**"Profesora Cipariņa klubs" 1978./79. m.g.**

**1. nodarbības atrisinājumi**

**1.1.** Atbilde. Uz abiem jautājumiem atbilde ir: nē, nevar.

Pierādījums. Dotā skaitļa ciparu summa ir 2; 2 nedalās ar 3. tātad arī dotais skaitlis nedalās ar 3. Var pierādīt, ka triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa dalās ar 3:

$S=n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$.

Tālāk aplūkosim, kādos gadījumos ar 3 dalās triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu reizinājums $R=n(n+1)(n+2)$.

Ja n dalās ar 3, tad ar 3 dalās arī reizinājums R.

Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad n+2 dalās ar 3 un tāpēc arī R dalās ar 3.

Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad n+1 dalās ar 3 un tāpēc arī R dalās ar 3.

Tā kā n vai nu dalās ar 3 bez atlikuma, vai arī dod atlikumā 1 vai 2, tad mēs esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus un pierādījuši, ka R vienmēr dalās ar 3.

**1.2.** Atbilde. Nē, nevar.

Pierādījums. Var pierādīt, ka izliektam n-stūrim ir $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonāles. No katras n-stūra virsotnes iziet n-3 diagonāles, tas ir, diagonāles, kas šo virsotni savieno ar visām n-stūra virsotnēm, izņemot pašu šo virsotni un divas tai blakus tai esošās. Tātad kopā iznāk n(n-3) diagonāles. Tā kā katra diagonāle AB te ieskaitīta divas reizes – vienreiz pie virsotnes A, otrreiz pie virsotnes B, tad īstais diagonāļu skaits $S=\frac{1}{2}n(n-3)$. Pieaugot n, pieaug arī n-3, un līdz ar to palielinās arī izteiksmes $S=\frac{1}{2}n(n-3)$ vērtība.

Ja n=4, tad S=2;

ja n=5, tad S=5;

ja n=6, tad S=9;

ja n=7, tad S=14;

ja n=8, tad S=20.

No pierādījuma redzams, ka S nekad nevar kļūt vienāds ar 15.

**1.3.** Risinājums. Parādīsim, ka to var izdarīt, cirkuli izmantojot septiņas reizes. (Katru nākamo punktu uz dotās taisnes atliekam aiz iepriekšējā uz to pašu pusi, uz kuru atrodas punkts B no punkta A).

Atliekam punktu $C_1$ tā, lai $BC_1=BA$, tad $AC_1=2$ cm.

Punktu $C_2$ atliekam tā, lai $C_1C_2=C_1A$, tad $AC_2=4$ cm.

Punktu $C_3$ atliekam tā, lai $C_2C_3=C_2A$, tad $AC_3=6$ cm.

Līdzīgi turpinot, atzīmējam $C_4$, $C_5$, $C_6$; $AC_6=64$ cm.

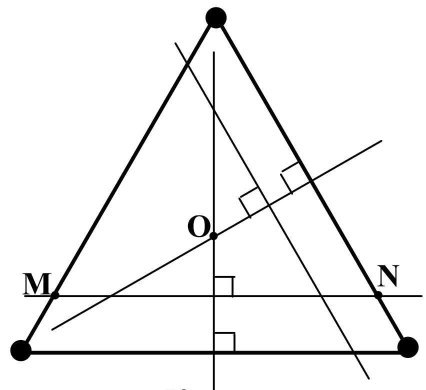
Beidzot atliekam uz taisnes punktu $C_7$ tā, lai

$C_6C_7=C_3C_5=32$ cm–8 cm =24 cm; tad

$AC_7=AC_6+C_6C_7=64$ cm+24 cm=88 cm.

Pierādīsim, ka uzdevums nav atrisināms, ja cirkuli izmanto mazāk nekā septiņas reizes. Sākumā mums ir dots 1 cm garš nogrieznis. Garākais nogrieznis, ko varam iegūt no šī 1 cm garā nogriežņa, vienu reizi lietojot cirkuli, ir 2 cm garš. Turpinot tālāk, garākais nogrieznis, ko var iegūt no šī 2 cm garā nogriežņa, vienu reizi lietojot cirkuli, ir iegūstams, 2 cm garo nogriezni dubultojot; tā garums ir 4 cm. Līdzīgi iegūstam, ka garākais nogrieznis, kādu var iegūt no 1 cm gara nogriežņa, 6 reizes lietojot cirkuli, ir $2^6$ jeb 64 cm garš. Tātad ar seškārtēju cirkuļa lietošanu 88 cm garš nogrieznis nav iegūstams.

**1.4.** Risinājums. Regulāra trijstūra centrs ir tā augstumu krustpunkts. Novelkam kādai trijstūra malai paralēlu taisni, kas krusto abas pārējās malas traipu nenosegtos punktos M un N. Konstruējam nogriežņa MN vidusperpendikulu. Tas ir trijstūra augstums (pierādiet to patstāvīgi). Līdzīgi konstruējam otru augstumu. To krustpunkts ir trijstūra centrs O (skat. 52.zīm.).




**52.zīm.**

**1.5.** Pierādījums. Padomāsim, kādam jābūt rezultātam, ja Juris maina tikai vienu zīmi, piemēram, "+a" pārveido par "-a". Gala rezultātam tādā gadījumā jāmainās par pārskaitli 2a. Līdzīgi arī, mainot zīmes vairāku skaitļu priekšā, rezultātam jāmainās par pārskaitli. Tāpēc abi rezultāti – gan 16, gan 21 – nevar būt pareizi. Mēs pat varam noteikt, kurš no zēniem noteikti ir kļūdījies. Pieņemsim, ka Andris visas zvaigznītes aizvietojis ar "+". Tad summai jābūt

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Spriežot kā iepriekš, redzam, ka jebkurā gadījumā, arī tad, ja dažas zvaigznītes aizvieto ar "-" zīmi, jāiznāk nepāra skaitlim. Tātad Andris noteikti ir kļūdījies. Vai Juris ir kļūdījies, mēs nevaram pateikt, jo rezultātu 21 ir iespējams iegūt. Piemēram,

$$1+2+3+4-5+6-7+8+9=21.$$

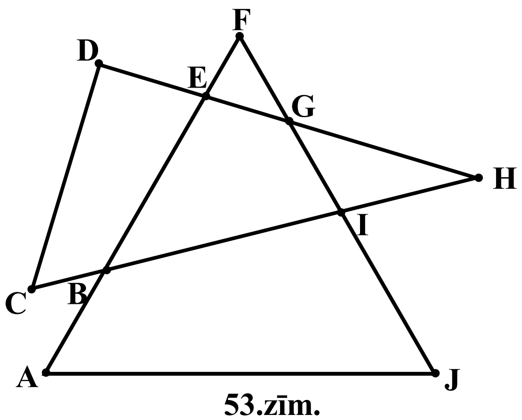
## 2. nodarbības atrisinājumi

**2.1.** Atbilde. 317.

Risinājums. Vispirms pieņemsim, ka meklējamais skaitlis ir pozitīvs.
Ja meklējamais skaitlis ir viencipara skaitlis, tad šim skaitlim pieskaitot tā ciparu summu, iegūstam skaitli, kas nepārsniedz 9+9=18.
Ja meklējamais skaitlis ir divciparu skaitlis, tad iegūstam summu, kas nepārsniedz 99+9+9=117.
Ja meklējamais skaitlis ir četrciparu skaitlis vai satur vēl vairāk ciparu, tad šim skaitlim pieskaitot tā ciparu summu iegūstam vismaz 1000+1=1001.
Tātad meklējamais skaitlis ir trīsciparu skaitlis. Ja tā pirmais cipars ir 1 vai 2, tad summa nepārsniedz 299+2+9+9=319;
ja tā pirmais cipars ir 4 vai lielāks, tad minētā summa ir lielāka par 400. Tātad meklējamā skaitļa pirmais cipars ir 3. skaitlis.
Ja otrais cipars ir 0, tad summa nepārsniedz 309+3+9=321.
Ja otrais cipars ir 3 vai lielāks, tad šī summa pārsniedz 330.
Tātad meklējamā skaitļa otrais cipars ir 1 vai 2. Pārbaudot visus skaitļus, kuru pirmais cipars ir 3, bet otrais 1 vai 2, redzam, ka der tikai 317.
Ja meklējamais skaitlis ir negatīvs viencipara skaitlis, tad, šim skaitlim pieskaitot tā ciparu summu, iegūstam 0. Ja tas ir negatīvs n-ciparu skaitlis, kur n>1, tad šī summa ir
$-a_1a_2\dots a_n+(a_1+a_2+\dots+a_n)=$
$=-a_1\cdot 10^{n-1}-a_2\cdot 10^{n-2}-\dots-a_{n-1}\cdot 10-a_n+a_1+\dots+a_n=$
$=a_1(1-10^{n-1})+a_2(1-10^{n-2})+\dots+a_{n-1}(1-10)>0.$
Tātad vienīgais skaitlis ar uzdevumā doto īpašību ir 317.

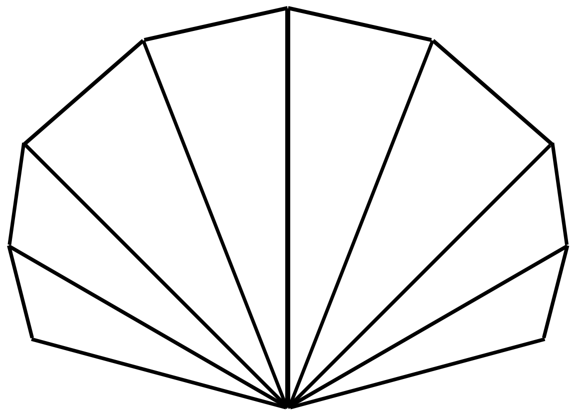
**2.2.** Atbilde. Kopējais laušanu skaits ir 199.
Risinājums. Ievērosim, ka neatkarīgi no laušanas kārtības pēc katras laušanas šokolādes gabalu skaits palielinās par 1. Sākumā bija viens gabals – lielā tāfelīte, beigās jāiegūst 200 gabali, tātad jālauž 199 reizes.
Laužot 199 reizes, mērķi var sasniegt, piemēram, tā: vispirms laužot 9 reizes, tāfelīti sadala 10 rindiņās pa 20 kvadrātiņiem katrā, bet pēc tam katru no šīm 10 rindiņām, laužot 19 reizes, sadala 20 kvadrātiņos. Tātad kopējais laušanu skaits ir 9+10·19=199.

**2.3.** Atbilde. Jā, eksistē (skat. 53.zīm.).




**53.zīm.**

Risinājums. Desmitstūris ABCDEFGHIJ ir pārklāts ar trijstūriem AFJ un DCH. Ievērosim, ka šis desmitstūris ir ieliekts. Izliektam desmitstūrim mazākais trijstūru skaits, ar kuru to var pārklāt, neviena trijstūra nevienam punktam neatrodoties ārpus desmitstūra, ir 8. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 54. zīmējumā.



**54.zīm.**

Pierādīsim, ka ar mazāk nekā 8 trijstūriem izliekts desmitstūris nav pārklājams.
Desmitstūra iekšējo leņķu summa ir $180^0 \cdot (10-2) = 180^0 \cdot 8$.
Tā kā desmitstūris ir izliekts, tad katrs tā leņķis ir mazāks par $180^0$, un katru tā leņķi noteikti pārklāj trijstūru leņķi ar virsotnēm attiecīgā desmitstūra virsotnē. Tātad pārklāšanai izmantoto trijstūru iekšējo leņķu summa nevar būt mazāka par $180^0 \cdot 8$, un tā kā katra trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180^0$, tad jābūt vismaz 8 trijstūriem.
Ieliektam četrstūrim pasvītrotais apgalvojums nav spēkā. Tā, piemēram, 53. zīmējumā atvērto leņķi pie virsotnes E pārklāj nevis trijstūru iekšējie leņķi, bet gan apgabali pie trijstūru malām. Tātad pasvītrojumā mēs izmantojam nosacījumu, ka desmitstūris ir izliekts.

**2.4.** Atbilde. Nē, nevar.
Pierādījums. Pierādījumā izmantosim šādu lemmu.

**Lemma**. Veselu pozitīvu skaitli dalot ar 3, iegūst tādu pašu atlikumu, kādu dod šī skaitļa ciparu summas dalījums ar 3.

Pieņemsim, ka lemma jau pierādīta. Tad redzam, ka skaitlis, kura cipari ir 14 vieninieki un 13 nulles, dalot to ar 3, dod atlikumā 2. Pierādīsim, ka neviena vesela skaitļa kvadrāts, dalot ar 3, nedod atlikumā 2.

Tiešām, ja vesels skaitlis n dalās ar 3, tad to var uzrakstīt formā $n=3t$, kur t ir vesels skaitlis; tad $n^2=9t^2$, un $9t^2$ dalās ar 3.

Ja n, dalot ar 3, dod atlikumā 1, tad $n=3t+1$, kur t ir vesels skaitlis;

tad $n^2=9t^2+6t+1=3(3t^2+2t)+1$, tātad $n^2$, dalot ar 3, dod atlikumā 1.

Beidzot, ja n, dalot ar 3, dod atlikumā 2, tad $n=3t+2$, kur t ir vesels skaitlis;

tad $n^2=9t^2+12t+4=3(3t^2+4t+1)+1$, tātad $n^2$, dalot ar 3, dod atlikumā 1.

Esam apskatījuši visas iespējas. Redzam, ka $n^2$, dalot to ar 3, dod atlikumā vai nu 1, vai 0 (t.i., dalās bez atlikuma).

Mums atliek pierādīt lemmu.

Padomāsim, ko nozīmē, piemēram, pieraksts 1978. Protams, tas nenozīmē ciparu 1, 9, 7, 8 reizinājumu, bet gan

$1\cdot10^3+9\cdot10^2+7\cdot10^1+8$.

Aplūkosim tagad skaitli ar cipariem $a_1$, $a_2$,… $a_n$ (no kreisās uz labo); tādu skaitli pieraksta kā $a_1a_2\ldots a_n$. Acīmredzot

$a_1a_2\ldots a_n=a_1\cdot10^{n-1}+a_2\cdot10^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot10^1+a_n=$

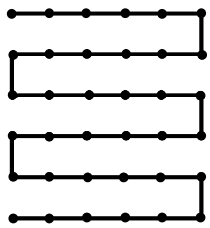
$=(a_1+\ldots+a_n)+a_1(10^{n-1}-1)+a_2(10^{n-2}-1)+\ldots+a_{n-1}(10-1)=$

$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_1\cdot\underbrace{99...9}_{n-1}+a_2\cdot\underbrace{99...9}_{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot9.$

Tā kā visi pēdējie saskaitāmie dalās ar3, tad tiešām $a_1a_2\ldots a_n$, dalot to ar 3, dod tādu pašu atlikumu, kādu dod $a_1+a_2+\ldots+a_n$. Lemma pierādīta.

**2.5.** Atbilde. Mazākais posmu skaits ir 11.

Pierādījums. Vispirms pierādīsim, ka šādai lauztai līnijai iespējami 11 posmi. Tas redzams 55. zīmējumā.



**55.zīm.**

Tagad pierādīsim, ka mazāk par 11 posmiem šādai līnijai nevar būt.

Pierādījuma būtība ir šādā lemmā.

**Lemma**. Lauztā līnijā, kas savieno visus punktus, ir vismaz seši vienā virzienā paralēli vērsti posmi.

Pieņemsim, ka horizontāli un vertikāli vērstu paralēlu posmu nav vairāk par 5. Tad ir vismaz viena vertikāla punktu kolonna, kas nesatur nevienu lauztās līnijas posmu, un vismaz viena horizontāla punktu rinda, kas arī nesatur nevienu lauztās līnijas posmu (jo gan horizontāļu, gan vertikāļu ir 6, bet, pēc pieņēmuma, katrā virzienā neiet vairāk par 5 posmiem). Taču tad punktu, kas atrodas šīs kolonnas un rindas krustojumā, lauztā līnija neskar; šī pretruna ļauj uzskatīt, ka lemma ir pierādīta.

Pieņemsim, piemēram, ka aplūkojamajā lauztajā līnijā ir 6 vertikāli posmi. Starp katriem diviem vertikāliem posmiem jābūt kādam horizontālam posmam. Tātad posmu kopskaits nav mazāks par 6+5=11.

**2.6.** Risinājums. Viens no likumiem varētu būt šāds:

a) rindas pirmais loceklis ir 2;

b) katru nākamo virknes locekli aprēķina šādi: pareizina iepriekšējo ar $\frac{3}{2}$ un ņem lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz iegūto. (Matemātikā lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x, apzīmē ar [x] un lasa: antjē x.)

Ja virknes veidošanas likums ir šāds, tad tās nākamie locekļi būtu 141, 211, 316, 474,… . Protams, tikai pirmie virknes locekļi nedod pamatu apgalvot, ka, piemēram, nākamie locekļi nevarētu būt 1, 1, 1, 1,… vai kādi citi. Tomēr nosacījumi a) un b) ir viens no vienkāršākajiem dotās virknes likumiem, kas atbilst dotajam virknes sākuma fragmentam.

Pieņemsim, ka virkne tiek veidota pēc likuma, kas izriet no nosacījumiem a) un b). Pamēģiniet pierādīt šādus apgalvojumus:

a) virkne satur bezgalīgi daudz nepāra skaitļu;

b) virkne satur bezgalīgi daudz pāra skaitļu.

(Otrais apgalvojums ir daudz grūtāk pierādāms.)

Nav zināms, vai šajā virknē ir cik patīk gari posmi, kas sastāv tikai no nepāra skaitļiem. (Vārdi “cik gari patīk” jāsaprot tā: ir gabali ar šādu īpašību, kuru garums nav mazāks par 100, ir gabali ar šādu īpašību, kuru garums nav mazāks par 1000, utt.).

**2.7.** Pierādījums. Atliksim daudzstūra malas to dabiskajā kārtībā vienu aiz otras uz taisnes (skat. 56.zīm.).


**56.zīm.**

Izveidosies nogrieznis AB ar garumu P; atliktās daudzstūra malas ir $AA_1, A_1A_2, A_2A_3,\ldots, A_{n-1}A_n, A_nB$.

Atzīmēsim arī punktus S un T, kas sadala AB trīs vienāda garuma nogriežņos.

Atcerēsimies, ka

a) daudzstūrim ir vismaz 3 malas,

b) katras malas garums mazāks par pārējo malu garumu summu, tātad mazāks par $\frac{P}{2}$. (Ja tas būtu lielāks par $\frac{P}{2}$, tad pārējo malu garumu summa būtu mazāka par $\frac{P}{2}$).

Šeit var būt vairāki gadījumi:

1) S sakrīt ar kādu no malu galapunktiem $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tad par meklējamiem nogriežņiem var ņemt AS un SB. Tiešām,

$$|SB| - |AS| = \frac{2P}{3} - \frac{P}{3} = \frac{P}{3}.$$

2) S nesakrīt ne ar vienu no punktiem $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Aplūkosim vairākus apakšgadījumus:

$2^1$) nogriežņa ST iekšpusē atrodas kāds punkts $A_i$. Tad par meklējamiem nogriežņiem var ņemt $AA_i$ un $A_iB$. Tiešām, ja Ai ir ST viduspunkts, tad

$|AA_i| - |BA_i| = 0$.

Ja $A_i$ ir tuvāk punktam A nekā punktam B, tad

$\frac{P}{3} < |AA_i| < \frac{P}{2} < |A_iB| < \frac{2P}{3}$, tāpēc

$0 < |A_iB| - |AA_i| < \frac{2P}{3} - \frac{P}{3} = \frac{P}{3}$.

$2^2$) Nogriežņa ST iekšpusē nav punktu $A_i$. Tad katrs punkts $A_i$ atrodas vai nu pa kreisi no S, vai pa labi no T (gadījumu, kad kāds no punktiem $A_i$ sakrīt ar T, apskata tāpat kā 1) gadījumu).

Nav tāda stāvokļa, ka <u>visi</u> punkti $A_i$ pieder vai nu tikai nogrieznim AS vai tikai nogrieznim TB, jo tad viena daudzstūra mala būtu garāka par $\frac{2P}{3}$. Tāpēc daži punkti $A_i$ atrodas pa kreisi no S, citi - pa labi no T. Apzīmēsim ar M to punktu $A_i$, kas ir pa kreisi no punkta S un atrodas tam vistuvāk, bet ar n - to punktu $A_i$, kas ir pa labi no punkta T un atrodas tam vistuvāk. Tad MN ir daudzstūra mala (jo starp M un N citu punktu $A_i$ nav), tāpēc $|MN| < \frac{P}{2}$; bez tam $|MN| > \frac{P}{3}$, jo ST ietilpst nogriezni MN. Tad MN var ņemt par vienu no meklētajiem nogriežņiem, bet otru izveidot no visām pārējām malām.

**2.8.** <u>Pierādījums</u>. Apzīmējam rūtiņās ierakstītos veselos skaitļus, kā parādīts 57. zīmējumā,

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

**57.zīm**

bet katrā rindiņā, kolonnā vai diagonālē ierakstīto skaitļu summu ar s. Tad

$$
\begin{array}{ll}
(1) & a+b+c=s; \\
(2) & d+e+f=s; \\
(3) & g+h+i=s; \\
(4) & a+d+g=s; \\
(5) & b+e+h=s; \\
(6) & c+f+i=s; \\
(7) & a+e+i=s; \\
(8) & c+e+g=s.
\end{array}
$$

Saskaitot (1), (2) un (3), iegūstam

$$(9) \quad a+b+c+d+e+f+g+h+i=3s;$$

saskaitot (2), (5), (7) un (8), iegūstam

$$(10) \quad (a+b+c+d+e+f+g+h+i)+3e=4s.$$

Ievietojot (10) vienādībā (9), iegūstam
$3s+3e=4s$, t.i., $s=3e$, un
tā kā e ir vesels skaitlis, tad s dalās ar 3.

**2.9.** Atbilde. Šādas kopas ir {0;1;2}, {0;3;6}, {0;9;18}, {0;27;54}.

Risinājums. Parādīsim ar piemēru, kā atrast patvaļīga skaitļa izteikšanas paņēmienu ar šo kopu elementiem. Izteiksim skaitli 70!

1) Cik reizes skaitlis 70 satur skaitli 27?
70:27=2, atlikumā 16.
70 satur 27 divas reizes, tāpēc no 4. kopas izvēlamies saskaitāmo $54=2\cdot27$.

2) Cik reizes atlikums 16 satur skaitli 9?
16:9=1, atlikums 7.
16 satur 9 vienu reizi, tāpēc no 3. kopas izvēlamies saskaitāmo $9=9\cdot1$.

3) Cik reizes atlikums 7 satur skaitli 3?
7:3=2, atlikums 1.
No 2. kopas izvēlamies saskaitāmo $6=3\cdot2$.

4) Acīmredzot, no 1. kopas jāizvēlas saskaitāmais 1. Tātad
$70=54+9+6+1$.

Ievērojiet šī uzdevuma sakaru ar tā saukto trijnieku skaitīšanas sistēmu! Mēs ikdienā lietojam decimālo skaitīšanas sistēmu: "bāzes skaitļi" ir 1, 10, 100, 1000,..., un katru skaitli var iegūt, pareizinot dažus no šiem bāzes skaitļiem ar kādu no cipariem 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 un rezultātus saskaitot. Piemēram,

$$
\begin{aligned}
1978 &= 1\cdot1000+9\cdot100+7\cdot10+8\cdot1, \\
677 &= 6\cdot100+7\cdot10+7\cdot1, \\
3001 &= 3\cdot1000+0\cdot100+0\cdot10+1\cdot1.
\end{aligned}
$$

Tāpat var apskatīt skaitīšanas sistēmu, kurā bāzes skaitļi ir 1, 3, 9, 27, 81,... – trijnieka pakāpes, bet cipari ir 0, 1 un 2. Intuitīvi skaidrs, ka katru skaitli var pierakstīt arī šādā skaitīšanas sistēmā. Būtībā, mūsu uzdevuma risināšanas veids nav nekas cits kā skaitļa 70 izsacīšana trijnieku skaitīšanas sistēmā. 70 pierakstām kā $2121_3$ (indekss 3 norāda, ka lietota trijnieku sistēma). Aprakstītais piemērs arī parāda, kā atrast katra skaitļa N pierakstu jebkurā skaitīšanas sistēmā (ar bāzi 2, 4, 5 utt.).

Iesakām arī mēģināt patstāvīgi atbildēt uz šādiem jautājumiem:

a) vai bez jau uzrādītās ir vēl kāda cita kopu sistēma ar prasītajām īpašībām?

b) ja atļauts sastādīt n kopas pa m skaitļiem katrā, tad, kādam jābūt vislielākajam skaitlim N, lai visus skaitļus 0, 1,..., N varētu izsacīt kā n saskaitāmo summu, kur katrs saskaitāmais ir no savas kopas? (Ievērojiet, ka $80=81-1=3^4-1$!).

**2.10.** Atbilde. Vislielākā dalījuma vērtība ir 1000.

Risinājums. Apzīmēsim četrciparu skaitli ar $\overline{abcd}$. Tad

$$\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}=\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}=1+\frac{9c+99b+999a}{a+b+c+d}.$$

Acīmredzot, dalījums būs vislielākais, ja d=0. Tad

$$\div=1+\frac{9c+99b+999a}{a+b+c+d}=1+\frac{9c+9b+9a+90b+990a}{a+b+c}=1+9+\frac{90b+990a}{a+b+c}.$$

Šī izteiksme būs vislielākā, ja c=0. Tad

$$\div=10+\frac{90b+990a}{a+b}=10+\frac{90b+90a+900a}{a+b}=10+90+\frac{900a}{a+b}.$$

Šī izteiksme būs vislielākā, ja b=0. Tad

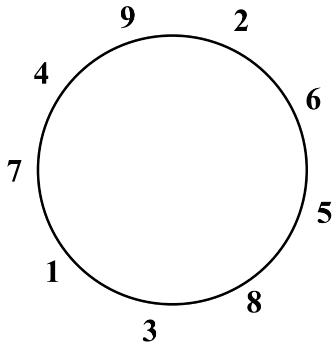
$$\div=10+90+\frac{900a}{a}=1000.$$

Tātad vislielākā dalījuma vērtība ir 1000; tā iegūstama tikai tad, ja skaitļa 3 pēdējie cipari ir 0.

Centieties patstāvīgi atbildēt uz jautājumu: kāda ir vismazākā šī dalījuma vērtība?

## 3. nodarbības atrisinājumi

**3.1.** Atbilde. To var izdarīt, piemēram, šādi (skat. 58.zīm.):




**58.zīm.**

(1 un 3, izvietojot pa apli, atradīsies blakus).

*Pamēģiniet paši pierādīt, ka izvietot minētos skaitļus pa apli tā, lai nekādu divu blakus esošu skaitļu summa nedalītos ar 2, nav iespējams. Pamēģiniet atbildēt arī uz šādiem jautājumiem:
a) Pie kādiem naturāliem n skaitļus 1, 2, 3,…, n var tā izvietot pa apli, ka ne divu, ne triju blakus esošu skaitļu summa nedalās ar 3?
b) Pie kādiem naturāliem pāra skaitļiem n skaitļus 1, 2, 3,…, n var tā izvietot pa apli, ka ne divu blakus esošu, ne divu diametrāli pretēju skaitļu summa nedalās ar 3?

**3.2.** Atbilde. 2666666.
Risinājums. Noskaidrosim, cik n 1 līdz 1000000 ir tādu skaitļu, kas dalās ar 2. Ar 2 dalās katrs otrais skaitlis, tātad jānoskaidro, cik blakus esošu skaitļu pāru bez kopīgiem elementiem ir no 1 līdz 1000000:
1000000:2=500000.
Atceroties, ka ar 3 dalās katrs trešais skaitlis, redzam, ka no 1 līdz 1000000 ir
1000000:3=333333 (atlikumā 1)
tādu skaitļu, kas dalās ar 3.
Līdzīgi noskaidrojam, ka ir 200000 tādu skaitļu, kas dalās ar 5.
Tomēr būtu rupja kļūda domāt, ka summa
S=500000+333333+200000=1033333
ir to skaitļu skaits, kuri dalās ar 2, 3 vai 5; šī summa ir lielāka par 1000000! Tā tas ir tāpēc, ka daudzi skaitļi (piemēram, visi, kas dalās ar 6) ieskaitīti summā S divas reizes (gan kā skaitļi, kas dalās ar 2, gan kā skaitļi, kas dalās ar 3).
Padomāsim, kā izveidojusies S. Tajā pa vienai reizei ieskaitīti skaitļi, kas dalās tikai ar vienu no skaitļiem 2, 3 un 5; Pa divām reizēm ieskaitīti skaitļi, kas dalās ar diviem no skaitļiem 2, 3 un 5; trīs reizes ieskaitīti skaitļi, kas dalās ar 2, 3 un 5.
Vispirms aplūkosim skaitļus, kas summā S ieskaitīti 2 reizes.
Tā kā
1000000:6=166666 (atlikumā 4),

tad ir 166666 tādu skaitļu, kas dalās ar 2 un 3. Līdzīgi iegūstam, ka ir 100000 tādu skaitļu, kas dalās ar 2 un 5, un 66666 tādu skaitļu, kas dalās ar 3 un 5. Izveidojam summu $S_1$.

$S_1$=S-166666-100000-66666=700001.

Summā $S_1$ skaitļi, kas dalās tikai ar vienu no skaitļiem 2, 3 un 5, vai tikai ar diviem no tiem, ieskaitīti vienu reizi. Turpretī skaitļi, kas dalās ar 2, 3 un 5 reizē, summā $S_1$ vispār nav ieskaitīti; summā S tie bija ieskaitīti 3 reizes, un katrs no tiem trīs reizes tika izņemts no S, veidojot $S_1$. Skaitļu, kas dalās ar 2, 3 un 5 reizē, ir 33333. Tātad skaitļu, kas dalās ar 2, 3 un 5 ir

$S_1$+33333=733334.

Tāpēc skaitļu, kas nedalās ne ar 2, ne 3, ne 5, ir

1000000-733334=266666.

**3.3.** Atbilde. 90·81·72·63·54.

Risinājums. Pavisam 5 divciparu skaitļus no dotajiem cipariem var izveidot galīga skaita veidos. Tāpēc noteikti vienā (vai dažos) gadījumos to reizinājums sasniegs vislielāko iespējamo vērtību.

Kādi varētu būt tie divciparu skaitļi, kuru reizinājums ir lielākais iespējamais?

Pirmkārt, katrā no šādiem divciparu skaitļiem pirmajam ciparam jābūt lielākam par otro. Ja tā nebūtu, tad, mainot šos ciparus vietām, mēs palielinātu pašu divciparu skaitli un arī reizinājumu.

Kā aplūkojamo divciparu skaitļu pirmie cipari jāizmanto lielākie cipari 9, 8, 7, 6, 5, bet kā otrie cipari 4, 3, 2, 1, 0, jo, izvēloties pirmo ciparu, mēs nosakām, kurš desmitā – no 0 līdz 9, no 10 līdz 19, no 20 līdz 29,…, no 90 līdz 99 – atradīsies mūsu divciparu skaitlis, un jācenšas, lai tas atrastos pēc iespējas lielākos desmitos.

Atliek noskaidrot vienīgi, kuru desmitu ciparu ar kuru vienu ciparu jākombinē, veidojot divciparu skaitļus.

**Lemma**. Ja a>b un c>d (a, b, c, d - cipari), tad

$$\overline{ad} \cdot \overline{bc} > \overline{ac} \cdot \overline{bd} \qquad (1)$$

(ar $\overline{xy}$ apzīmēts divciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir x, bet otrais – y).

Tiešām, no

⇔(10a+d)(10b+c)>(10a+c)(10b+d) ⇔

⇔100ab+10ac+10bd+cd>100ab+10ad+10bc+cd⇔

⇔ac+bd-ad-bc>0⇔

⇔ (a-b)(c-d)>0,

un pēdējā nevienādība ir pareiza, ja a>b un c>d. No lemmas seko, ka maksimālā reizinājuma gadījumā lielākajam desmitu ciparam atbilst mazākais vienu cipars – pretējā gadījumā, mainot vienu ciparus vietām, var iegūt lielāku reizinājumu.

Tātad maksimālais iespējamais reizinājums ir

$$90 \cdot 81 \cdot 72 \cdot 63 \cdot 54.$$

**3.4.** Atbilde. 1968.

Risinājums. Viens no iespējamiem šī uzdevuma risinājumiem ir līdzīgs 17. uzdevuma risinājumam. Iesakām lasītājam tādu risinājumu atrast patstāvīgi. Šeit apskatīsim citu metodi.

Pavisam paralēlskaldnī ir

10x20x30=6000 kubiņu.

Noņemot nost ārējo slāni, tā izmēri kļūst 8, 18 un 28, tātad tas satur

8x18x28=4032 kubiņus.

Tātad noņemto kubiņu skaits ir

6000-4032=1968.

Bet noņemtie kubiņi ir tieši tie, kuriem vismaz viena skaldne ir nokrāsota.

**3.5.** Atbilde. Tramvaji atstāj galapunktu ik pēc $5\frac{5}{6}$ minūtēm.

Risinājums. Vispirms atzīmēsim, ka risinājums "ik pēc $\frac{5+7}{2}=6$ minūtēm" noteikti nav pareizs. Tiešām, iedomāsimies, ka gājējs iet gandrīz ar tādu pašu ātrumu, kāds ir tramvajam, piemēram, tā, ka ik 10 minūtēs sastop tramvaju, bet viņu panāk tikai viens tramvajs 3 stundās. Skaidrs, ka tramvaji atiet no galapunkta ar intervālu aptuveni

10 min.·2=20 min.

Risinot, kā iepriekš, iznāktu, ka šis intervāls ir 1 h 35 min.

Tagad dosim pareizu atrisinājumu.

Attālumu starp diviem tramvajiem, kas pa līniju kursē viens aiz otra, apzīmēsim ar s m, tramvaja ātrumu ar x m/min., bet gājēja ātrumu ar y m/min. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka

$$\frac{s}{x+y}=5, \qquad \frac{s}{x-y}=7.$$

Mūs interesējošais laika intervāls ir $\frac{s}{x}$ (min.).

No dotajiem vienādojumiem

$$\frac{x+y}{s}=\frac{1}{5}, \qquad \frac{x-y}{s}=\frac{1}{7}.$$

Saskaitot šīs izteiksmes, iegūstam

$$\frac{2x}{s}=\frac{12}{35}$$

un

$$\frac{s}{x} = 5\frac{5}{6}(\text{min.}).$$

Tātad tramvaji atstāj galapunktu ik pēc $5\frac{5}{6}$ minūtēm.

**3.6.** Risinājums. Apzīmēsim šahistus vietu iegūšanas kārtībā ar A, B, C, D, E. Ar šiem pašiem burtiem apzīmēsim viņu iegūto punktu skaitu. Punktus ierakstīsim tabulā (skat. 59.zīm.).

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **Punkti** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| **B** | 1 | | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 2,5 |
| **C** | 0 | 0,5 | | 0,5 | 1 | 2 |
| **D** | 0 | 0,5 | 0,5 | | 0,5 | 1,5 |
| **E** | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 | | 1 |

**59.zīm.**

No tā, ka A ne reizi nespēlēja neizšķirti, bet B ne reizi nezaudēja, seko, ka spēlētājs B uzvarēja spēlētāju A. To atzīmējam, ierakstot tabulā rindiņas B un kolonnas A krustojumā 1, bet rindiņas A un kolonnas B krustojumā 0. Līdzīgi atzīmēsim citu partiju rezultātus.

Ja A būtu zaudējis vēl kādu partiju, tad A≤2. Tad no tā, ka visi spēlētāji ieguvuši dažādu punktu skaitu, sekotu, ka

B≤1,5, C≤1, D≤0,5 un E≤0, tātad

A+B+C+D+E≤5.

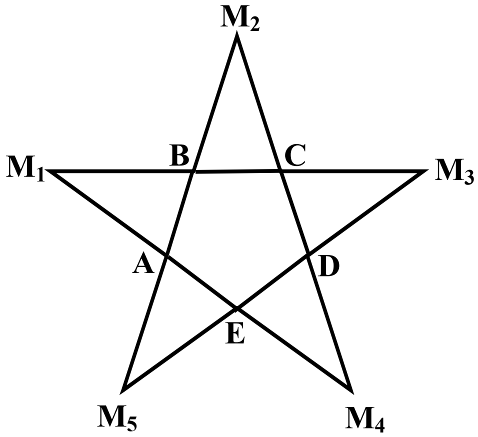
Bet turnīrā pavisam izspēlētas 10 partijas, tātad

A+B+C+D+E=10.

Iegūta pretruna, tātad A visas citas partijas uzvarējis, un A=3. Tāpēc B≤2,5. Bet B pret C, D un E ieguvis vismaz 1,5 punktus, jo nevienam no tiem nav zaudējis; kopā ar pret A iegūto punktu tas ir 2,5 punkti. Tāpēc B ar C, D un E spēlējis neizšķirti (ja B kādu no tiem būtu uzvarējis, viņam būtu vismaz 3 punkti). Tātad C, D un E ar A un B spēlējuši vienādi, un viņu vietu kārtību nosaka tikai viņu savstarpējās spēles.

Aplūkosim D. Tā kā D ne reizi neuzvarēja, tad "mikroturnīrā" CDE viņš ieguvis 1, 0,5 vai 0 punktus. Ja D būtu zaudējis pret E, tad viņš būtu palicis aiz E, Tāpēc D ar E spēlējis neizšķirti. D un E ieguvuši atšķirīgu punktu skaitu; šī atšķirība varēja rasties tikai partijās ar C. Tātad C uzvarējis pret C, bet ar D spēlējis neizšķirti.

**3.7.** Pierādījums. Piecstūra ABCDE iekšējo leņķu summa ir $180^0(5-2)=540^0$. (Skat. 60.zīm.).




**60.zīm.**

Tāpēc

$\angle M_1BA+\angle M_2CB+\angle M_3DC+\angle M_4ED+\angle M_5AE=$

$=(180^0-\angle ABC)+(180^0-\angle BCD)+(180^0-\angle CDE)+(180^0-\angle DEA)+(180^0-\angle EAB)=$

$=5\cdot180^0-540^0=360^0$.

Līdzīgi

$\angle M_1AB+\angle M_2BC+\angle M_3CD+\angle M_4DE+\angle M_5EA=360^0$.

Tad

$\angle AM_1B+\angle BM_2C+\angle CM_3D+\angle DM_4E+\angle EM_5A=$

$=(180^0-\angle M_1AB-\angle M_1BA)+(180^0-\angle M_2BC-\angle M_2CB)+(180^0-\angle M_3CD-\angle M_3DC)+$

$+(180^0-\angle M_4DE-\angle M_4ED)+(180^0-\angle M_5EA-\angle M_5AE)=$

$=5\cdot180^0-(\angle M_1BA+\angle M_2CB+\angle M_3DC+\angle M_4ED+\angle M_5AE)-$

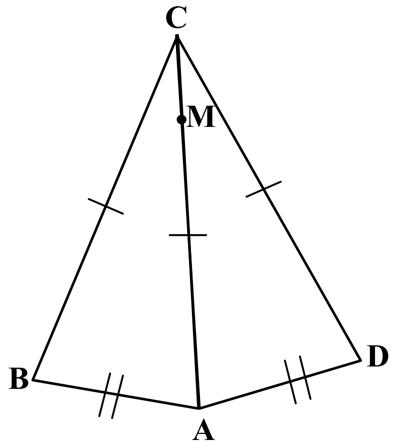
$-(\angle M_1AB+\angle M_2BC+\angle M_3CD+\angle M_4DE+\angle M_5EA)=$

$=5\cdot180^0-360^0-360^0=180^0$.

Iesakām lasītājam patstāvīgi vispārināt šo rezultātu zvaigznēm ar citu virsotņu skaitu.

**3.8.** Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Palūkosim piemēru (skat. 61.zīm.).




**61.zīm.**

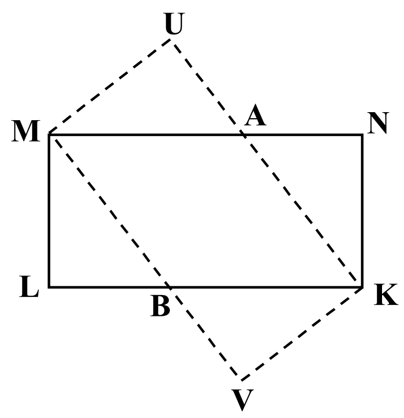
Zīmējumā

$|AB| = |AD| = a$, $|BC| = |AC| = |DC| = b$.

Tad ABCD perimetrs ir 2a+2b, bet attālumu līdz A, B, C, D summa ir $b+2|MB|$. Ja punkts M pa diagonāli AC tuvojas virsotnei C, tad MB tuvojas (matemātiķi saka – tiecas uz) b. Ja sākotnējais četrstūris izvēlēts, piemēram, tā, ka b=3a, tad tā perimetrs ir 8a.

Ja M izvēlēts uz AC tā, ka $|BM| = 2{,}6a$, tad $b+2|MB| = 3a+5{,}2a = 8{,}2a > 8a$, ko arī vajadzēja.

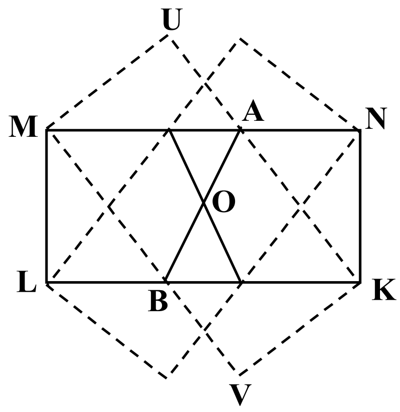
**3.9.** Risinājums. Noliekam plāksnīti uz papīra tā, lai tās vienas diagonāles galapunkti sakristu ar uzzīmētā taisnstūra divām virsotnēm, bet otras diagonāles galapunkti nesakristu, un apvelkam plāksnītes kontūru arī šajā stāvoklī (skat. 62.zīm. parādīts ar svītrlīniju).




**62.zīm.**

Var droši apgalvot, ka AB iet caur abu uzzīmēto taisnstūru kopējo centru O. Tiešām, izdarīsim centrālo simetriju ar centru O. Tad M un K, N un L, U un V mainīsies vietām. Tātad MN attēlosies kā KL, KU – kā MV, bet MN un KU

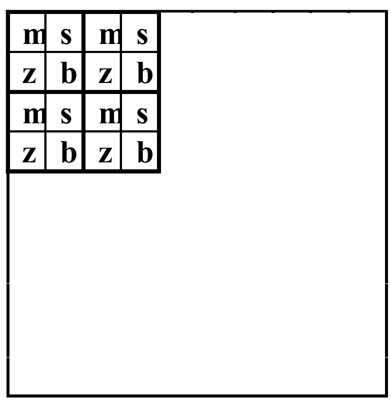
krustpunkts A – kā KL un MV krustpunkts B. Tas nozīmē, ka O ir punktu A un B simetrijas centrs, tātad AB iet caur O. Bez tam secinām, ka MA=MB.
Izpildot konstrukciju, pārliecināmies, ka AB īsāks nekā taisnstūra garākā mala, t.i., 20 cm. Tāpēc, izmantojot taisnstūri, var savienot punktus A un B ar taisnes nogriezni, kas iet caur O.
Novietojot vēlreiz plāksnīti tā, lai sākumā uzzīmētā taisnstūra virsotnes N un L sakristu ar plāksnītes virsotnēm, bet M un K nesakristu, novelkam otru tādu pašu līniju kā AB. Tās krustpunkts ar AB ir meklējamais centrs O (skat. 63.zīm.).




**63.zīm.**

Ieteicams lasītājiem izpētīt, kādai jābūt plāksnītes malu attiecībai, lai aprakstīto konstrukciju varētu realizēt (var gadīties, ka AB ir garāks par plāksnītes malu!). Kā rīkoties, ja AB ar plāksnītes palīdzību uzreiz nav novelkams? Kā darīt, ja plāksnīte ir kvadrāts?

**3.10.** Atbilde. Balto kvadrātiņu ir 2500.
Risinājums. Sadalīsim 1m x 1m lielo laukumu kvadrātos ar izmēriem 2cm x 2cm (skat. 64.zīm.).



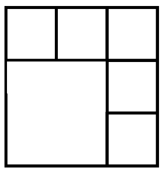

**64.zīm.**

Šādu kvadrātu pavisam ir 2500; katrā šādā kvadrātā ietilpst četri mazie kvadrātiņi. Skaidrs, ka visiem šiem četriem kvadrātiņiem jābūt dažādās krāsās, jo katriem diviem no tiem ir kopīga mala vai kopīga virsotne. Tātad katrā kvadrātā

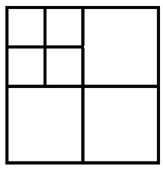
jābūt vienam baltam, vienam melnam, vienam sarkanam un vienam zaļam kvadrātiņam. Tāpēc balto kvadrātiņu skaits nevar būt citāds kā 2500.
No līdzšinējiem spriedumiem vēl neseko, ka kvadrātiņus vispār iespējams tā nokrāsot četrās krāsās, lai nekādiem diviem vienā krāsā nokrāsotiem kvadrātiņiem nebūtu kopīgu punktu; tas prasa īpašu pierādījumu. Līdz šim mēs esam pierādījuši tikai to, ka tad, ja kvadrātiņus var tā izkrāsot, tad balto kvadrātiņu skaits būs 2500. Tomēr viegli redzēt, ka tad, ja visi 2cm x 2cm kvadrāti tiek iekrāsoti vienādi (piemēram, apakšējais kreisais kvadrātiņš balts, apakšējais labais – melns, augšējais kreisais – sarkans, augšējais labais – zaļš), nekādiem diviem vienā krāsā nokrāsotiem kvadrātiņiem tiešām nav kopīgu punktu (nav ne kopīgas malas, ne virsotnes).

## 4. nodarbības atrisinājumi

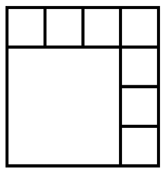
**4.1.** Atbilde. Kā kvadrātu var sagriezt 6, 7, vai 8 kvadrātos, parādīts 65., 66., 67. zīmējumos.



**65.zīm.**

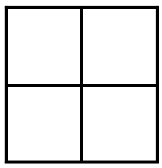


**66.zīm.**



**67.zīm.**

Risinājums. Padomājiet, kā varētu kvadrātu sagriezt 9, 10, 11,… daļās, kas visas būtu kvadrāti. Ievērosim, ka vienu kvadrātu var sagriezt četros, kā parādīts 68. zīmējumā.



**68.zīm.**

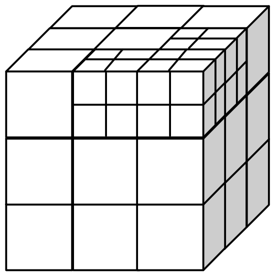
Izdarot šādu sagriešanu, no 1. kvadrāta iegūstam 4 kvadrātus, tātad kvadrātu skaits palielinās par 3. Tātad, ja mēs esam sagriezuši kvadrātu n kvadrātos, tad, sagriežot vienu no šiem kvadrātiem 4 jaunos kvadrātos, sākotnējais kvadrāts ir sagriezts n+3 kvadrātos. Tādējādi, sagriezuši kvadrātu 6 kvadrātos, mēs pakāpeniski varam to sagriezt 9, 12, 15,… kvadrātos, sagriezuši kvadrātu 7 kvadrātos, mēs varam to sagriezt arī 10, 13, 16, 19,… kvadrātos, bet, sagriezuši kvadrātu 8 kvadrātos, varam to sagriezt arī 11, 14, 17, 20,… kvadrātos.
No šejienes mēs redzam, ka kvadrātu noteikti var sagriezt n kvadrātos, ja $n \geq 6$. Viegli redzēt, ka kvadrātu var sagriezt 4 kvadrātos (skat. 68.zīm.).

Pierādiet paši patstāvīgi, ka kvadrātu nevar sagriezt 2, 3 vai 5 kvadrātos.

Ievērosim, ka starp kvadrātiem, kuros mēs sagriežam sākotnējo kvadrātu, ir arī kongruenti. Ļoti interesants un ļoti grūts uzdevums rodas, ja uzstāda vēl papildus prasību: starp griešanas rezultātā iegūtajiem kvadrātiem <u>nedrīkst</u> būt kongruenti. Ir pierādīts, ka kvadrātu var sagriezt 24 mazākos kvadrātos, starp kuriem nav kongruentu, bet nav zināms, vai skaitli 24 nevar aizstāt ar mazāku. Par šādi izmainītu uzdevumu skatīt:

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М., 1971., с 305 – 326.

Mūsu uzdevumu var vispārināt arī telpā. Uzdosim jautājumu: kādām veselām pozitīvām n vērtībām kubu var sagriezt n mazākos kubos (starp tiem var būt arī kongruenti)? Izrādās, ka kubu var sagriezt 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54 mazākos kubos (piemēram, 69. zīmējumā parādīts, kā kubu sagriezt 48 kubos).



**69.zīm.**

Padomājiet, kā sagriezt kubu 49, 50,…, 54 mazākos kubos, un no šejienes izdariet secinājumu, ka kubu var sagriezt n mazākos kubos, ja n≥48. Nav zināms, vai kubu var sagriezt 47 mazākos kubos, starp kuriem nav kongruentu. Pamēģiniet to pierādīt patstāvīgi.

**4.2.** <u>Atbilde</u>. Šādi skaitļi ir, piemēram, 200, 201, 202,…, 210.

<u>Risinājums</u>. Šādi skaitļi ir, piemēram, 200, 201, 202,…, 210, jo 200, 202, 204, 206, 208, 210 dalās ar 2, 201 un 207 – ar 3, 203 dalās ar 7, 205 – ar 5, 209 – ar 11.

Parādīsim, kā katram veselam pozitīvam n var atrast n pēc kārtas ņemtus skaitļus, starp kuriem nav neviena pirmskaitļa.

Apzīmēsim ar S visu veselo pozitīvo skaitļu no 1 līdz n+1 reizinājumu $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n(n+1)$. Skaidrs, ka S dalās gan ar 2, gan ar 3, gan ar 4,…, gan ar n, gan ar n+1.

Aplūkosim tagad n pēc kārtas ņemtus skaitļus:

S+2, S+3, S+4,…, S+n, S+n+1.

Pirmais no tiem dalās ar 2, otrais ar 3, trešais ar 4,…, (n-1)-ais ar n, n-tais ar n+1. Tāpēc tie neviens nav pirmskaitļi.

<u>Piezīme</u>. No tā vien, ka skaitlis dalās, piemēram, ar 3, neseko, ka tas <u>nav</u> pirmskaitlis, jo 3 dalās ar 3 un ir pirmskaitlis. Tomēr visi mūsu aplūkotie skaitļi

S+2, S+3, S+4,…, S+n, S+n+1 ir lielāki par norādītajiem skaitļiem, ar kuriem tie dalās, tātad nav pirmskaitļi.
Matemātikā visu veselo pozitīvo skaitļu no 1 līdz n reizinājumu sauc par "en faktoriālu" un pieraksta n!. Tātad S īsāk var pierakstīt kā (n+1)!.

**4.3.** Atbilde. Pēdējais cipars ir 1.
Risinājums. Aplūkojamā skaitļa pēdējo ciparu varēsim viegli noteikt, ja būsim noteikuši skaitļus $3^{1978}$, $4^{1978}$ un $6^{1978}$ pēdējos ciparus.
Noteiksim vispirms skaitļa $3^{1978}$ pēdējo ciparu. Pasekosim, kādi ir skaitļu $3^n$ pēdējie cipari, ja n=1, 2, 3,… . Viegli aprēķināt, ka
$3^1=3$,
$3^2=9$,
$3^3=27$,
$3^4=81$,
$3^5=243$,
$3^6=729$,
$3^7=2187$,
$3^8=6561$,
$3^9=19683$,
$3^{10}=59049$ utt.
Tāpēc rodas doma, ka pēdējie cipari periodiski atkārtojas ar periodu (3, 9, 7, 1). Nedaudz padomājot, viegli saprast, ka tā tiešām ir. Tā kā $3^{n+1}=3^n\cdot 3$, tad katras trijnieka nākamās pakāpes $3^{n+1}$ pēdējais cipars atkarīgs vienīgi no iepriekšējās pakāpes $3^n$ pēdējā cipara (atcerieties, kā reizina skaitļus $3^n$ un 3). Tā kā $3^n$ (n=1, 2, 3,…) pēdējo ciparu virkne iesākas ar 3, tad (ja šajā virknē vēl parādīsies 3) turpmākie tās locekļi būs tādi paši kā starp šiem abiem trijniekiem.
Tātad virkne tiešām ir periodiska ar periodu (3, 9, 7, 1); perioda garums ir 4. Mums jāatrod tās 1978-ais loceklis. Dalot 1978 ar 4, iegūstam 494, atlikumā 2. Tātad 494 reizes tajā atkārtosies pilns periods (3, 9, 7, 1), bet 495-ā periodā otrais loceklis ir mūsu meklētais pēdējais cipars; tas tātad ir 9.
Līdzīgi noskaidrojam, ka $4^{1978}$ pēdējais cipars ir 6, bet $6^{1978}$ pēdējais cipars – arī 6. Tātad aplūkojamās summas pēdējais cipars ir 1 (jo 9+6+6=21).

**4.4.** Atbilde. Virknē 1978-ajā vietā atrodas skaitlis 11.
Risinājums. Līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā centīsimies noskaidrot, vai mūsu virkne nav periodiska. Aprēķināsim dažus tās pirmos locekļus. Tie ir
7; 14; 17; 20; 5; 8, 11, 5,… .
Redzam, ka virknes 5. un 8. locekļi ir vienādi. Tātad arī turpmākie locekļi atkārtosies, un tie būs
8, 11, 5, 8, 11, 5, 8, 11, 5, 8, 11,… .
Aplūkosim šo virkni no pirmā perioda sākuma:
(*) 5; 8, 11, 5, 8, 11, 5, 8, 11,… .

Sākotnējā virknē mums vajadzēja atrast 1978-o locekli. Tātad jaunajā virknē (*) mums jāatrod 1974-ais loceklis, jo virkni (*) mēs ieguvām, sākotnējā virknē nosvītrojot četrus pirmos locekļus.
Tā kā, dalot 1974 ar perioda garumu 3, iegūstam 658, atlikumā 0, tad virknē (*) 1974-ajā vietā atrodas skaitlis 11, bet sākotnējā virknē šis skaitlis atrodas 1978-ajā vietā.

**4.5.** Pierādījums. Apzīmēsim draugus ar A, B, C, D, E, F, bet ziņas, ko viņi uzzina sākumā, ar a, b, c, d, e, f.
Sarunas jāorganizē šādā veidā. Vispirms jānotiek sarunām AB un DF (1. posms), pēc tam sarunām BC un DE (2. posms), tad - BD un CE (3. posms) un beidzot - CA un EF (4. posms).
Informācijas izplatīšanās parādīta tabulā:

| Drauga vārds | Pēc 1.posma | Pēc 2.posma | Pēc 3.posma | Pēc 4.posma |
|---|---|---|---|---|
| A | a, b | a, b | a, b | a, b, c, d, e, f |
| B | a, b | a, b, c | a, b, c, d, e, f | a, b, c, d, e, f |
| C | c | a, b, c | a, b, c, d, e, f | a, b, c, d, e, f |
| D | d, f | d, e, f | a, b, c, d, e, f | a, b, c, d, e, f |
| E | e | d, f | a, b, c, d, e, f | a, b, c, d, e, f |
| F | d, f | d, f | d, f | a, b, c, d, e, f |

Pamēģiniet paši pierādīt: ja draugu ir n, kur n ir vesels pozitīvs skaitlis, kas nav mazāks par 4, tad, lai visi draugi uzzinātu visas jaunās ziņas, pietiek ar 2n-4 telefona sarunām. (Viegli redzēt, ka 3 draugu gadījumā vajag 3 sarunas, bet 2 draugu gadījumā – 1 sarunu). Ievērojami grūtāk ir pierādīt, ka ar mazāk nekā 2n-4 sarunām visi draugi visas jaunās ziņas nevar uzzināt.

**A**. Pierādīsim, ka ar 2n-4 sarunām pietiek.
Sadalīsim visus draugus divās grupās tā, lai katrā grupā būtu vismaz 2 draugi (to var izdarīt). Apzīmēsim vienas grupas draugus ar $X_1$, $X_2$,…, $X_m$, otras grupas draugus ar $Y_1$, $Y_2$,…, $Y_k$. Tad m+k=n.
Vispirms notiek sarunas $X_1$-$X_2$, $X_2$-$X_3$,…, $X_{m-1}$-$X_m$ un $Y_1$-$Y_2$, $Y_2$-$Y_3$,…, $Y_{k-1}$-$Y_k$, t.i.,
(m-1)+(k-1)=m+k-2=n-2
sarunas. Šo sarunu rezultātā $X_{m-1}$ un $X_m$ zina visas X grupas jaunās ziņas, bet $Y_{k-1}$ un $Y_k$ zina visas Y grupas jaunās ziņas. Pēc tam notiek sarunas $X_m$-$Y_k$ un $X_{m-1}$-$Y_{k-1}$. To rezultātā $X_{m-1}$, $X_m$, $Y_{k-1}$, $Y_k$ zina visas jaunās ziņas. Pēc tam viens no viņiem izstāsta visiem pārējiem n-4 draugiem un paziņo tiem visas jaunās ziņas. Kopā notikušas

(n-2)+2+(n-4)=2n-4
sarunas.

**B**. Var pierādīt, ka ar mazāk nekā 2n-4 sarunām izvirzītais mērķis nav sasniedzams. Tāpēc atrisiniet šo uzdevumu patstāvīgi.

Uzdevumu var arī variēt. Pieņemsim, ka draugi dzīvo dažādās pilsētās un telefona viņiem nav. Tāpēc, lai nodotu cits citam jaunās ziņas, jāraksta vēstules. Pamēģiniet pierādīt, ka pietiek uzrakstīt 2n-2 vēstules, lai visi draugi zinātu visas jaunās ziņas. Samērā grūts uzdevums ir pierādīt, ka ar mazāk nekā 2n-2 vēstulēm šis mērķis nav sasniedzams.

**A**. Pierādīsim, ka minimālais vēstuļu skaits ir 2n-2.

Ja vispirms n-1 draugi uzraksta vēstules vienam draugam un pēc tam šis viens – visiem pārējiem, tad pēc 2n-2 vēstuļu uzrakstīšanas visi draugi zina visas jaunās ziņas. Tātad ar 2n-2 vēstulēm pietiek.

**B**. Pierādīsim, ka ar mazāku vēstuļu skaitu nepietiek.

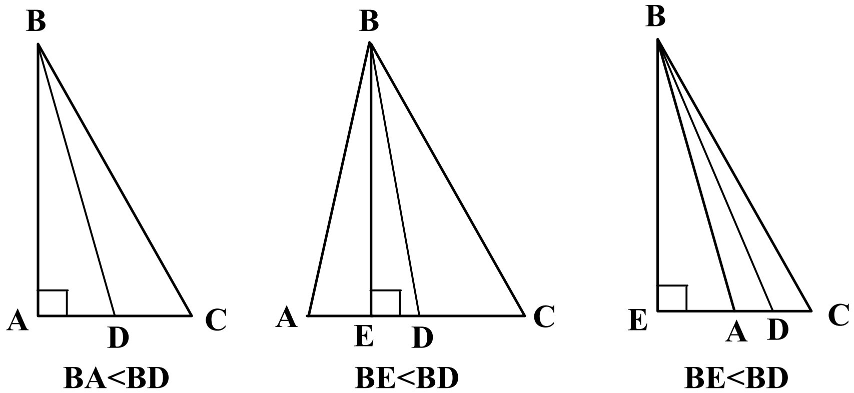
Pieņemsim, ka kāds vēstuļu sērijas rakstīšanas rezultātā visi draugi uzzinājuši visas jaunās ziņas. Apskatīsim to brīdi, kad <u>pirmo reizi</u> kāds no viņiem uzzināja visas ziņas. Līdz šim brīdim bija uzrakstītas vismaz n-1 vēstules, jo katra no n-1 citu draugu uzzinātājām ziņām bija jānodod tālāk. Arī pēc šī brīža tiks uzrakstītas n-1 vēstule, jo n-1 draugi vēl nezināja visas jaunās ziņas, un katram no tiem vēl bija jāsaņem vismaz viena vēstule. Tātad kopā jāuzraksta vismaz

(n-1)+(n-1)=2n-2

vēstules.

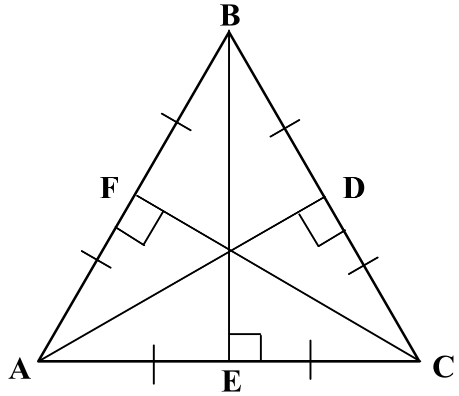
**4.6.** <u>Atbilde</u>. Vislielākā iespējamā augstumu garumu summa ir 3.

<u>Risinājums</u>. Tā kā trijstūra augstums ir visīsākais attālums no trijstūra virsotnes līdz taisnei, uz kuras atrodas pretējā mala, tad augstums noteikti nav garāks par mediānu (slīpne ir garāka par perpendikulu) (skat. 70.zīm.).




**70.zīm.**

Tātad arī augstumu garumu summa nevar būt lielāka par mediānu garumu summu, tas ir, par 3. Ja trijstūris ir regulārs, tad tā mediānas sakrīt ar augstumiem (skat. 71.zīm.),



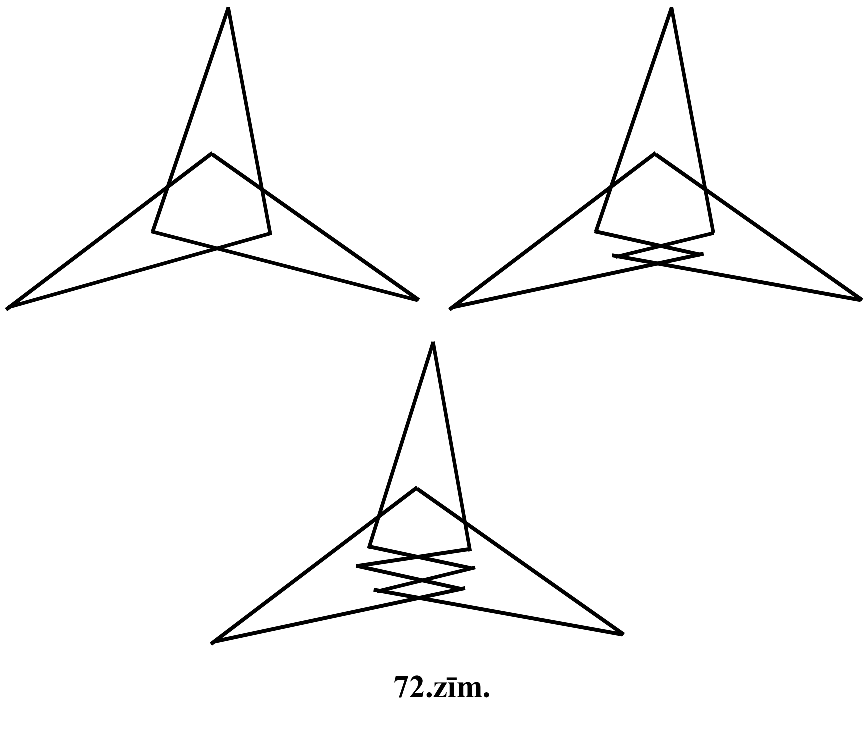

**71.zīm.**

un visu mediānu garumi ir 1, bet augstumu garumu summa ir 3. Tātad trijstūros, kuros mediānu garumu summa ir 3, augstumu garumu summa var būt 3, bet nevar būt lielāka par 3. No tā izriet, ka lielākā iespējamā augstumu garumu summa ir 3.

Ievērosim, ka tad, ja mēs būtu pierādījuši tikai to, ka augstumu garumu summa nevar būt lielāka par 3, bet nebūtu uzrādījuši gadījumu, kad tā ir 3, tad nebūtu pamata apgalvot, ka lielākā iespējamā augstumu garumu summa ir 3; joprojām paliktu iespēja, ka kādu citu, pagaidām nezināmu apstākļu dēļ augstumu garumu summa nevar būt lielāka par, piemēram, 2,99 vai 2,5, vai vēl kādu citu skaitli, kas ir mazāks par 3 un ir lielākā iespējamā augstumu garumu summas vērtība.

**4.7.** Atbilde. a) Jā, eksistē; b) jā, eksistē; c) nē, neeksistē.

Risinājums. Vispirms parādīsim, ka šādas lauztas līnijas ar 6 un 1978 posmiem eksistē. 72. zīmējumā redzamas slēgtas lauztas līnijas, kas katru savu posmu krusto 1 reizi un kam ir 6, 8 un 10 posmi.



**72.zīm.**

Viegli saprast, ka pagarinot šajos zīmējumos starp līnijas posmiem ieslēgto “harmoniku”, var uzzīmēt slēgtas lauztas līnijas, kas katru savu posmu krusto tieši 1 reizi un kam ir 12, 14, 16,… posmi, t.i., jebkurš pāra skaits posmu, kuru nav mazāk par 6. Tātad slēgta lauzta līnija, kas katru savu posmu krusto tieši 1 reizi un kam ir 1978 posmi eksistē.
Pierādīsim, ka šāda līnija ar 1979 posmiem neeksistē. Izejam no pretējā, pieņemot, ka tāda līnija eksistē. Skaitu tās krustpunktiem pašai ar sevi apzīmē ar n. Katrs posms iet caur vienu krustpunktu, un caur katru krustpunktu iet tieši 2 posmi, pie tam caur katru krustpunktu citi 2 posmi, jo lauztā līnija katru savu posmu krusto tieši 1 reizi, tātad pie katra tās posma pieder tikai viens krustpunkts. Tad lauztās līnijas posmu skaitam jābūt 2n – pāra skaitlim, bet 1979 ir nepāra skaitlis. Iegūta pretruna, tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un meklējamā līnija neeksistē.

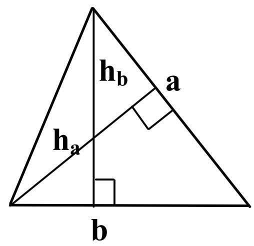
**4.8.** Risinājums. Viegli redzēt, ka tad, ja zilā krāsā nokrāsos tās 7 rūtiņas, kurās 73. zīmējumā iezīmētas zvaigznītes, uzdevuma nosacījumi izpildīsies.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **4** | | | * | * |
| **3** | * | | * | |
| **2** | | * | | |
| **1** | * | | | * |
| | **1** | **2** | **3** | **4** |

**73.zīm.**

Tiešām, ja nokrāsojam melnā krāsā 1. un 2. kolonnu, zvaigznītes paliek 1., 3. un 4. rindiņā, ja 1. un 3. kolonnu, tad - 1., 2. un 4. rindiņā, ja 1. un 4. kolonnu, tad - 2., 3. un 4. rindiņā, ja 2. un 3. kolonnu, tad - 1., 3. un 4. rindiņā, ja 2. un 4. kolonnu, tad - 1., 3. un 4. rindiņā, ja 3. un 4. kolonnu, tad - 1., 2. un 3. rindiņā. Nevienā gadījumā visas atlikušās zvaigznītes nevar nokrāsot, nokrāsojot melnas tikai 2 rindiņas.
Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt, ka tad, ja zilā krāsā nokrāsotas tikai 6 rūtiņas, vienmēr var izvēlēties 2 rindiņas un 2 kolonnas, kuras aizkrāsojot, nepaliek neviena zila rūtiņa.

**4.9.** Pierādījums. Pirmo apgalvojumu pierādīt ir viegli. Apzīmēsim trijstūra divu malu garumus ar a un b, bet pret šīm malām novilkto augstumu garumus ar $h_a$ un $h_b$ (skat. 74.zīm.).




**74.zīm.**

Tad trijstūra laukumu var aprēķināt pēc formulām:

$L = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ un $L = \frac{1}{2} b \cdot h_b$, tātad

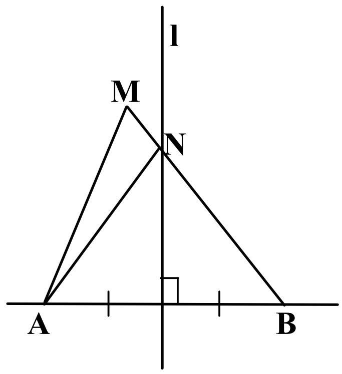
$a \cdot h_a = b \cdot h_b$ un $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$.

Pieņemsim, ka a>b. Tad $\frac{a}{b} > 1$ un no vienādības $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$ seko, ka $\frac{h_b}{h_a} > 1$ jeb $h_b > h_a$, ko arī vajadzēja pierādīt – augstums pret malu a ir īsāks nekā augstums pret malu b.

Otro apgalvojumu pierādīt ir nedaudz sarežģītāk.

**<u>Lemma</u>**. Ja taisne *l* ir nogriežņa AB vidusperpendikuls, tad, lai kāds arī nebūtu punkts M, MA<MB tad un tikai tad, ja M un A atrodas vienā pusē no taisnes *l*.

**I**. Pieņemsim, ka M un A atrodas vienā pusē no taisnes *l*. Ja M atrodas uz taisnes AB, tad skaidrs, ka MA<MB. Tāpēc pieņemsim, ka M neatrodas uz AB (skat. 75.zīm.).




**75.zīm.**

Savienojam M un B ar taisnes nogriezni; tā krustpunktu ar *l* apzīmēsim ar N. Tad AN=NB; tāpēc

MB=MN+NB=MN+NA, bet

MN+NA>MA,

jo trijstūrī ANM malas AM garums mazāks par abu pārējo malu garumu summu. Tātad MB>MA.

**II**. Pieņemsim, ka MA<MB. Punkts M attiecībā pret taisni *l* var novietoties 3 stāvokļos:

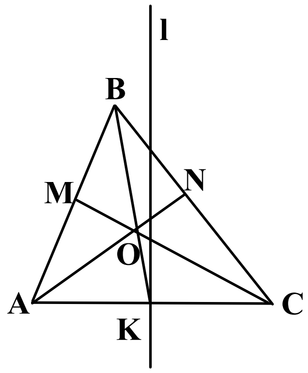
a) tajā taisnes *l* pusē, kurā ir arī punkts B,

b) uz taisnes *l*,

c) tajā taisnes *l* pusē, kurā ir arī punkts A.

Ja I. daļas pierādījumā mēs noskaidrojām, ka a) gadījumā MB<MA, kas ir pretrunā ar nosacījumu MA<MB; b) gadījumā MA=MB, kas arī ir pretrunā ar nosacījumu MA<MB. Tātad noteikti izpildās c) gadījums, t.i., M un A atrodas vienā pusē no *l*, ko arī vajadzēja pierādīt.

Pieņemsim tagad, ka trijstūrī ABC AB<BC: malu AB, BC un AC viduspunktus apzīmēsim attiecīgi ar M, N un K un pierādīsim, ka AN<CN (skat. 76.zīm.).




**76.zīm.**

Apzīmēsim ABC mediānu krustpunktu ar O un novilksim AC vidusperpendikulu *l*; *l* iet caur punktu K. Tā kā AB<BC, tad pēc lemmas punkts B atrodas tai pašā pusē no taisnes *l*, kurā punkts A. Tā kā K atrodas uz taisnes l, tad visi nogriežņa BK iekšējie punkti arī atrodas tai pašā pusē no taisnes l, kurā atrodas A. Tātad arī mediānu krustpunkts O atrodas tai pašā pusē no taisnes *l*, kurā A. Bet tad pēc lemmas AO<CO, tā kā

$AO=\frac{2}{3}AN$ un $CO=\frac{2}{3}CM$, tad no AO<CO seko, ka AN>CM, ko arī vajadzēja pierādīt. No tā, ka mala AB īsāka par malu BC, seko, ka mediāna pret malu AB garāka nekā mediāna pret malu BC.

**4.10.** Pierādījums. Apzīmēsim astotklasniekus augumu dilšanas kārtībā ar $A_1$, $A_2$, $A_3$,…, $A_{1978}$, bet septītklasniekus augumu dilšanas kārtībā $S_1$, $S_2$, $S_3$,…, $S_{1978}$. To, ka skolēns X garāks par skolēnu Y, pierakstīsim kā X>Y vai Y<X; tātad $A_1>A_2>A_3>\ldots>A_{1978}$ un $S_1>S_2>S_3>\ldots>S_{1978}$.

Mums jāpierāda, ka $A_1>S_1$, $A_2>S_2$, $A_3>S_3$,…, $A_{1978}>S_{1978}$.

Pierādīsim, ka $A_1>S_1$. Ja būtu tā, ka $S_1>A_1$, tad $S_1$ būtu garāks par visiem astotklasniekiem, bet tas ir pretrunā tam, ka sākumā $S_1$ stāvēja priekšā astotklasniekam, kas par viņu garāks. Tātad sakarība $A_1>S_1$ ir pareiza.

Pieņemsim no pretējā, ka kāda no sakarībām $A_2>S_2$, $A_3>S_3$,…, $A_{1978}>S_{1978}$ nav pareiza un ka pastāv tāds naturāls skaitlis k, pie kura $S_k>A_k$. Tā kā $S_1>S_2>\ldots>S_{k-1}>S_k$ un $A_k>A_{k+1}>A_{k+2}>\ldots>A_{1978}$, tad k septītklasnieki $S_1$, $S_2$,…, $S_{k-1}$, $S_k$ visi ir garāki par visiem astotklasniekiem $A_k$, $A_{k+1}$, $A_{k+2}$,…, $A_{1978}$. Tātad no astotklasniekiem tikai $A_1$, $A_2$, $A_3$,…, $A_{k-1}$ – skaitā (k-1) – var būt garāki par kādu no septītklasniekiem $S_1$, $S_2$,…, $S_k$, kuru skaits ir k. Bet tas ir pretrunā ar nosacījumu, ka sākumā katrs septītklasnieks stāvēja priekšā par sevi garākam astotklasniekam – (k-1) astotklasnieku $A_1$, $A_2$, $A_3$,…, $A_{k-1}$ nepietiek, lai "aizsegtu" k septītklasniekus $S_1$, $S_2$,…, $S_k$. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un tāda k, pie kura $S_k>A_k$, nav, tātad visiem k=1, 2,…, 1978 $A_k>S_k$, ko arī vajadzēja pierādīt.

Pamēģiniet vispārināt šo uzdevumu lielākam skolēnu rindu skaitam.

## 5. nodarbības atrisinājumi

**5.1.** Atbilde. Tādu skaitļu nav.

Risinājums. Apzīmēsim mazāko no meklētajiem skaitļiem ar x; tad mums jārisina vienādojums

$$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)=255124 \qquad (1)$$

Tie, kas prot risināt kvadrātvienādojumu, var sareizināt atsevišķi pirmo un ceturto locekli un atsevišķi – otro un trešo locekli, pārveidojot (1) formā

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=255124 \qquad (2)$$

Apzīmējot $x^2+3x=y$, no (2) iegūstam

$y(y+2)=255124$

$y^2+2y-255124=0$

$y=-1\pm\sqrt{255125}$ .

Bet, tā kā

$505^2=255025<255125<256036=506^2$, tad

$505<\sqrt{255125}<506$;

t.i., $\sqrt{255125}$ un arī y nav vesels skaitlis. No otras puses, tā kā x – vesels skaitlis, tad arī

$y=x^2+3x$ jābūt veselam skaitlim. Tātad vienādojumam nav atrisinājumu veselos pozitīvos skaitļos.

Dosim otru atrisinājumu, kas pieejams tiem risinātājiem, kas par kvadrātvienādojumiem vēl nav mācījušies. Ievērosim, ka (1) kreisajā pusē esošā izteiksme palielinās, ja x aug, pieņemot pozitīvas vērtības (citiem vārdiem, pie x pozitīvām vērtībām $x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$ ir monotoni augoša funkcija). Tiešām, x augot, aug arī reizinātāji x, x+1, x+2, x+3, un, tā kā tie visi ir pozitīvi, tad aug arī to reizinājums. Tātad šis reizinājums vērtību 255124 pieņem vienā vienīgā punktā (mēs runājam par pozitīviem x!). Pamēģināsim atrast šo punktu ar mēģinājumu metodi. Viegli aprēķināt, ka,

ja x=21, tad

$21\cdot22\cdot23\cdot24=255024<255124$,

bet, ja x=22, tad

$22\cdot23\cdot24\cdot25=303600>255124$.

Tātad izteiksme $x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$ vērtību 255124 pieņem pie tādas x vērtības, kas atrodas starp 21 un 22, tātad ne pie kādas veselas pozitīvas x vērtības tā vērtību 255124 nepieņem. Tātad vienādojumam (1) nav atrisinājumu veselos pozitīvos skaitļos.

**5.2.** Atbilde. N=29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Risinājums. Apzīmēsim $N=10a+b$, kur a – skaitļa N desmitu cipars, bet b – skaitļa N vienu cipars. Tad skaitlis, kas iegūts, mainot N ciparus vietām, ir $10b+a$, bet abu šo skaitļu summa ir

$(10a+b)+(10b+a)=$

Tātad skaitlim $11(a+b)$ jābūt vesela skaitļa kvadrātam. Tā kā a un b – cipari, tad $0\leq a\leq 9$ un $0\leq b\leq 9$; turklāt $a>0$, jo N - divzīmju skaitlis. Tātad

$0<a+b\leq 18$.

Lai $11(a+b)$ būtu vesela skaitļa kvadrāts, tam jāsatur pirmskaitlis 11, pāra pakāpē (jo katra vesels skaitļa kvadrāts satur visus tajā ieejošos pirmskaitļus pāra pakāpēs), tātad $a+b$ jādalās ar 11. Acīmredzot, tas iespējams vienīgi tad, kad $a+b=11$.

Ja $a+b=11$, tad $11(a+b)=11^2$.

Tātad mēs iegūstam šādas iespējas:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a=2, | b=9, | N=29, | a=6, | b=5, | N=65, |
| a=3, | b=8, | N=38, | a=7, | b=4, | N=74, |
| a=4, | b=7, | N=47, | a=8, | b=3, | N=83, |
| a=5, | b=6, | N=56, | a=9, | b=2, | N=92. |

**5.3.** Pierādījums. Ievērosim, ka

$$\begin{gathered}(a+b+c)^2=\\=(a+b+c)(a+b+c)=\\=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2=\\=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+ac+bc).\end{gathered}$$

Tāpēc

$$ab+ac+bc=\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

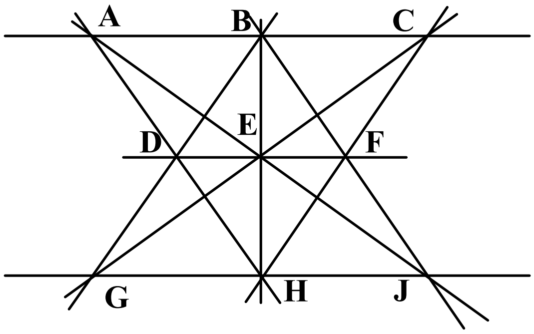
Ja $a+b+c=0$, tad iegūstam, ka

$$ab+ac+bc=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2). \qquad (*)$$

Tā kā $a^2\geq 0$, $b^2\geq 0$, $c^2\geq 0$, tad $-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\leq 0$, un no šejienes seko, ka $ab+ac+bc\leq 0$.

Acīmredzot, $ab+ac+bc=0$ tad un tikai tad, ja $-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=0$, bet tas ir tad, ja $a=b=c=0$. Lai varētu sacīt, ka pie uzdevuma nosacījumiem $ab+ac+bc=0$, ja $a=b=c=0$, vēl jāpārbauda, vai šīs vērtības apmierina nosacījumu $a+b+c=0$, jo mūsu spriedumi balstās uz formulu (*), kas iegūta tikai tādiem a, b, c, kas apmierina nosacījumu $a+b+c=0$.

**5.4.** Atbilde. Jā, ir iespējams. (Skat., piemēram, 77.zīm.).

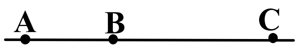



**77.zīm.**

ACJG ir taisnstūris, B un H attiecīgi malu AC un GJ viduspunkti, E - diagonāļu krustpunkts, D – nogriežņu AB un BG krustpunkts, F – nogriežņu BJ un CH krustpunkts. Tātad 9 atzīmētie punkti izvietojas pa 3 uz 8 taisnēm ABC, GHJ, AEJ, GEC, ADH, BDG, CFH. Pierādīsim, ka arī B, E, H atrodas uz vienas taisnes. Tiešām, E kā taisnstūra simetrijas centrs atrodas uz tā viduslīnijas BH. Atliek pierādīt, ka D, E, F atrodas uz vienas taisnes. Apzīmēsim ar *l* taisnstūra simetrijas asi, kas paralēla malai AC. E atrodas uz taisnes *l*. attēlojot taisnstūri simetriski attiecībā pret *l*, A un G, B un H, C un J mainās vietām, tātad mainās vietām AH un BG, BJ un CH. Tāpēc AH un BG krustpunkts D attēlojas pats par sevi, arī BJ un CH krustpunkts F attēlojas pats par sevi. Tāpēc D un F pieder pie taisnes *l*, pie kuras pieder arī E. Tātad D, B, F pieder pie vienas taisnes.

**5.5.** Pierādījums. Aplūkosim visus iespējamos gadījumus.

**I**. Starp apzīmētajiem n punktiem ir 3 tādi, kas atrodas uz vienas taisnes. Apzīmēsim tos ar A, B, C, pie tam B atrodas starp A un C (skat. 78.zīm.).

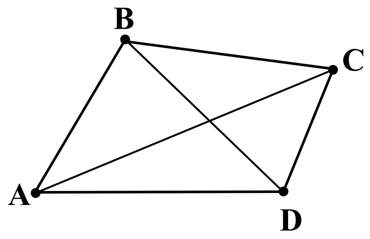



**78.zīm.**

Ieskaitām A un C vienā grupā, bet B – otrā grupā; citu punktu iedalījums grupās nav svarīgs. Pieņemsim, ka kāda taisne *l* atdala vienu grupu no otras. Tad A un C atrodas vienā pusē no *l*. Tai pašā pusē atrodas arī B (ja B atrastos otrā pusē no taisnes *l*, tad *l* krustotu nogriezni AC divos punktos, kas nav iespējams). Tātad *l* neatdala vienu grupu no otras, un esam ieguvuši pretrunu.

**II**. Nekādi trīs no atzīmētajiem punktiem neatrodas uz vienas taisnes. Izvēlēsimies četrus no tiem. Ir divas iespējas:

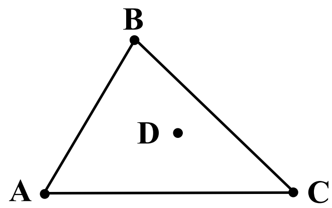
**II**1. Šie četri punkti A, B, C, D ir virsotnes izliektam četrstūrim (skat. 79.zīm.), kura diagonāles ir AC un BD.




**79.zīm.**

A un C ieskaitām vienā grupā, B un D – otrā grupā. Ja taisne *l* atdala vienu grupu no otras, tad vienā pusē atrodas nogrieznis AC, otrā – nogrieznis BD. Tātad šie nogriežņi nevar krustoties, taču tie krustojas. Tas nozīmē, ka neviena taisne *l* neatdala vienu grupu no otras.

**II**$_2$. Trīs no atzīmētajiem četriem punktiem, piemēram, A, B, C – veido trijstūri, kura iekšpusē atrodas punkts D (skat. 80.zīm.).



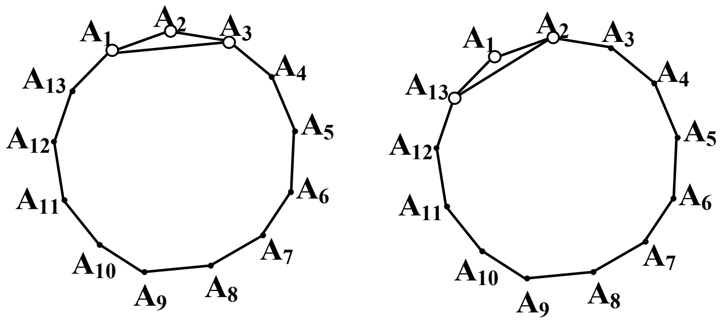

**80.zīm.**

Tad A, B, C ieskaitām vienā grupā, bet D – otrajā grupā. Ja kāda taisne *l* atdalītu vienu grupu no otras, tad punkti A, B, C atrastos vienā pusē no tās. Tad arī viens trijstūris ABC un tātad arī punkts D atrastos tajā pašā pusē no taisnes *l*. Arī šajā gadījumā neviena taisne nevar atdalīt vienu grupu no otras (lai arī kā pa grupām būtu sadalīti pārējie punkti).

**5.6.** Pierādījums. Tā kā daudzstūra virsotņu skaits ir nepāra skaitlis, tad tam ir vismaz viena tāda mala, kuras abi galapunkti nokrāsoti vienā krāsā. Tiešām, ja 13-stūra virsotņu krāsas, ejot pa tā kontūru, visu laiku mainītos, tad, sākot no kādas baltas virsotnes, mēs iegūtu krāsu virkni

**B M B M B M B M B M B M B**,

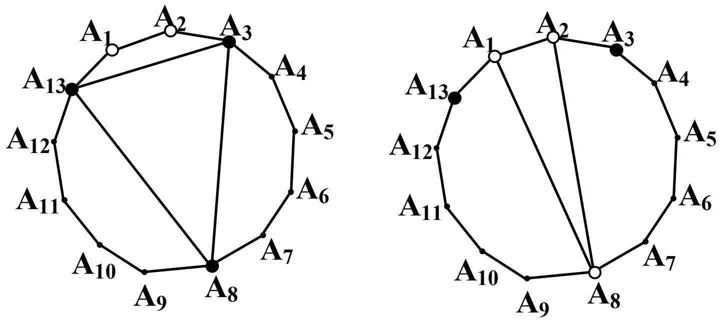
un blakus esošās 1. un 13. virsotne būtu baltas. Apzīmēsim daudzstūra virsotnes pēc kārtas ar $A_1$, $A_2$, $A_3$,…, $A_{13}$ tā, lai $A_1$ un $A_2$ būtu tās malas galapunkti, kurai abi gali nokrāsoti vienā krāsā (pieņemsim, baltā) (skat. 81.zīm.). Ja $A_3$ nokrāsots baltā krāsā, tad $A_1$, $A_2$, $A_3$ (skat. 81.a) zīm.) veido meklējamo trijstūri; ja $A_{13}$ nokrāsots baltā krāsā, tad meklējamo trijstūri veido $A_{13}$, $A_1$, $A_2$ (skat. 81.b) zīm.).




a) b)

**81.zīm.**

Ja gan $A_{13}$ gan $A_3$ nokrāsoti balti, tad aplūkojam $A_8$ (skat. 82.zīm.).




a) b)

**82.zīm.**

Ja $A_8$ ir melns, tad meklējamo trijstūri veido $A_{13}$, $A_3$, $A_8$ (skat. 82.a) zīm.), ja $A_8$ ir balts, tad meklējamo trijstūri veido $A_{13}$, $A_3$, $A_8$ (skat. 82.b) zīm.).

**5.7.** Pierādījums. Pieņemsim, ka $a_1<a_2$. Tā kā $a_1^{a_2} = a_2^{a_3}$ , tad $a_2>a_3$.

Tā kā $a_2^{a_3} = a_3^{a_4}$ , tad $a_3<a_4$.

Līdzīgi turpinot, iegūstam, ka $a_4>a_5$, $a_5<a_6$, $a_6>a_7,\ldots$, $a_{16}>a_{17}$, $a_{17}<a_1$, $a_1>a_2$.

Tas ir pretrunā ar sākotnējo pieņēmumu, ka $a_1<a_2$.

Līdzīgu pretrunu iegūstam, ja pieņemam, ka $a_1>a_2$. Tā kā gan $a_1<a_2$, gan $a_1>a_2$ noved pie pretrunas, tad $a_1=a_2$.

Līdzīgi pierāda, ka $a_2=a_3$, $a_3=a_4,\ldots$, $a_{15}=a_{16}$, $a_{16}=a_{17}$.

Acīmredzot, līdzīgu spriedumu var izdarīt vienmēr , ja $a_1$, $a_2$, $a_3,\ldots$, $a_{n-1}$, $a_n$ – naturāli skaitļi, n – nepāra skaitlis un

(*) $a_1^{a_2} = a_2^{a_3} = a_3^{a_4} = \ldots = a_{n-1}^{a_n} = a_n^{a_1}$ .

Viegli konstatēt, ka $2^4=4^2=2^4=4^2=\ldots=2^4=4^2$, tātad, ja n – pāra skaitlis, tad vienādība (*) iespējama arī tad, ja ne visi $a_i$(i=1, 2,…, n) ir savā starpā vienādi. Iesakām lasītājam patstāvīgi noskaidrot, pie kādiem pāra skaitļiem n eksistē vēl citi skaitļi $a_1$, $a_2,\ldots$, $a_n$, kas apmierina (*).

**5.8.** Pierādījums. Izvēlēsimies jebkurus 3 delegātus. Vismaz 2 no viņiem savā starpā var sarunāties bez starpniekiem (citādi nebūtu izpildīti uzdevuma nosacījumi). Šos divus delegātus novietojam vienā numurā. Tagad mums jāizvieto 998 delegāti. Atkārtojam tādu pašu operāciju: izvēlamies 3 delegātus un tos divus no viņiem, kas savā starpā var tieši saprasties, novietojam vienā numurā; atliek 996 delegāti. Tā rīkojamies, kamēr paliek 4 delegāti.

Ja mēs vēlreiz bez papildus spriedumiem atkārtosim tādu pašu operāciju, kā līdz šim, tad var gadīties, ka tie divi delegāti, kam jādzīvo pēdējā, 500. numurā, nevar saprasties.

Tiešām, apzīmēsim atlikušos 4 delegātus ar A, B, C, D. Pieņemsim, ka A un B var saprasties ar C un D, bet C un D savā starpā tieši saprasties nevar.

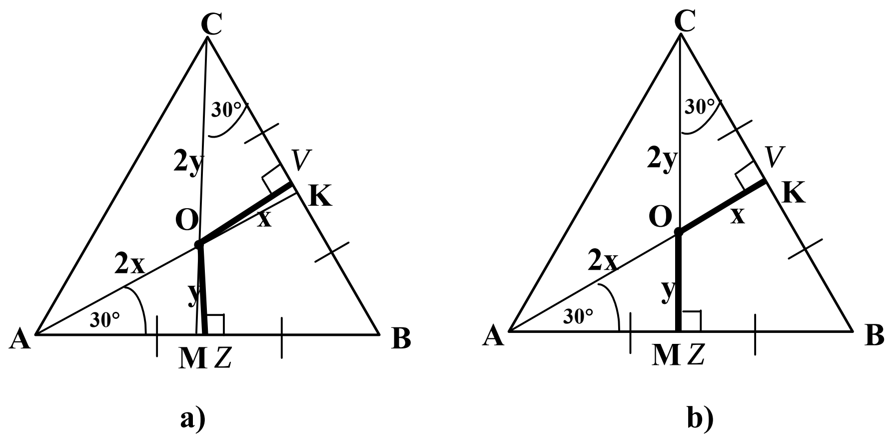
Ja no delegātiem A, B, C A un B novietosim vienā numurā, tad C un D būs spiesti dzīvot vienā numurā, kaut arī savā starpā nevar tieši saprasties. Tāpēc 4 delegātu gadījumā jāizdomā "viltīgāka" stratēģija.

Aplūkosim divus delegātus, pieņemsim, A un B, kas savā starpā var tieši saprasties (vismaz 2 tādiem jābūt). Ja arī C un D savā starpā var tieši saprasties, tad novietojam A un B vienā numurā, C un D – otrā numurā. Ja C un D tieši saprasties nevar, tad aplūkojam no delegātiem A un B, ar kuru var tieši saprasties C. (Ja C nevar tieši saprasties ne ar A, ne ar B, tad trijniekā A, B, C delegāts C nevar saprasties ne ar A, ne B, un tā ir pretruna uzdevuma nosacījumiem.) Pieņemsim, ka A var tieši saprasties ar C. Tad B noteikti var tieši saprasties ar D. Ja B nevarētu tieši saprasties ar D, tad delegātu trijniekā B, C, D ar D neviens no pārējiem diviem delegātiem nevarētu saprasties, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad vienā numurā varam ievietot A un C, otrā B un D.

**5.9.** Pierādījums. Starp 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 12 (to pierādiet patstāvīgi). Apzīmēsim šo skaitli ar n. Tā kā tas dalās ar 12, tad tas dalās arī ar 2, 3, 4, 6. Bet tad tas dalās arī ar veseliem pozitīviem skaitļiem $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{4} un \frac{n}{6}$; bet jau $\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{6}=\frac{5}{4}n>n$.

Pieskaitot vēl pārējos dalītājus (piemēram, 1 un citus, ja tādi ir), dalītāju summa palielinās, tātad kļūst lielāks par n.

**5.10.** Pierādījums. Apzīmēsim mediānu krustpunktu ar O, mediānas AK garumu ar 3x, mediānas CM garumu ar 3y (skat. 83.zīm.).




**83.zīm.**

Tad AO=2x, OK=x, CO=2y, OM=y.

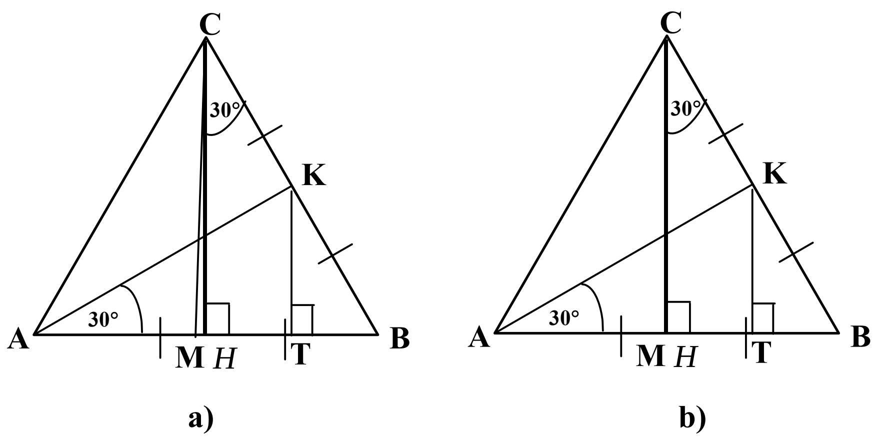
Velkam no punkta O perpendikulu OV pret malu AB un perpendikulu OZ pret malu BC. Tā kā AVO – taisnleņķa trijstūris ar šauro leņķi VAO=$30^0$ un hipotenūzas garumu AO=2x, tad OV=x.

Līdzīgi iegūstam, ka OZ=y.

Tā kā OV≤CM un OZ≤OK (teorēma par perpendikula un slīpnes garumiem), tad x≤y un y≤x, tātad x=y.

Secinām, ka AK=CM, t.i., ΔABC mediānas pret malām BC un AB ir kongruentas. Atceroties, ka tad, ja trijstūrī 2 malas ir dažāda garuma, pret garāko no tām atrodas īsākā mediāna (skat. 34. uzdevuma risinājumu), secinām, ka AB=BC.

Tātad esam pierādījuši, ka ABC vienādsānu trijstūris (skat. 84.zīm.).




**84.zīm.**

Novelkam no punkta K perpendikulu KT pret malu AB. No taisnleņķa trijstūra ATK ar šauro leņķi, ∠TAK=$30^0$ seko, ka TK=$\frac{1}{2}$AK.

Novelkam trijstūra augstumu CH. Tā kā pastāv proporcija

$\frac{BK}{BC}=\frac{TK}{CH}$ un $\frac{BK}{BC}=\frac{1}{2}$, tad

$\frac{TK}{CH}=\frac{1}{2}$ un CH=2TK=AK=CM.

Tātad augstums un mediāna no virsotnes C ir kongruenti. Tā kā perpendikuls ir īsāks par slīpni, ja abi vilkti no viena un tā paša punkta pret vienu un to pašu taisni, tad vienādība CH=CM iespējama tad un tikai tad, kad augstums CH sakrīt ar mediānu CM. Bet tas savukārt iespējams tad un tikai tad, kad ABC ir vienādsānu trijstūris ar virsotni C. Tātad AC=BC.

Jau iepriekš pierādījām, ka AB=BC. Tāpēc visas ΔABC malas ir kongruentas un tas regulārs.

## 6. nodarbības atrisinājumi

**6.1.** Atbilde. 7 locekļu vienības gadījumā ir iespējams.

8 locekļu vienības gadījumā uzdevuma prasība nav izpildāma.

Risinājums. Vispirms aplūkosim gadījumu, kad kārtības sargu vienībā ir 7 cilvēki. Apzīmēsim tos ar A, B, C, D, E, F, G.

Viegli pārbaudīt, ka tad, ja dežūras noorganizē šādi:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **pirmdien** | **-** | **ABC,** | **piektdien** | **-** | **BEG,** |
| **otrdien** | **-** | **ADB,** | **sestdien** | **-** | **CDG,** |
| **trešdien** | **-** | **AFG,** | **svētdien** | **-** | **CEF,** |
| **ceturtdien** | **-** | **BGF,** | | | |

tad visas uzdevuma prasības ir izpildītas.

Padomāsim, kā var sastādīt šādu dežūru sarakstu. Acīmredzot A jāiet dežūrēt trīs reizes, jo viņam ir 6 biedri un katru reizi jādežūrē kopā ar diviem citiem biedriem (lai nebūtu divu tādu vienības locekļu, kuri kopā dežūrējuši vairāk nekā vienu vakaru). Pieņemsim, ka A pirmo vakaru dežūrē kopā ar B un C, otro – kopā ar D un E, trešo – kopā ar F un G.

Padomāsim, kādās dežūrās vēl var iesaistīties B. Tā kā B vienu reizi dežūrē kopā ar A un C, tad viņam vēl jādežūrē kopā ar D, E, F un G. Ja vienu reizi B dežūrēs kopā ar D un E, tad otru reizi viņam būs jādežūrē kopā ar F un G. Bet tad F un G būs kopā dežūrējuši divas reizes – gan ar B, gan ar A. Tāpēc vienam partnerim katrā dežūrā jābūt vai nu D, vai E, bet otram –vai nu F, vai G. Pieņemsim, ka B vienu vakaru dežūrē kopā ar D un F, bet otru – kopā ar E un G.

Padomāsim, kādās dežūrās jāiesaistās C. Tā kā C jau ir dežūrējis kopā ar A un B, tad vēl jāizveido dežūras, kur C dežūrētu kopā ar D, E, F, G. Tāpat kā iepriekš izspriežam, ka C nevar dežūrēt ne kopā ar D un E, ne kopā ar F un G. Ņemot vērā to, kādās dežūrās iesaistījies B (BDF un BEG), redzam, ka C nevar dežūrēt kopā ar D un F, kā arī ar E un G.

Tātad paliek vienīgā iespēja, ka C vienu vakaru dežūrē kopā ar D un G, bet otru vakaru – kopā ar E un F. tagad vēl jāpārbauda, vai arī D, E, F un G katrs pa vienai reizei nodežūrējuši kopā ar katru citu vienības locekli (līdz šim interesējāmies tikai par A, B un C). Pārbaude parāda, ka tā tiešām ir. Tātad uzdevums atrisināts.

Tagad aplūkosim gadījumu, kad vienībā ir 8 locekļi. Apzīmēsim vienu tās locekli ar A. Tad A vispār jādežūrē kopā ar 7 pārējiem locekļiem, katru vakaru ar diviem citiem. Bet tas nav iespējams, jo 7 ar 2 nedalās. Tātad 8 locekļu vienības gadījumā uzdevuma prasība nav izpildāma.

Pamēģiniet paši pierādīt, ka, lai uzdevuma prasības būtu izpildāmas vienībai ar n locekļiem, skaitlim n noteikti jāapmierina šādas prasības:

a) n ir nepāra skaitlis,

b) vai nu n, vai n-1 dalās ar 3.

Norādījums: punkta b pierādījumā pamēģiniet saskaitīt, cik dažādu pāru var izveidot no vienādības n locekļiem.

Izrādās, ka tad, ja skaitlis n apmierina prasības a un b, uzdevuma nosacījumos aprakstīto dežūru sarakstu vienībai, kas sastāv no n cilvēkiem, var izveidot. Tomēr ši fakta pierādījums ir ļoti sarežģīts.

**6.2.** Atbilde. Jānim pietiek ar vienu jautājumu.

Risinājums. Viņš izvēlas skaitļus $a_1=1$, $a_2=10$, $a_3=100$, $a_4=1000$. Tā kā $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ir veseli vienzīmju skaitļi, tad summa

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4$

būs četrzīmju skaitlis, kura cipari ir Andra iedomātie skaitļi.

Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt, ka gadījumā, ja Andrim atļauts iedomāties jebkādus (ne tikai vienzīmīgus) veselus pozitīvus skaitļus, bet pārējie uzdevuma nosacījumi paliek spēkā, tad Jānim pietiek ar diviem jautājumiem, lai uzzināti visus Andra iedomātos skaitļus.

Pamēģiniet arī pierādīt, ka šādā gadījumā ar vienu jautājumu nepietiek (to pierādīt ir diezgan grūti).

**6.3.** Pierādījums. Ja z – vesels pozitīvs skaitlis, tad ar S(z) apzīmēsim skaitļa z ciparu summu.

Uzdevuma atrisinājums balstās uz šādu lemmu.

**Lemma**. Ja a un b veseli pozitīvi skaitļi, tad

S(a)+S(b)-S(a+b) dalās ar 9.

Pieņemsim, ka lemma jau pierādīta, un pielietosim to gadījumam, kad a=b=x, kur x - tas skaitlis, par ko runā uzdevums. Tad

S(x)+S(x)-S(2x)=2S(x)-S(2x) dalās ar 9.

Bet pēc uzdevuma nosacījumiem S(2x)=S(x), tātad S(x) dalās ar 9.

Atceroties, ka skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, kad tā ciparu summa dalās ar 9, secinām, ka x dalās ar 9, ko arī vajadzēja pierādīt.

Atliek pierādīt lemmu.

Atcerēsimies, kā saskaita divus veselus pozitīvus skaitļus. Ja nevienā šķirā nerodas pārnesums, tad katrs summas a+b cipars ir vienāds ar skaitļu a un b atbilstošo ciparu summu, tātad

S(a+b)=S(a)+S(b) un

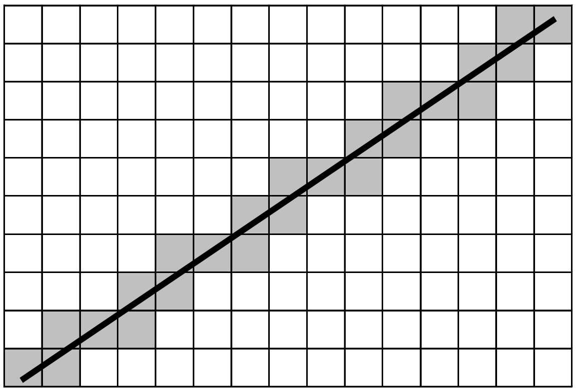
S(a+b)-S(a)-S(b)=0; bet 0 dalās ar 9.

Ja turpretī kādā šķirā rodas pārnesums, tad tas noteikti ir 1. (Tiešām abu pēdējo ciparu summa nepārsniedz 18; tātad uz priekšpēdējo šķiru var rasties tikai pārnesums 1. Abu priekšpēdējo ciparu summa arī nepārsniedz 18, vai, pieskaitot no pēdējiem cipariem radušos pārnesumu, nepārsniedz 19. tātad uz priekšpēdējo šķiru arī var rasties tikai pārnesums 1, utt.)

Pieņemsim, ka kādā šķirā, saskaitot abu saskaitāmo ciparus u un v, rodas divciparu skaitlis $\overline{1t}$ (skaitlis ar vienu ciparu t un desmitu ciparu 1). Tad summā mēs rakstām nevis abu saskaitāmo ciparu summu u+v=$\overline{1t}$=10+t, bet gan ciparu t, un vieninieku pārnesam uz nākamo šķiru. Tātad abu saskaitāmo ciparu summas un rezultāta ciparu summas, kas rodas šajā vietā, starpība ir

(u+v)-1-t=10+t-1-t=9. Ja pārnesums notiek vēl kādā vietā, tad tur šī starpība atkal palielinās par 9, utt. Tātad starpība S(a)+S(b)-S(a+b) ir vairāku devītnieku summa, kas dalās ar 9. Lemma ir pierādīta.

**6.4.** Atbilde. To, kā var novilkt taisnes nogriezni, kas pilnīgi atrodas taisnstūra iekšpusē, neiet ne caur vienas rūtiņas virsotni un kam ir kopēji punkti ar 24 rūtiņām, var redzēt 85. zīmējumā.



**85.zīm.**

Pierādīsim, ka tādu nogriezni, kam būtu kopēji punkti ar 25 rūtiņām un kas apmierinātu uzdevuma pārējos nosacījumus, novilkt nevar.

Taisnstūri rūtiņās sadala 14 horizontālas un 9 vertikālas taisnes. Katrs nogrieznis, kas atrodas taisnstūra iekšpusē un neiet ne caur vienas rūtiņas virsotni, katru no šīm 23 taisnēm var krustot tikai vienā punktā. Tā kā nogrieznis var pāriet no vienas rūtiņas otrā tikai, krustojot vienu no šīm 23 taisnēm, tad tas var iet augstākais caur 24 rūtiņām.

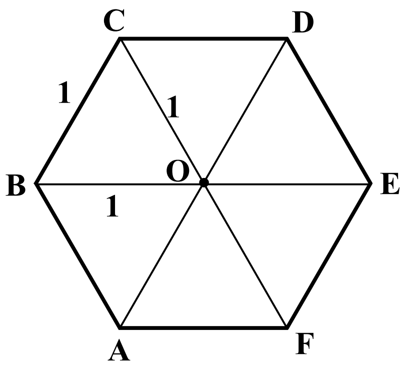
**6.5.** Atbilde. Jānis var uzkāpt pa kāpnēm 89 dažādos veidos.

Risinājums. Pamēģināsim vispirms atrisināt uzdevumu, ja pakāpienu skaits ir mazāks.

Ja kāpnēm ir 1 pakāpiens, tad pa tām var uzkāpt tikai 1 veidā: sperot 1 soli pa 1 pakāpienu.

Ja kāpnēm ir 2 pakāpieni, tad pa tām var uzkāpt 2 veidos: 1+1 pakāpieni vai 2 pakāpieni.
Ja kāpnēm ir 3 pakāpieni, tad pa tām var uzkāpt 3 veidos: 1+1+1, 1+2, 2+1.
Ja kāpnēm ir 4 pakāpieni, tad pa tām var uzkāpt 5 veidos: 1+1+1+1, 1+2+1, 2+1+1, 1+1+2, 2+2.
Ja kāpnēm ir 5 pakāpieni, tad pa tām var uzkāpt 8 veidos: 1+1+1+1+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 1+1+2+1, 1+2+2, 2+1+2, 2+2+1, 1+1+1+2.
Aplūkojot iegūtos skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 8, ievērojam, ka katrs nākamais no tiem ir divu iepriekšējo summa:
3=1+2,
5=2+3,
8=3+5.
Rodas doma, ka tāpat ir arī vispārīgā gadījumā: to dažādo veidu skaitu, kādos Jānis var pārvarēt n pakāpienu garas kāpnes, var aprēķināt, saskaitot atbilstošos veidus n-1 pakāpienu garām kāpnēm un n-2 pakāpienu garām kāpnēm.
Pierādīsim to. Apzīmēsim to veidu skaitu, kādos Jānis var pārvarēt n pakāpienu garas kāpnes, ar $S_n$, bet atbilstošos veidus n-1 un n-2 pakāpienu garām kāpnēm ar $S_{n-1}$ un $S_{n-2}$. Mums jāpierāda, ka
$S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$.
Uz n pakāpienu garo kāpņu augšējā, n-tā pakāpiena Jānis var nonākt divējādi:
no (n-1)-ā pakāpiena vai no (n-2)-ā pakāpiena.
Acīmredzot, veidu skaits, kādos Jānis var nonākt uz augšējā pakāpiena no (n-1)-ā pakāpiena, ir $S_{n-1}$. Tie viens no otra atšķiras tikai ar to, kā Jānis nonācis līdz (n-1)-am pakāpienam. Līdzīgi to veidu skaits, kuros Jānis var nonākt uz augšējā pakāpiena no (n-2)-ā pakāpiena, ir $S_{n-2}$.
Tā kā neviens veids, kurā Jānis var nonākt uz augšējā pakāpiena, nepieder abām mūsu apskatītajām grupām, tad katrs no tiem pieder tieši vienai grupai; tātad tiešām
$S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$.
To ievērojot, viegli atrodam, ka
$S_6=S_5+S_4=13$,
$S_7=21$,
$S_8=34$,
$S_9=55$,
$S_{10}=89$.

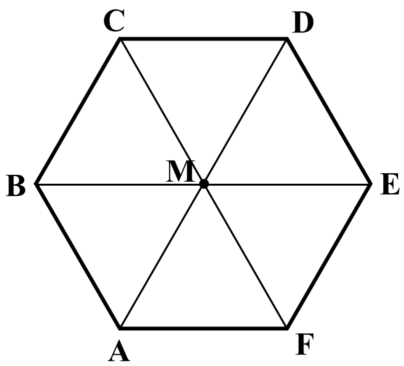
**6.6.** Pierādījums. Novelkam taisnes nogriežņus, kas savieno regulārā sešstūra ABCDEF centru O ar tā virsotnēm. Tādējādi sešstūris sadalās 6 regulāros trijstūros ar malas garumu 1 (skat. 86.zīm.).



**86.zīm.**

Šķirosim trīs gadījumus:

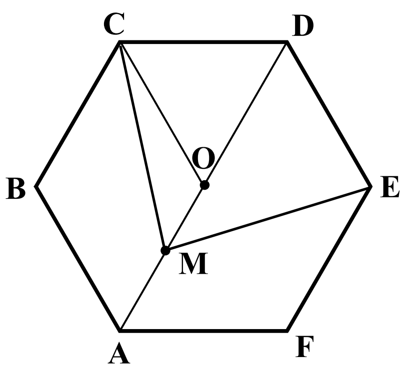
**1**. M ir sešstūra centrs O (punkti M un O sakrīt). Tādā gadījumā jebkurš no trijstūriem MAB, MBC, MCD, MDE, MEF, MFA ir ar vajadzīgo īpašību (skat. 87.zīm.).



**87.zīm.**

**2**. M nav sešstūra centrs O (punkti M un O nesakrīt), bet pieder pie kāda no nogriežņiem, kas savieno ) ar sešstūra virsotnēm (pieņemsim, ka M pieder pie nogriežņa OA; matemātikā to pieraksta ar formulu $M \in OA$).

Tādā gadījumā ar vajadzīgo īpašību ir trijstūri MCD un MED (skat. 88.zīm.).



**88.zīm.**

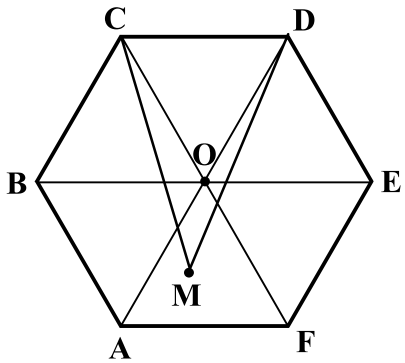
Pierādīsim to attiecībā uz trijstūri CMD. Tiešām, CD=1; DM>OD=1.

Atliek pierādīt, ka $CM \geq 1$.

Apskatām trijstūri MOC. Tā kā $\angle MOC=120^0$, tad $\angle MOC$ ir šī trijstūra vislielākais leņķis (ja kāds cits iekšējais leņķis būtu par to lielāks, tad MOC iekšējo leņķu summa būtu lielāka par $120^0+12^0=240^0$ – pretruna!). Tā kā pret lielāko iekšējo leņķi atrodas garākā mala, Tad $MC \geq OC=1$, ko arī vajadzēja pierādīt.

Apgalvojumu par $\Delta MED$ pierāda līdzīgi.

**3**. M nav sešstūra centrs O un arī neatrodas ne uz viena no nogriežņiem, kas savieno O ar sešstūra virsotnēm. Tad M atrodas iekšpusē kādam no trijstūriem OAB, OBC, OCD, ODE,OEF, OFA. Pieņemsim, ka M atrodas trijstūra OAF iekšpusē (skat. 89.zīm.).




**89.zīm.**

Pierādīsim, ka tādā gadījumā ar vajadzīgo īpašību ir $\Delta MCD$.

Tiešām, $\angle OCD=\angle ODC=60^0$, tātad

$\angle MCD>60^0$ un $\angle MDC>60^0$.

Tā kā $\angle MCD+\angle MDC+\angle CMD=180^0$, tad no šejienes seko, ka $\angle CMD<60^0$; tātad $\angle CMD$ ir trijstūra mazākais leņķis tāpēc pret to atrodas <u>mazākā</u> mala CD, kuras garums ir 1. Ja trijstūra mazākās malas garums ir 1, tad trijstūra pārējās malas ir garākas par 1, ko arī vajadzēja pierādīt.

Viegli pierādīt, ka atkarībā no tā, vai M atrodas tuvāk punktam B vai punktam E, ar šādu pašu īpašību (ka visas malas garākas vai vienādas ar 1) ir arī $\Delta DME$ vai $\Delta CMB$. Tātad īstenībā vienmēr ir vismaz 2 trijstūri ar vajadzīgo īpašību.

**6.7.** <u>Atbilde</u>. Mazākais iespējamais viduspunktu daudzums ir 197.

<u>Risinājums</u>. Pierādīsim, ka mazākais iespējamais viduspunktu skaits ir 197. Lai to pierādītu, mums jāpierāda, ka

a) var gadīties, ka ir tieši 197 dažādi viduspunkti;

b) nevar gadīties, ka ir mazāk par 197 dažādiem viduspunktiem.

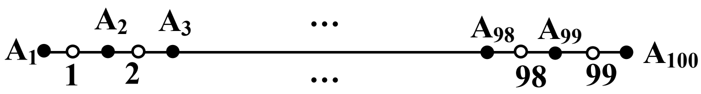
Pierādīsim vispirms punktu a.

Atzīmēsim uz taisnes punktus $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_{100}$ tā, ka

$|A_1A_2|=|A_2A_3|=|A_3A_4|=\ldots=|A_{98}A_{99}|=|A_{99}A_{100}|=1$ cm.

Tad nogriežņu $A_iA_j$ $(i,j=1,2,\ldots,100)$ viduspunkti var būt 98 punkti $A_2, A_3,\ldots, A_{99}$ (tas ir tādā gadījumā, ja $|A_i A_j|$ ir pāra skaitlis) vai arī kāds no 99 punktiem – nogriežņu $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4,\ldots$, $A_{98}A_{99}$, $A_{99}A_{100}$ viduspunktiem (tas ir tādā gadījumā, ja $|A_i A_j|$ ir nepāra skaitlis).

Tātad pavisam ir 98+99=197 dažādi viduspunkti (skat. 90.zīm.).




**90.zīm.**

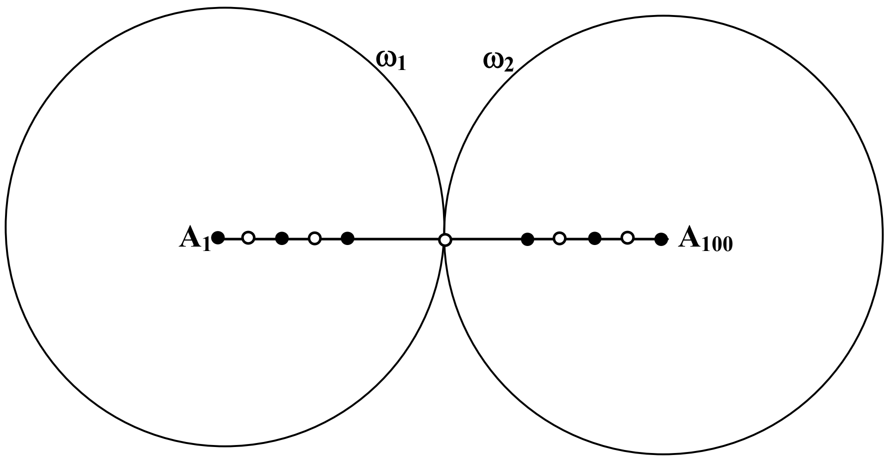
Tagad pierādīsim punktu b. Mums jāpierāda, ka, lai kā arī uz taisnes izvietotu 100 punktus $A_1$, $A_2$, $A_3$,…, $A_{100}$, starp nogriežņu $A_iA_j$ (i,j=1,2,…,100) viduspunktiem ir vismaz 197 dažādi. Turklāt nepietiek to pierādīt kādam speciālam punktu izvietojumam, bet jādod pierādījums, kas aptvertu visus iespējamos izvietojumus.

Atzīmēsim uz taisnes punktus $A_1$, $A_2$, $A_3$,…, $A_{100}$ tā, ka $A_1$ ir pats kreisējais, bet $A_{100}$ – pats labējais no tiem. Novilksim riņķa līniju $\omega_1$ ar centru $A_1$ un rādiusu $\frac{1}{2}|A_1A_{100}|$.

Tā kā $|A_1A_2|<|A_1A_{100}|$, $|A_1A_3|<|A_1A_{100}|$,…, $|A_1A_{99}|<|A_1A_{100}|$, tad nogriežņu $A_1A_2$, $A_1A_3$,…, $A_1A_{99}$ viduspunkti, kas visi ir dažādi, atrodas šīs riņķa līnijas iekšpusē; to pavisam ir 98. Novelkot riņķa līniju $\omega_2$ ar centru $A_{100}$ un rādiusu $\frac{1}{2}|A_1A_{100}|$, līdzīgi iegūstam, ka 98 nogriežņu $A_{100}A_2$, $A_{100}A_3$,…, $A_{100}A_{99}$ viduspunkti, kas visi ir dažādi, atrodas $\omega_2$ iekšpusē. Tā kā $\omega_1$ un $\omega_2$ pieskaras, bet to ierobežotajiem riņķiem nav kopēju punktu, tad neviens no 98$\omega_1$ iekšpusē esošajiem punktiem nesakrīt ne ar vienu no $\omega_2$ iekšpusē esošajiem punktiem; tātad

98+98=196 dažādi viduspunkti.

Beidzot, $|A_1A_{100}|$ viduspunkts ir $\omega_1$ un $\omega_2$ pieskaršanās punkts, tātad tas atšķiras no visiem 196 iepriekš uzrādītajiem viduspunktiem. Tātad esam pierādījuši, ka ir vismaz 197 dažādi viduspunkti (skat. 91.zīm.).

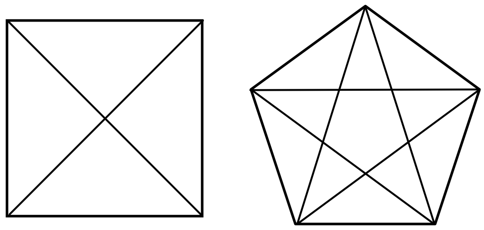



**91.zīm.**

Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt, ka mazāk par 197 viduspunktiem nevar iegūt arī tad, ja punktiem $A_1$, $A_2$, $A_3$,…, $A_{100}$ nav noteikti jāpieder pie vienas taisnes.

**6.8.** <u>Atbilde</u>. Izliektam daudzstūrim, kura visas diagonāles ir vienāda garuma var būt 4 vai 5 malas.

<u>Risinājums</u>. Viegli saskatīt, ka regulāram četrstūrim (kvadrātam) un regulāram piecstūrim visas diagonāles ir vienāda garuma; tātad daudzstūrim, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, var būt 4 vai 5 malas (skat. 92.zīm.).



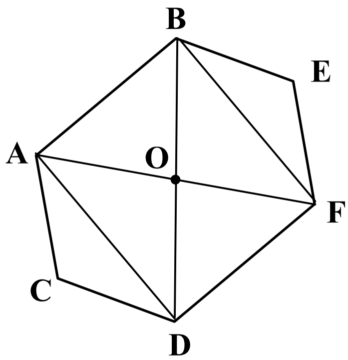
**92.zīm.**

Ja mēs vienosimies uzskatīt, ka "visas trijstūra diagonāles ir vienāda garuma" (jo trijstūrim diagonāļu nemaz nav), tad jāatzīst, ka tādam daudzstūrim var būt arī 3 malas.

Pierādīsim, ka citāds malu skaits daudzstūrim, kura visas diagonāles ir vienāda garuma, nevar būt.

Pieņemsim, ka kādam izliektam daudzstūrim ir vismaz 6 malas (tātad arī vismaz 6 virsotnes), un visas tā diagonāles ir vienāda garuma. Izvēlēsimies vienu tā malu AB. Apzīmēsim ar C virsotnei A blakus esošo virsotni (to, kas nav B!), bet ar D - virsotnei C blakus esošo virsotni (to, kas nav A!). Līdzīgi ar E apzīmējam to virsotnei B blakus esošo virsotni, kas nav A, bet ar F – to virsotnei E blakus esošo virsotni, kas nav B.

Tā kā daudzstūrim ir vismaz 6 virsotnes, tad D un F ir dažādas virsotnes (skat. 93.zīm.).




**93.zīm.**

Tā kā AD, AF, BD un BF ir sākotnējā daudzstūra diagonāles, tad

AD=AF=BD=BF.

Tomēr tas nav iespējams. Tiešām, apzīmēsim BD un AF krustpunktu ar O; tad no tā, ka trijstūrī katra mala īsāka par abu pārējo malu summu, seko, ka

AO+OD>AD

BO+OF>BF.

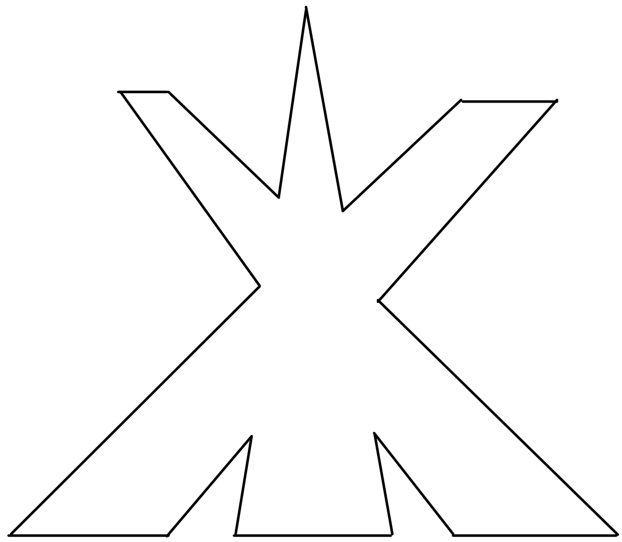
Saskaitot nevienādības, iegūstam, ka

(AO+OF)+(BO+OD)>AD+BF, jeb

AF+BD>AD+BF, kas ir pretrunā ar vienādībām
AF=BD=AD=BF.

**6.9.** Atbilde. Jā, eksistē.

Risinājums. Tāds septiņpadsmitstūris redzams 94. zīmējumā.



**94.zīm.**

Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt, ka tāda trīspadsmitstūra, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, nav, bet, ja n≥14, tad noteikti eksistē tāds n-stūris, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

**6.10.** Pierādījums. Pierādīsim, ka Juris var panākt, lai katrā kaudzē paliktu 1 akmens.

Ja katrā kaudzē ir vairāk nekā 1 akmens, Juris ņem no katras kaudzes pa 1 akmenim un pievieno šos akmeņus savām rezervēm. Tā viņš rīkojas tik ilgi, kamēr vienā no kaudzēm paliek 1 akmens. (Varēja gadīties, ka tā bija jau pašā sākumā; tad augstāk aprakstītās operācijas Juris neizdara). Ja arī otrā kaudzē ir 1 akmens, tad mērķis sasniegts. Pieņemsim, ka otrā kaudzē ir n akmeņu, n>1.

Tagad Juris no savām rezervēm pievieno tai kaudzei, kurā ir 1 akmens, vēl vienu akmeni (viņš to noteikti var izdarīt, jo vismaz viens akmens viņam rezervē ir), un pēc tam paņem no katras kaudzes pa akmenim, pievienodams tos savām rezervēm. Paliek divas kaudzes, no kurām vienā ir 1 akmens, bet otrā n-1 akmens. Ja n-1>1, Juris atkārto nupat norādītās operācijas un iegūst vienā kaudzē 1 akmeni, otrā n-2 akmeņus: līdzīgi turpinot, pēc galīga soļu skaita kaudzē paliks viens akmens.

Ievērosim, ka sākotnējais rezerves akmens Jurim bija vajadzīgs vienīgi tad, ja no paša sākuma kādā kaudzē bija tieši viens akmens.