeigts, viņa galds bija pilnībā noklāts ar 10 dažādiem papīra izgriezumiem. Daži pārklājās viens ar otru, bet daži pat pārkarājās pāri galdam. Tomasam bija skaidrs, ka jāsakārto galds, bet viņš sevi izaicināja. Tomass grib noņemt no galda pusi no papīra izgriezumiem tā, lai vismaz puse no galda vēl būtu noklāta ar atlikušajiem izgriezumiem. Vai viņam vienmēr tas var izdoties?

5. Trasē stāv 21 identiska mašīna. Zināms, ka tām visām kopā ir pietiekoši daudz benzīna, lai viena mašīna varētu apbraukt tikai vienu apli. Pamatot, ka var atrast tādu mašīnu, kura var veikt vienu apli, ja tā paņem benzīnu no katras stāvošās mašīnas, ko apbrauc!

"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

4. nodarbības uzdevumi

1. Kasparam dārzā izaugušas 2019 mutantu nezāles. Gandrīz vienmēr lai cik viņš izrautu ārā, tikpat nezāles izaug atpakaļ. Bet kaut kas dīvains notiek, ja izrauj tieši 5, 14, 19, 33 vai 77 nezāles reizē. Šajos gadījumos atauga attiecīgi 21, 2, 7, 41 un 53 nezāles. Kaspars prātoja, vai ir iespējams iznīdēt visas nezāles. Vai viņam tas var izdoties?

2. Agnija un Raitis uz tāfeles uzrakstīja naturālos skaitļus no 1 līdz 100. Katrā solī Agnija un Raitis izvēlas katrs pa vienam skaitlim no tāfeles, attiecīgi a un b, un aizstāj tos ar skaitli $ab + a + b$. Skaidrs, ka pēc 99 soļiem uz tāfeles paliks viens skaitlis. Vai šis skaitlis ir atkarīgs no tā, kā Raitis un Agnija izvēlas skaitļus?

3. Rūķīšu ciemā tiek rīkots pikošanās dueļa turnīrs, kurā piedalīsies 2019 rūķīši. Pamatot, ka turnīra beigās rūķīšu skaits, kas izspēlēja nepāra skaita spēļu, būs pāra skaitlis!
Piezīme. Turnīra struktūrai nav nozīmes. Neviens cilvēks nevar aptvert, kā rūķīši rīko turnīrus. Pat ja tiek rīkots turnīrs, kur netiek izspēlēta neviena spēle. Šādā gadījumā rūķīšu skaits, kas izspēlē nepāra skaitu spēles, ir 0, kas ir pāra skaitlis, kā tas tiek pieprasīts uzdevumā.

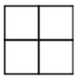
4. Vienpadsmit draugi izlēma iet uzspēlēt basketbolu. Katrā komandā ir pieci spēlētāji, un viens paliek par tiesnesi. Lai komandu sadalījums būtu godīgs, tad komandas tiek sadalītas tā, lai katras komandas spēlētāju kopējā masa sakristu ar otras komandas kopējo masu. Izrādās, lai arī kuru izvēlas par tiesnesi, vienmēr var izveidot komandas, lai masas sakristu. Pamato, ka visi vienpadsmit draugi sver vienādi!

5. Naturālu skaitli katru minūti var vai nu reizināt, vai dalīt vai nu ar 2, vai 3 (darbības jāveic tā, lai rezultāts vienmēr būtu naturāls skaitlis). Vai tieši vienas stundas laikā no skaitļa 216 var iegūt 972?

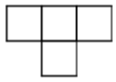
"Profesora Cipariņa klubs"
2018./2019. m.g.

5. nodarbības uzdevumi

1. Vai šaha galdiņu var pārklāt, izmantojot vienu 1. att. doto figūru un 15 figūras, kas dotas 2. att.? Katra figūra pārklāj tieši četrus laucipus, šaha galdiņam jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus šaha galdiņa, figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.

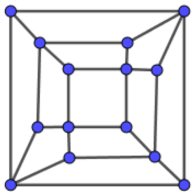


1. att.



2. att.

2. Kartē (skat. 3. att.) ar punktiem apzīmētas pilsētas, bet ceļi – ar nogriežņiem. Vai no kartē dotajiem ceļiem var izveidot tādu maršrutu, kas katru no 14 pilsētām satur tieši vienu reizi?



3. att.

3. Katrs naturālais skaitlis tiek izkrāsots melns vai balts. Zināms, ka jebkuru divu dažādi nokrāsotu skaitļu summa ir melns skaitlis, bet to reizinājums ir balts skaitlis. Kādā krāsā ir divu baltu skaitļu reizinājums?

4. Dots kvadrāts ar izmēriem 5×5 rūtiņas. Katrā rūtiņā sēž tieši viena vabole. Pēc signāla katra vabole aizrāpo rūtiņu, kam ar esošo ir kopīgs stūris, bet nav kopīga mala. Pēc šī signāla var gadīties, ka kādā rūtiņā var sēdēt vairākas vaboles un dažās rūtiņās – neviena. Kāds ir mazākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits pēc signāla?

5. Taisnstūra formas grīda ir noklāta ar 2×2 un 1×4 izmēra flīzēm. Gadījās, ka viena flīze tika saplēsta, bet to aizvietot var tikai ar otra veida flīzi. Pamatot, ka nevar pārkārtot flīzes, lai vēlreiz noklātu grīdu!