"Profesora Cipariņa klubs" 1978./79. m.g.

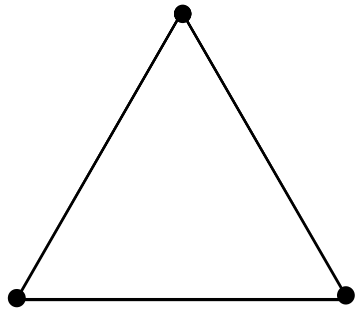
1. nodarbība

1.1. Vai skaitli $\underbrace{100...01}_{1978 \, nulles}$ var iegūt, saskaitot trīs pēc kārtas ņemtus veselus skaitļus, vai arī, sareizinot trīs pēc kārtas ņemtus veselus skaitļus?

1.2. Vai var pastāvēt izliekts daudzstūris ar 15 diagonālēm?

1.3. Dota taisne. Uz tās atzīmēti 2 punkti A un B tā, ka attālums starp A un B ir 1 cm. Izmantojot tikai cirkuli, uz taisnes jāatzīmē trešais punkts C, kura attālums no A ir 88 cm. Kā to izdarīt? Centieties atrast tādu risinājumu, lai cirkuli vajadzētu izmantot pēc iespējas mazāk reižu.

1.4. Uz papīra lapas bija uzzīmēts regulārs trijstūris. Tad uz tā virsotnēm uzkrita tintes traipi, kas nosedza nelielus apgabalus ap tām (skat. 1.zīm.).



4.zīm.

Kā atrast trijstūra centru, ja apgabalos, kuros uzkrituši traipi, nekādas līnijas vilkt nevar?

1.5. Uz tāfeles bija uzrakstīta ciparu un zvaigznīšu virkne

1*2*3*4*5*6*7*8*9.

Andris šajā virknē dažas zvaigznītes aizvietoja ar "+", bet citas ar "-", izpildīja darbības un ieguva rezultātu 16. Juris dažas "+" zīmes aizstāja ar "-", bet dažas "-" zīmes aizstāja ar "+", izpildīja darbības un ieguva rezultātu 21.

Pierādīt, ka vismaz viens no zēniem, izpildot darbības, ir kļūdījies.

2. nodarbība

2.1. Kāds veselais skaitlis jāsaskaita ar tā ciparu summu, lai iegūtu 328? Atrast šo veselo skaitli.

2.2. Šokolādes tāfelīte sastāv no 10x20 maziem kvadrātiņiem. Kāds ir mazākais laušanu skaits, lai tāfelīti sadalītu 200 kvadrātiņos? Vienā reizē drīkst lauzt tikai vienu šokolādes gabalu. Ik reizes jālauž pa taisnu līniju.

2.3. Vai eksistē desmitstūris, kuru var pārklāt ar 2 trijstūriem tā, ka neviens trijstūru punkts nav ārpus desmitstūra?

2.4. Vai skaitlis, kura cipari ir 14 vieninieki un 13 nulles, var būt vesela skaitļa kvadrāts?

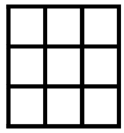
2.5. 36 punkti izvietoti kvadrāta veidā 6 rindās un 6 kolonās. Kāds ir mazākais posmu skaits lauztai līnijai, kas iet caur visiem 36 punktiem? Lauztās līnijas posmi var iet tikai paralēli kvadrāta malām.

2.6. Pamēģiniet uzminēt, pēc kāda likuma tiek veidota virkne:

$$2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 9;\ 13;\ 19;\ 28;\ 42;\ 63;\ 94;\ldots\ .$$

2.7. Dots daudzstūris ar perimetru P. Pierādīt, ka no tā malām var sastādīt divus nogriežņus, kuru garumu starpība nepārsniedz $\frac{P}{3}$. Katrai malai jābūt izmantotai vienā nogrieznī.

2.8. Kvadrāts sastāv no 3x3 rūtiņām (skat. 2.zīm.). Katrā tā rūtiņā ierakstīts vesels skaitlis. Katrā kolonā, katrā rindiņā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati. Pierādīt, ka šī summa dalās ar 3.



2.zīm

2.9. Jāatrod četras veselu skaitļu kopas, kas apmierina šādas prasības:

a) katra kopa satur 3 skaitļus;

b) katru veselu skaitli no 0 līdz 80 var izteikt kā četru saskaitāmo summu, kur katrs saskaitāmais ir no savas kopas. Kopām var būt kopēji elementi.

Pietiek uzrādīt vienu šādu kopu sistēmu.

2.10. Četrciparu skaitli dalām ar tā ciparu summu. Kāda var būt vislielākā dalījuma vērtība?

3. nodarbība

3.1. Izvietot pa apli skaitļus 1, 2, 3,…, 9 tā, lai nekādu divu blakus esošu skaitļu summa nedalītos ne ar 3, ne ar 5, ne ar 7. Pietiek uzrādīt vienu šādu skaitļu izvietojumu.

3.2. Cik ir tādu veselu skaitļu no 1 līdz 1000000, kas nedalās ne ar 2, ne ar 3, ne ar 5?

3.3. No cipariem 0, 1, 2, 3,…, 9 izveidot piecus divzīmju skaitļus, lai to reizinājums būtu lielākais iespējamais. Katru ciparu drīkst izmantot tieši vienu reizi.

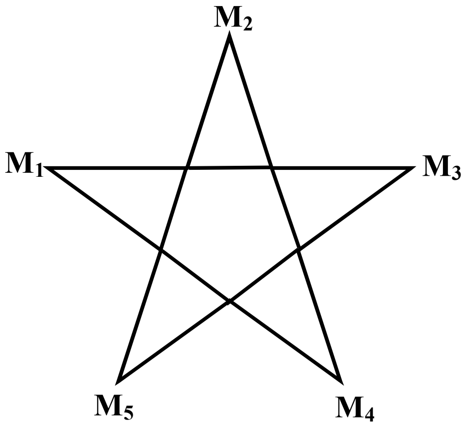
3.4. No kubiņiem ar izmēriem 1x1x1 izveidots taisnstūra paralēlskaldnis ar izmēriem 10x20x30. Tā ārpuse nokrāsota. Cik ir tādu kubiņu, kuriem nokrāsota kaut viena skaldne?

3.5. Gar tramvaja līniju ar nemainīgu ātrumu iet gājējs. Ik pēc 5 minūtēm viņš sastop pretī braucošo tramvaju, un ik pēc 7 minūtēm kāds tramvajs viņu apdzen. Ar kādu intervālu tramvaji atiet no galapunkta?

3.6. Turnīrā piedalījās 5 šahisti. Katrs dalībnieks ar ikvienu no pārējiem izspēlēja vienu partiju. Par uzvaru spēlētājs iegūst 1 punktu, par neizšķirtu - $\frac{1}{2}$ punktu, par zaudējumu – 0 punktus.

Zināms, ka visi šahisti ieguva dažādu punktu skaitu. Uzvarētājs ne reizi nenospēlēja neizšķirti, otrās vietas ieguvējs ne reizi nezaudēja, bet ceturtās vietas ieguvējs ne reizi neuzvarēja. Uzzināt visu partiju rezultātus.

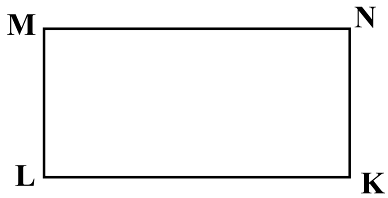
3.7. Pierādīt, ka leņķu summa pie 3. zīmējumā attēlotās piecstaru zvaigznes virsotnēm M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ir 180^0.



3.zīm.

3.8. Izliekta četrstūra iekšpusē atrodas punkts. Vai var gadīties, ka šī punkta attālumu summa līdz četrstūra virsotnēm ir lielāka par četrstūra perimetru?

3.9. Dota taisnstūrveida metāla plāksnīte ar izmēriem 10 cm x 20 cm. To nolika uz papīra un ar zīmuli apvilka tās kontūru MNKL (skat. 4.zīm.). Atrast uz papīra iegūtā taisnstūra centru, izmantojot tikai doto plāksnīti un zīmuli.

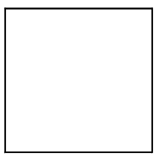


4.zīm.

3.10. 1 m x 1 m laukums sadalīts 1 cm x 1 cm lielos kvadrātiņos. Katrs no tiem nokrāsots baltā, melnā, sarkanā vai zaļā krāsā, pie tam diviem vienā krāsā nokrāsotiem kvadrātiņiem nav ne kopīgas malas, ne kopīgas virsotnes. Cik ir balto kvadrātiņu?

4. nodarbība

4.1. Dots kvadrāts (skat. 5.zīm.). Kā to sagriezt 6, 7, 8 kvadrātos? Daži no iegūtajiem kvadrātiem var būt savā starpā kongruenti.



5.zīm.

4.2. Atrast 11 pēc kārtas sekojošus veselus pozitīvus skaitļus, starp kuriem nav neviena pirmskaitļa. Pietiek uzrādīt <u>vienu</u> šādu skaitļu komplektu.

4.3. Atrast skaitļa $3^{1978}+4^{1978}+6^{1978}$ pēdējo ciparu.

4.4. Skaitļu virkni veido šādi: tās pirmais loceklis ir 7, bet katru nākamo locekli atrod, iepriekšējā locekļa kvadrāta ciparu summai pieskaitot 1. tātad virknes pirmie locekļi ir:

7; 14; 17; 20; 5;… .

Atrast kāds skaitlis šajā virknē ir 1978-ajā vietā.

4.5. Seši draugi vienlaicīgi uzzina katrs vienu jaunu ziņu (katrs citu). Ikvienam no viņiem ir mājās telefons. Pierādīt, ka viņi var tā noorganizēt telefona sarunas savā starpā, ka pēc 8 sarunām katrs no viņiem zinās visas 6 jaunās ziņas.

4.6. Kāda trijstūra mediānu garumu summa ir 3. Kāda var būt šī trijstūra augstumu garumu vislielākā iespējamā summa?

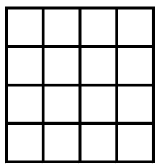
4.7. Vai eksistē tāda slēgta lauzta līnija, kas katru savu posmu krusto tieši 1 reizi un kurai ir

a) 6 posmi;

b) 1978 posmi;

c) 1979 posmi?

4.8. Tabulas izmēri ir 4x4 rūtiņas (skat. 6.zīm.).



6.zīm.

Nokrāsot tajā 7 rūtiņas zilā krāsā tā, lai izpildītos nosacījums: lai kādas 2 kolonas un 2 rindiņas pārkrāsotu melnā krāsā, noteikti paliks vismaz viena neizkrāsota zila rūtiņa.

4.9. Pierādīt, ka trijstūrī pret garāko malu atrodas īsākais augstums un mediāna.

4.10. Rindā nostādīti 1978 astotās klases skolēni. Katram no viņiem priekšā stāv septītās klases audzēknis, kurš par attiecīgo astotās klases skolēnu īsāks. Tātad septītās klases audzēkņi arī veido rindu, kurā ir 1978 skolēni. Astotās klases audzēkņus rindā pārkārtoja tā, lai viņi stāvētu augumu dilšanas kārtībā. Arī septītās klases skolēnus rindā pārkārtoja tāpat. Pierādīt, ka pēc šīm pārkārtošanām atkal katram astotās klases audzēknim priekšā stāvošais septītās klases skolēns ir par viņu īsāks. (Visu skolēnu augumi ir dažādi.)

5. nodarbība

5.1. Atrast četrus pēc kārtas ņemtus veselus pozitīvus skaitļus, kuru reizinājums ir 255124.

5.2. Saskaitot veselu pozitīvu divzīmju skaitli N ar skaitli, kas pierakstīts ar tiem pašiem cipariem, tikai pretējā kārtībā, iegūst vesels skaitļa kvadrātu. Atrast visas iespējamās N vērtības.

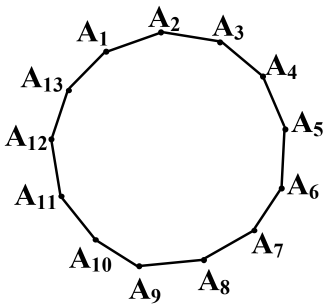
5.3. Dots, ka a, b, c – skaitļi, un $a+b+c=0$. Pierādīt, ka $ab+ac+bc\leq 0$.

Kad pastāv vienādība $ab+ac+bc=0$?

5.4. Vai iespējams novietot plaknē 9 punktus tā, lai varētu novilkt 10 dažādas taisnes, no kurām katra saturētu tieši 3 no šiem punktiem?

5.5. Plaknē atzīmēti n punkti, n>3. Pierādīt, ka tos noteikti var sadalīt 2 grupās tā, ka nav iespējams novilkt taisni, kas atdalītu vienu grupu no otras.

5.6. Regulāram trīspadsmitstūrim (skat. 7.zīm.) katra virsotne nokrāsota vai nu baltā, vai melnā krāsā. Pierādīt, ka var atrast trīs virsotnes, kas nokrāsotas vienā krāsā un atrodas vienādsānu trijstūra virsotnēs.



7.zīm.

5.7. Doti 17 veseli pozitīvi skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$. Zināms, ka pastāv sakarības

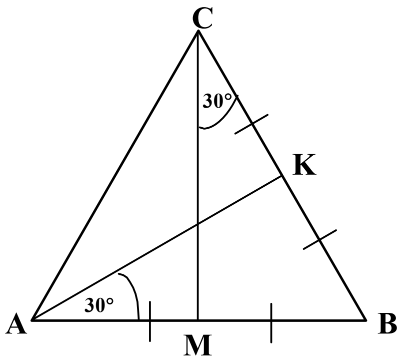
$$a_1^{a_2} = a_2^{a_3} = a_3^{a_4} = \ldots = a_{15}^{a_{16}} = a_{16}^{a_{17}} = a_{17}^{a_1}.$$

Pierādīt, ka $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{16}=a_{17}$.

5.8. Uz kongresu atbraukuši 1000 delegāti no dažādām valstīm. Katrs delegāts zina vairākas valodas. Ir zināms, ka jebkuri 3 delegāti savā starpā var aprunāties bez pārējo palīdzības (pie tam var gadīties, ka vienam no viņiem jābūt par tulku sarunā starp abiem pārējiem). Pierādīt, ka delegātus var viesnīcas divvietīgajos numuros izvietot tā, lai katrā numurā dzīvotu delegāti, kas savā starpā var sarunāties.

5.9. Pierādīt, ka starp 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem noteikti atradīsies vismaz viens tāds, kas ir mazāks par savu pozitīvo dalītāju summu (pašu skaitli pie dalītājiem nepieskaita).

5.10. Trijstūrī ABC novilktas mediānas AK un CM. Dots, ka $\angle BAK=\angle BCM=30^0$ (skat. 8.zīm.).



8.zīm.

Pierādīt, ka ΔABC ir:

a) vienādsānu trijstūris;

b) regulārs trijstūris.

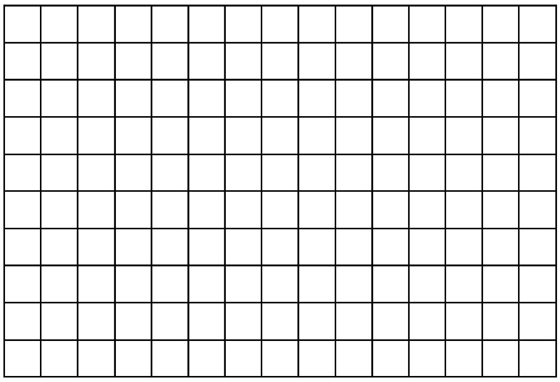
6. nodarbība

6.1. Kārtības sargu vienībā ir 7 cilvēki. Katru vakaru uz dežūru dodas patruļa trīs cilvēku sastāvā. Vai iespējams noorganizēt dežūras kādā laika posmā tā, lai katri divi vienības locekļi būtu kopīgi gājuši dežūrēt tieši vienu vakaru? Kāda būtu atbilde uz šo jautājumu, ja vienībā būtu 8 cilvēki?

6.2. Andris iedomājas četrus pozitīvus veselus viencipara skaitļus x_1, x_2, x_3 un x_4. Jānis izvēlas četrus veselus (ne noteikti pozitīvus un viencipara) skaitļus a_1, a_2, a_3 un a_4, pasaka tos Andrim un jautā, kāda ir izteiksmes $x_1a_1++x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4$ skaitliskā vērtība.
(Piemēram, ja Andris iedomājies skaitļus 7, 3, 9, 2, bet Jānis izvēlas skaitļus 1, 2, 0, -1, tad kā atbildi no Andra viņš saņems skaitli 11.)
Uzzinājis šo vērtību, Jānis izvēlas citus četrus veselus skaitļus b_1, b_2, b_3 un b_4 un jautā Andrim, kāda ir izteiksmes $x_1b_1++x_2b_2+x_3b_3+x_4b_4$ skaitliskā vērtība. Pēc tam Jānis izvēlas citus veselus skaitļus c_1, c_2, c_3 un c_4, utt.
Kāds ir mazākais jautājumu skaits, lai Jānis varētu atrast visus četrus Andra iedomātos skaitļus?

6.3. Dots, ka x – vesels pozitīvs skaitlis, un skaitļa x ciparu summa vienāda ar skaitļa 2x ciparu summu. Pierādīt, ka x dalās ar 9.

6.4. Uz rūtiņu papīra uzzīmēts taisnstūris, kura izmēri ir 10x15 rūtiņas un malas iet pa rūtiņu līnijām (skat. 9.zīm.).

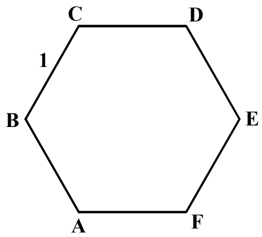


9.zīm.

Vai var uzzīmēt tādu taisnes nogriezni, kas pilnīgi atrodas taisnstūra iekšpusē, neiet ne caur vienas rūtiņas virsotni un kam ir kopīgi punkti ar 25 rūtiņām? Bet ar 24 rūtiņām?

6.5. Kāpnes sastāv no 10 pakāpieniem. Jānis ar vienu soli var uzkāpt 1 pakāpienu vai 2 pakāpienus. Cik dažādos veidos Jānis var uzkāpt pa kāpnēm?

6.6. Regulāra sešstūra malas garums ir 1 (skat. 10.zīm.). Tā iekšpusē ņemts punkts M un ar taisnes nogriežņu palīdzību savienots ar visām sešstūra virsotnēm. Tādējādi sešstūris tiek sadalīts sešos trijstūros. Pierādīt, ka starp tiem ir vismaz viens trijstūris, kuram malas garums nav mazāks par 1.



10.zīm.

6.7. Uz taisnes atzīmēti 100 punkti. Aplūkojam viduspunktus visiem tiem nogriežņiem, kam abi galapunkti atrodas atzīmētajos punktos. Kāds ir mazākais šādu viduspunktu daudzums? (Ja vairāki viduspunkti sakrīt, tos uzskata par vienu.)

6.8. Cik malu var būt izliektam daudzstūrim, kura visas diagonāles ir vienāda garuma?

6.9. Vai eksistē tāds septiņpadsmitstūris, ka uz katras taisnes, uz kuras atrodas viena tā mala, atrodas arī vēl cita? (Uzskatām, ka mala atrodas uz taisnes, ja visi šīs malas punkti ir arī taisnes punkti.)

6.10. Dotas divas akmeņu kaudzes. Jura rīcībā ir vēl viens rezerves akmens. Ar vienu gājienu Juris var vai nu pievienot vienai kaudzei no savām akmeņu rezervēm tik daudz akmeņu, cik šajā kaudzē jau ir (ja viņa rezerves atļauj to izdarīt), vai arī paņemt no abām kaudzēm pa vienam akmenim (ja katrā no tām ir vismaz viens akmens) un pievienot šos akmeņus savām rezervēm. Pierādīt, ka Juris var panākt, lai abās kaudzēs būtu vienāds skaits akmeņu.