"Profesora Cipariņa klubs" 1980./81. m.g.

1. nodarbības atrisinājumi

1.1. Pierādījums. Skaitli 30 viegli izsacīt, izmantojot trīs vai četrus pieciniekus:

$$30=5\cdot5+5 \qquad (1)$$

$$30=(5+\frac{5}{5})\cdot5 \qquad (2)$$

Izmantojot (1) un (2), skaitli 30 varam izsacīt ar piecu un sešu piecinieku palīdzību:

$$30=5\cdot5+5+(5-5) \qquad (3)$$

$$30=(5+\frac{5}{5})\cdot5+(5-5) \qquad (4)$$

Izmantojot (3) un (4), skaitli 30 varam izsacīt ar septiņu un astoņu piecinieku palīdzību:

$$30=5\cdot5+5+(5-5)+(5-5)$$

$$30=(5+\frac{5}{5})\cdot5+(5-5)+(5-5)$$

Skaidrs, ka, līdzīgi turpinot, mēs katram naturālam $n\geq3$ iegūsim izteiksmi, kas 30 izsaka ar n piecinieku, iekavu un aritmētisko darbību zīmju palīdzību:
ja n – nepāru skaitlis, tad

$$30 = 5\cdot5+5+\underbrace{(5-5)+...+(5-5)}_{\frac{n-3}{2} reizes}$$

ja n –pāru skaitlis, tad

$$30 = (5+\frac{5}{5})\cdot5+\underbrace{(5-5)+...+(5-5)}_{\frac{n-4}{2} reizes}$$

1.2. Atbilde. Vēl jānotiek 9 spēlēm.

Risinājums. Katrai no sešām komandām pavisam jāizspēlē 5 spēles. Tā kā pašreiz katra komanda izspēlējusi 2 spēles, tad katrai komandai vēl jāizspēlē 5-2=3 spēles.

Pieņemsim, ka katra komanda sastāda sarakstu, kurā ieraksta visu savu aizvadīto spēļu rezultātus. Tad katrai komandai savā sarakstā jāizdara vēl trīs ieraksti, tātad – pavisam vēl $6\cdot3=18$ ieraksti. Tā kā pēc katras spēles tiek izdarīti 2 ieraksti (pa vienam ierakstam izdara katra komanda, kas šajā spēlē piedalījušies), tad vēl jānotiek $\frac{18}{2}=9$ spēlēm.

Uzdevumu varēja risināt arī no otra gala. Pēc tam, kad turnīrs beidzies, katra komanda būs izspēlējusi 5 spēles, tātad pavisam sarakstos būs izdarīti $6\cdot5=30$ ieraksti. Tātad būs notikušas $\frac{30}{2}=15$ spēles. Pašreiz sarakstos izdarīti $6\cdot2=12$ ieraksti, tātad notikušas $\frac{12}{2}=6$ spēles un vēl jānotiek 15-6=9 spēlēm.

1.3. Pierādījums. Ja visi trīs a, b un c ir dažādi, tad tos var sakārtot augošā secībā. Vispirms pieņemsim, ka a ir vismazākais, bet c – vislielākais no šiem skaitļiem, t.i., a<b<c.

Tad $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ un $\frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, tāpēc

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a} = \frac{3}{a} \qquad (*)$$

Tā kā

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1 \qquad (**)$$

tad no (*) iegūstam, ka $\frac{3}{a} > 1$ un a<3. Tā kā a – naturāls skaitlis, tad vai nu a=1, vai arī a=2. Ja a=1, tad no nosacījuma (**) iegūstam, ka

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0$,

kas nevar būt, jo b un c – pozitīvi skaitļi. Tātad a≠1, un tāpēc a=2. Ievietojot nosacījumā (**) a=2, iegūstam

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \qquad (***)$$

Tā kā b>a, tad b>2. Ja b=3, tad no (***) iegūstam

$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ un c=6.

Ja b≥4, tad c≥5 (jo c>b), un tāpēc

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{9}{20} < \frac{1}{2}$, kas ir pretrunā ar (***). Tātad b≥4 nevar būt, un vienīgais atrisinājums gadījumā, kad a<b<c, ir a=2, b=3, c=6.

Tā kā skaitļi a, b, c pēc lieluma var sakārtoties sešos dažādos veidos (a<b<c, a<c<b, b<a<c, b<c<a, c<a<b, c<b<a), tad uzdevumam ir 6 atrisinājumi, kas iegūstami visos iespējamos veidos vienu no skaitļiem a, b un c izvēloties vienādu ar 2, otru – ar 3, trešo – ar 6.

Eksistē arī tādi naturāli skaitļi a, b, c, d un e, kas apmierina uzdevuma otrās daļas prasības, piemēram,

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806} = 1$.

Par to, ka šāds rezultāts iegūts, skat. 3.1. uzdevuma atrisinājumu.

1.3.1. Pierādījums. Ievērosim, ka ir pareiza identitāte

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)} \qquad (1)$$

Tiešām,

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m(m+1)}=\frac{m}{m(m+1)}+\frac{1}{m(m+1)}=\frac{m+1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}.$$

Atcerēsimies, ka

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1,$$

un pārveidosim saskaitāmo $\frac{1}{6}$, izmantojot formulu (1):

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{6\cdot 7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=1 \qquad (2)$$

Pārveidosim saskaitāmo $\frac{1}{42}$, izmantojot formulu (1):

$$\frac{1}{42}=\frac{1}{43}+\frac{1}{42\cdot 43}=\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}=1 \qquad (3)$$

Līdzīgi vienādībā (3) pārveidojot saskaitāmo ar vislielāko saucēju, iegūsim uzdevuma atrisinājumu, ja n=7, utt. Katru reizi jāpārveido tieši saskaitāmais ar vislielāko saucēju, lai varētu garantēt, ka arī pēc pārveidošanas iegūtajā summā visu skaitļu saucēji būs dažādi (izdarot pārveidojumu pēc formulas (1), daļu saucēji palielinās).

1.3.2. Atbilde. Jā, eksistē.

Pierādījums. Piemēram, ir pareizas vienādības:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}=1 \qquad (*)$$

un

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{77}+\frac{1}{105}=1 \qquad (**)$$

vienādības (*) un (**) iegūtas ar skaitļojamo mašīnu palīdzību. Ir arī pierādīs, ka tad, ja

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=1$ un $x_1<x_2<\ldots<x_n$ – augošā secībā sakārtoti nepāru skaitļi,

$x_n \geq 105$ un $n \geq 9$;

tātad vienādība (**) dod tādu uzdevuma atrisinājumu, kurā lielākais izmantotais nepāru skaitlis ir ar mazāko iespējamo vērtību, bet vienādība (*) – atrisinājumu ar mazāko iespējamo saskaitāmo skaitu.

Mēs redzējām, ka uzdevumam eksistē atrisinājums, ja n=9 (vienādība (*)) un ja n=11 (vienādība (**)).
Kādām citām n vērtībām eksistē atrisinājums? Izsmeļoša atbilde uz šo jautājumu nav zināma. Metodes, ko mēs izmantojām 3.1. uzdevuma risinājumā, ļauj iegūt atrisinājumus visiem naturāliem n, kuri izsakāmi formā

$$n=8k+1 \qquad (1)$$

vai formā

$$n=10k+1 \qquad (2)$$

ja k – jebkurš naturāls skaitlis.
Pierādīsim, piemēram, ka uzdevumam eksistē atrisinājums, ja n ir formā (1). Ja k=1, tad n=9, un atrisinājumu dod vienādība (*). Parādīsim, kā, izejot no vienādības (*), iegūt atrisinājumu, ja n=17 (kas iegūstams, ja formulā (1) ievieto k=2).
Ievērosim, ka pēc formulas (*)

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}\cdot 1=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231\cdot 3}+\frac{1}{231\cdot 5}+\frac{1}{231\cdot 7}+\frac{1}{231\cdot 9}+\frac{1}{231\cdot 11}+\frac{1}{231\cdot 15}+$$
$$+\frac{1}{231\cdot 31}+\frac{1}{231\cdot 45}+\frac{1}{231\cdot 231} (***)$$

Līdzīgi, vienādībā (***) pēdējo locekli uzrakstot kā $\frac{1}{231\cdot 231}\cdot 1$ un aizstājot 1 saskaņā ar formulu (*), iegūsim uzdevuma atrisinājumu, ja n=25, kas atbildīs formulai (1), ja k=3 – viena pēdējā locekļa vietā vienādībā (***) parādīsies 9 locekļi, t.i., to skaits palielināsies par 8, utt.
Pierādiet patstāvīgi, ka uzdevumam neeksistē atrisinājums, ja n – pāru skaitlis, kā arī to, ka tam eksistē atrisinājums, ja n – nepāru skaitlis, kas lielāks par 23 (šis uzdevums ir grūts).
Nav grūti pierādīt, ka 3.2. uzdevumam eksistē atrisinājums, ja n=17, 19, 21. Tātad vienīgās n vērtības, par kurām nav zināms, vai pie tām 3.2. uzdevumam eksistē atrisinājums, ir 13,15 un 23.

1.3.3. Atbilde. Nē, neeksistē.
Risinājums. Pieņemsim, ka tādi skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eksistē. Pāriesim vienādības

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2} \qquad (*)$$

kreisajā pusē uz kopīgu saucēju $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, apzīmējot iegūto skaitītāju ar S. Tad pastāv vienādība

$$\frac{S}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \frac{1}{2} \text{ jeb}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 2S \qquad (**)$$

Bet $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ kā nepāra skaitļu reizinājums ir nepāra skaitlis, tāpēc vienādība (**) nevar pastāvēt – 2S ir pāra skaitlis! Tātad arī vienādība (*) ar nepāra x_1, $x_2, \ldots, x_n$ nevar pastāvēt.

1.4. Atbilde. Jānis pareizi atbildēja uz trim jautājumiem.

Risinājums. Apzīmēsim to jautājumu skaitu, uz kuriem Jānis atbildējis pareizi, ar x, bet to jautājumu skaitu, uz kuriem viņš atbildējis nepareizi – ar y. Tad par pareizi atbildētajiem jautājumiem Jānis ieguvis 7x punktus, bet par nepareizi atbildētajiem jautājumiem viņam atskaitīti 4y punkti. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem

$7x-4y=1$,

no kurienes iegūstam

$$x = \frac{4y+1}{7} \qquad (*)$$

Skaidrs, ka x un y – veseli skaitļi, kas nav mazāki par 0 un lielāki par 16. Ievietosim formulā (*) y vietā skaitļus 0, 1, 2, 3,…, 16 un pārbaudīsim, kad x iznāk vesels skaitlis.

Redzam, ka x iznāk vesels skaitlis divos gadījumos: ja y=5 un ja y=12. Tomēr, ja y=12, tad x=7, un tad x+y=19, bet Jānim vispār tika uzdoti tikai 16 jautājumi, tāpēc noteikti jāpastāv nevienādībai $x+y \le 16$. Tātad noteikti y=5, x=3 (te $x+y=8<16$), un Jānis pareizi atbildējis uz trim jautājumiem, nepareizi uz pieciem, bet uz astoņiem jautājumiem nemaz nav atbildējis.

1.5. Atbilde. Pavisam ir 16 dažādi trijstūri.

Risinājums. Apzīmēsim trijstūra malu garumus ar x cm, y cm un z cm; tad

$$x+y+z=25 \qquad (*)$$

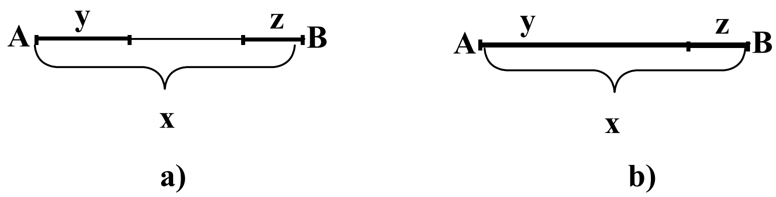
Turklāt pieņemsim, ka

$$x \ge y \ge z \qquad (**)$$

Ievērosim, ka ne katri trīs skaitļi x, y un z, kas apmierina vienādību (*) un nevienādību (**), var būt trijstūra malu garumi: lai tā būtu, jāizpildās vēl nevienādībai

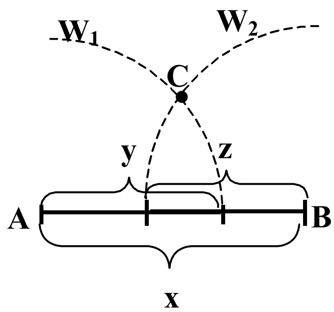
$$x < y+z \qquad (***)$$

Tiešām, ja $x \ge y+z$, tad trijstūris ar malu garumiem x, y un z nepastāv (skat. 56.zīm.).



56.zīm.

Ja turpretī x<y+z, tad ņemot nogriezni AB ar garumu x un velkot riņķa līniju ω_1 ar centru A un rādiusa garumu y, kā arī riņķa līniju ω_2 ar centru B un rādiusa garumu z, ω_1 un ω_2 krustojas punktā C, un trijstūris ABC ir meklējamais (skat. 57.zīm.).



57.zīm.

Tātad mums jānoskaidro, cik veidos var izvēlēties veselus pozitīvus skaitļus x, y un z tā, lai tie apmierinātu vienādību (*) un nevienādības (**) un (***):

$x+y+z=25$ (*)

$x \geq y \geq z$ (**)

$x<y+z$ (***)

No (*) un (**) izriet, ka $3x \geq 25$, tātad $x \geq 8\frac{1}{3}$; tā kā x – vesels skaitlis, tad iegūstam, ka
$x \geq 9$ (1).

No (*) un (***) izriet, ka $2x<25$, tātad $x < 12\frac{1}{2}$; tā kā x – vesels skaitlis, tad $x \leq 12$ (2).
No (1) un (2) izriet, ka x var pieņemt vienīgi vērtības 9, 10, 11 un 12.
Aplūkosim visus šos gadījumus pēc kārtas:

a) x=9; tad no (*) y+z=16. Tā kā x≥y, tad y≤9.
Ja y=9, tad z=7; tā kā 7<9, tad visi nosacījumi no (*) līdz (***) apmierināti. Ja y=8, tad z=8; tā kā 8≤8, tad atkal no (*) līdz (***) apmierināti. Ja y<8, tad z=16-y>8, un iznāk, ka z>y, kas ir pretrunā ar (**).
Tātad a) gadījumā ir tikai divi trijstūri (9;9;7) un (9;8;8).

b) x=10; tad no (*) y+z=15. Spriežot kā a) gadījumā, iegūstam trīs atbildes:
y=10, z=5;
y=9, z=6;
y=8, z=7.

c) x=11; tad no (*) y+z=14. Iegūstam 5 atbildes:
y=11, z=3;
y=10, z=4;
y=9, z=5;
y=8, z=6;
y=7, z=7.

d) x=12; tad no (*) y+z=13. Iegūstam 6 atbildes:
y=12, z=1;
y=11, z=2;
y=10, z=3;
y=9, z=4;
y=8, z=5;
y=7, z=6.
Tātad pavisam ir 16 dažādi trijstūri ar uzdevumā prasītajām īpašībām.
Interesanti izpētīt uzdevumu vispārīgā veidā:
cik ir dažādu trijstūru ar perimetru n (n – vesels skaitlis), kuriem visu triju malu garumi ir veseli skaitļi?
Apzīmēsim šo skaitu ar T(n). Acīmredzot
T(1)=T(2)=0,
T(3)=1,
T(4)=0,
T(5)=1.
Ir spēkā šāda teorēma (to pierādīt ir stipri sarežģīti arī vecāko klašu skolēniem):
ja n ir pāra skaitlis, kas nav mazāks par 4, un ir izsakāms formā n=12k+r, kur k un r – veseli skaitļi, pie tam 4≤r≤14,

$$T(n) = \frac{n^2 - r^2}{48} + T(r); \qquad (3)$$

ja n – nepāra skaitlis, kas nav mazāks par 3, tad

$$T(n)=T(n+3). \qquad (4)$$

No šīs teorēmas, piemēram, izriet, ka T(25)=T(28).
Tā kā pēc mūsu iepriekšējā risinājuma T(25)=16, tad arī T(28)=16.
Otrs piemērs: tā kā 54=12·4+6, tad pēc formulas (3)

$$T(54) = \frac{54^2 - 6^2}{48} + T(6) = 60 + T(6),$$

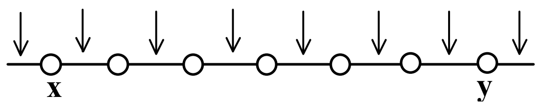
pēc formulas (4) T(3)=T(6);
tā kā T(3)=1, tad arī T(6)=1,
tātad T(54)=60+T(6)=61.

1.6. Atbilde. Vispār tika izspēlētas 15 spēles. C piedalījās spēlēs. Astotajā spēlē uzvarēja. Piektajā spēlē zaudēja.

Risinājums. Gan šī, gan divu nākošo uzdevumu risinājumos ļoti būtiska ir šāda lemma.

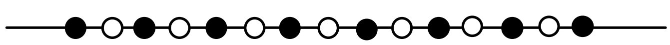
Lemma. Ja aplūkojam divas vienu pēc otras notikušas spēles, tad katrs no trim spēlētājiem piedalījies vismaz vienā no tām.
Tiešām, aplūkojam divas vienu pēc otras notikušas spēles un spēlētāju x. Ja x piedalījies pirmajā no šīm spēlēm, tad viss kārtībā. Ja x nav piedalījies pirmajā spēlē, tad viņš noteikti piedalīsies otrajā, jo aizstās to spēlētāju, kurš pirmajā no abām apskatāmajām spēlēm zaudēja.

Pievērsīsimies tagad uzdevuma risinājumam.
Tā kā B nospēlējis 15 spēles, tad kopējais nospēlēto spēļu skaits nevar būt mazāks par 15.
Noskaidrosim, ko attiecībā uz kopējo spēļu skaitu nosaka tas, ka A nospēlējis 7 spēles.
Attēlosim spēles to notikšanas kārtībā uz taisnes no kreisās puses uz labo. Spēles, kurās A piedalījies, attēlosim ar baltiem aplīšiem, spēles, kurās A nav piedalījies, attēlosim ar melniem aplīšiem. Vispirms novietosim uz taisnes visus baltos aplīšus (skat. 58. zīm.).



58.zīm.

Pašu kreiso no tiem apzīmēsim ar x, pašu labo – ar y.
Pirms spēles x var būt notikusi ne vairāk kā viena spēle bez A piedalīšanās, ja tādu būtu divas vai vairāk, mēs iegūtu pretrunu ar lemmu. Līdzīgi arī pēc spēles y var būt notikusi ne vairāk kā viena spēle bez A piedalīšanās, un starp jebkurām divām pēc kārtas ņemtām spēlēm ar A piedalīšanos var būt notikusi ne vairāk kā viena spēle bez A piedalīšanās. 6. zīmējuma valodā runājot, tas nozīmē, ka katrā no 8 apgabaliem, uz kuriem norāda bultiņa, var pārvietoties ne vairāk kā viens melns aplītis, tātad melno aplīšu nav vairāk kā 8. Tātad kopējo spēļu skaits nevar būt lielāks par 7+8=15.
Tā kā iepriekš mēs noskaidrojām, ka kopējais notikušo spēļu skaits nevar būt mazāks par 15, tad tas ir tieši 15.
No risinājuma izriet, ka notikušo spēļu skaits var būt 15 tikai tajā gadījumā, ja katrā no apgabaliem, uz kuriem 6. zīmējumā norāda bultiņas, atrodas tieši viens (un nevis neviens) melnais aplītis (skat. 59. zīmējumu).



59.zīm.

No uzdevuma nosacījumiem un iegūtā rezultāta izriet, ka B ir piedalījies visās spēlēs. Tas tā var notikt tikai tādā gadījumā, ja vismaz pirmajās 14 spēlēs B ir uzvarējis (ja kādā no pirmajām 14 spēlēm B būtu zaudējis, tad nākošajā viņš nebūtu piedalījies). Katrā no savām 15 spēlēm B spēlēja vai nu ar A, vai ar C. Tā kā A ir nospēlējis 7 spēles, tad C ir nospēlējis 8 spēles (tās, kuras 6.1 zīmējumā apzīmētas ar melniem aplīšiem).

No 6.1 zīmējuma un nupat izdarītajiem spriedumiem izriet, 8. spēlē spēlēja B un A (un uzvarēja B), bet 5. spēlē spēlēja B un C (un zaudēja C).
Pamēģiniet atšifrēt, kāda uzdevuma atrisinājums seko!
Pieņemsim, ka pēc katras spēles tie spēlētāji, kas tajā piedalījušies, izdzer pa glāzei limonādes. Tad pēc tam, kad draugi beiguši spēlēt, kopējais izdzerto glāžu skaits ir 7+10+13=30. Tā kā pēc katras spēles tika izdzertas divas glāzes, tad kopējais izspēlēto spēļu skaits ir 15 (salīdziniet šo spriedumu ar 2. uzdevuma atrisinājumu!).
Attēlosim spēles to notikšanas secībā uz taisnes no kreisās puses uz labo. Spēles, kurās A piedalījies, attēlosim ar baltiem aplīšiem, bet spēles, kurās A nav piedalījies, attēlosim ar melniem aplīšiem. Ievērojot to, ka A piedalījies 7 spēlēs, bet vispār izspēlēts 15 spēles, un spriežot līdzīgi kā 6. uzdevuma atrisinājumā, iegūtam, ka notikušās spēles attēlo 6.1 zīmējums, turklāt A visas spēles zaudējis, jo nekad nav piedalījies divās spēlēs pēc kārtas.
Tā kā 4. spēlē A piedalījās, tad šajā spēlē viņš zaudēja.

1.6.1. Atbilde. A spēlētājs izspēlēja 15 spēles, B – 16 spēles un C – 17 spēles.
Risinājums. Katrā spēlē uzvar viens spēlētājs. Tā kā kopējais uzvaru skaits ir 6+8+10=24, tad pavisam tika izspēlētas 24 spēles. No tām 6 spēlēs spēlētājs A uzvarēja, bet 18 - vai nu nepiedalījās, vai zaudēja.
Apzīmēsim ar z to spēļu skaitu, kurās A nepiedalījās, bet ar y to spēļu skaitu, kurās A zaudēja. Tad

$$x+y=18 \qquad (1)$$

Ja A kādā spēlē zaudēja, tad nākošajā spēlē viņš nepiedalījās (ja vien apskatāmā A zaudētā spēle nav pati pēdējā no vispār spēlētajām – tad nākošās spēles nemaz nav), no šejienes izriet, ka

$$x \geq y-1 \qquad (2)$$

jo aiz katras no y A zaudētajām spēlēm (izņemot varbūt vienu) uzreiz seko A izlaistā spēle. No otras puses, ja A kādā spēlē nepiedalījās, tad iepriekšējā spēlē viņš zaudēja (ja vien apskatāmā A izlaistā spēle nav pati pirmā no vispār spēlētajām – tad iepriekšējās spēles nemaz nav), no šejienes izriet, ka

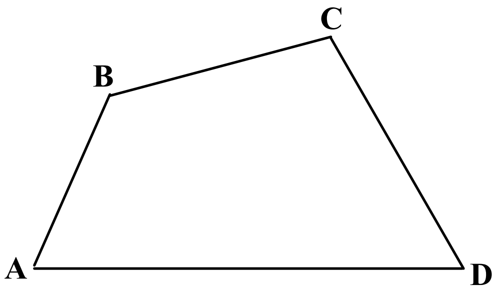
$$y \geq x-1 \qquad (3)$$

jo pirms katras no x A izlaistajām spēlēm (izņemot varbūt vienu) uzreiz notikusi spēle, kurā A zaudējis.
No (2) un (3) iegūstam nevienādību

$$y-1 \leq x \leq y+1,$$

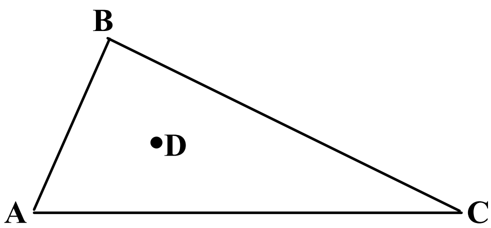
kas norāda, ka x un y savā starpā atšķiras ne vairāk kā par 1. Bet x un y - veseli skaitļi, un x+y=18. Tāpēc noteikti x=9 un y=9; ja, piemēram, x≥10, tad y≤8, un $|x-y| \geq 2$.
Tātad A zaudējis 9 spēles. Tā kā A uzvarēja 6 spēlēs, tad pavisam A izspēlēja 15 spēles.
Līdzīgi var noskaidrot, ka B izspēlēja 16, bet C – 17 spēles. To atstājam pierādīt lasītājam patstāvīgi.

1.7. Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka punktus A, B, C un D var novietot plaknē tā, ka nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes un katrs trijstūris, kura virsotnes atrodas trijos no šiem punktiem ir šaurleņķa. Iespējami 2 gadījumi:
1) A, B, C un D ir izliekta četrstūra virsotnes (skat. 60.zīm.).



60.zīm.

Tad $\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB=360°$, tātad vismaz viens no lielumiem $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ un $\angle DAB$ nav mazāks par 90° (ja tie visi būtu mazāki par 90°, tad to summa būtu mazāka par 360°).
Pieņemsim, ka piemēram, $\angle ABC \geq 90°$, tad trijstūris ABC nav šaurleņķa.
Tātad 1) gadījums nav iespējams.
2) Trīs no dotajiem punktiem ir kāda šaurleņķa trijstūra virsotnes, bet ceturtais atrodas tā iekšpusē (skat. 61.zīm.).



61.zīm.

Tātad $\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB=360°$, un vismaz viens no lielumiem $\angle ADB$, $\angle BDC$ un $\angle CDA$ nav mazāks par 120°. Pieņemsim, ka piemēram, $\angle ADB \geq 120°$, tad trijstūris ADB ir platleņķa trijstūris.
Tātad 2) gadījums nav iespējams.
Līdz ar to mūsu sākotnējais pieņēmums ir nepareizs, un uzdevums atrisināts.

1.8. Atbilde. Šie skaitļi ir 18; 45; 90 un 99.
Risinājums. Patvaļīga naturāla skaitļa n ciparu summu apzīmēsim ar S(n).
Apzīmēsim vienu no mūsu meklējamajiem divciparu skaitļiem ar x. Tad pēc dotā

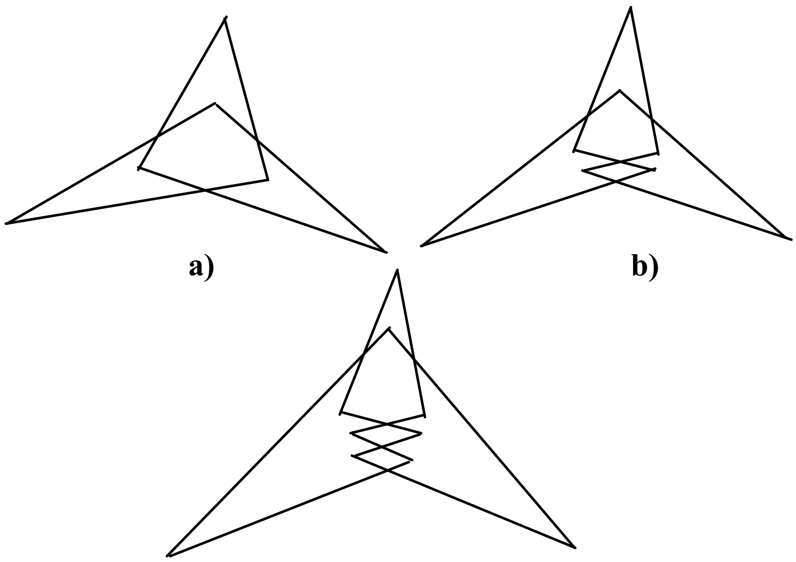
$$S(x)=S(9x) \qquad (1)$$

Bet 9x dalās ar 9, tātad S(9x) dalās ar 9; no šejienes un no vienādības (1) izriet, ka arī S(x) dalās ar 9, tātad arī x dalās ar 9. (Mēs divas reizes izmantojām dalāmības pazīmi ar 9: vesels skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9.)
Visi divciparu skaitļi, kas dalās ar 9, ir 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99. Atliek pārbaudīt, vai to ciparu summas nemainās, reizinot tos ar katru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Vienādības $27\cdot7=189$, $36\cdot8=288$, $54\cdot7=378$, $63\cdot9=567$, $72\cdot9=648$ un $81\cdot9=729$ parāda, ka skaitļi 27, 36, 54, 63, 72 un 81 neder

par uzdevuma atrisinājumiem. Pārbaude rāda, ka nevienam no skaitļiem 18, 45, 90 un 99 ciparu summa nemainās, ja tos reizina ar ar skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vai 9. Tātad uzdevumam ir 4 atrisinājumi: 18, 45, 90 un 99.

1.9. Pierādījums. Apzīmēsim to krustpunktu skaitu, kuros slēgtā lauztā līnija krusto pati sevi, ar n. Katrs tās posms iet caur vienu no šiem n punktiem (ja tas neietu ne caur vienu, tad lauztā līnija šo posmu nekrustotu, ja tas ietu vismaz caur diviem, tad lauztā līnija šo posmu krustotu vismaz divas reizes), un caur katru krustpunktu ietu tieši divi šādi posmi (ja caur kādu krustpunktu ietu vismaz 3 lauztās līnijas posmi, tad katru no tiem lauztā līnija krustotu vismaz divas reizes). Tātad kopējais lauztās līnijas posmu skaits ir 2n – pāra skaitlis.

1.9.1. Risinājums. 62. zīmējumā parādīts, kā konstruēt šādas lauztas līnijas ar 6, 8, 10,… posmiem.



a) **b)**

c)

62.zīm.

Pierādiet patstāvīgi, ka šāda lauzta līnija ar 4 posmiem nav iespējama.

1.10. Atbilde. Dotā daļa var dalīties ar 13.

Risinājums. Viegli redzēt, ka

$$8(5n+6)-5(8n+7)=13 \qquad (1)$$

Ja apskatāmās daļas $\frac{5n+6}{8n+7}$ skaitītāju un saucēju var saīsināt ar skaitli k, tad gan 5n+6, gan 8n+7 dalās ar k. Tad no (1) izriet, ka arī 13 dalās ar k. Bet vienīgie veselie pozitīvie skaitļi, ar kuriem dalās 13, ir 1 un 13. Tā kā mēs nerunājam par saīsināšanu ar 1, tad vienīgais skaitlis, ar kuru dotā daļa var saīsināties ir 13.

Uzdevums vēl nav atrisināts. Mēs pieņēmām, ka dotā daļa var saīsināties ar k, un pierādījām, ka tad k nevar pieņemt citu vērtību kā 13. Bet tas vēl nenozīmē, ka patiešām eksistē tāda n vērtība, pie kuras apskatāmā daļa saīsinās ar 13, tas jānoskaidro atsevišķi.

Viegli redzēt, ka pie n=4

$$\frac{5n+6}{8n+7}=\frac{26}{39}=\frac{2}{3},$$
tātad dotā daļa tiešām saīsinās ar 13.

Tātad apskatāmā daļa var saīsināties ar 13, bet nevar saīsināties ne ar kādu citu veselu pozitīvu skaitli.

2. nodarbības atrisinājumi

2.1. Atbilde. Skaitļu A un B starpība var būt 792.

Risinājums. Apzīmēsim skaitļa A ciparus no kreisās uz labo pusi ar a, b un c; šo faktu mēs pierakstīsim kā $A=\overline{abc}$. Tādā gadījumā $B=\overline{cba}$. Tas nozīmē, ka

A=100a+10b+c un

B=100c+10b+a.

Tāpēc

$$A-B=\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-100c-10b-a=99a-99c=99(a-c).$$

Šai izteiksmei būs maksimālā vērtība, ja a būs vislielākais no iespējamajiem skaitļiem, bet c – vismazākais. Tātad a=9, c=1, A-B=792. c≠0, jo, ja c=0, tad skaitlis $\overline{cba}$ sāktos ar 0, kas nevar būt, jo dots, ka $\overline{cba}$ ir trīsciparu skaitlis.

2.1.1. Risinājums. Apzīmēsim $A=\overline{a_1a_2a_3...a_n}$; tad $B=\overline{a_na_{n-1}...a_2a_1}$.

Šķirosim divus gadījumus:

1) n – pāra skaitlis, n=2k; tad

$$A-B=(a_1\cdot 1\underbrace{0...0}_{n-1}+a_2\cdot 1\underbrace{0...0}_{n-2}+...+a_n\cdot 1\underbrace{0...0}_{n-k}+a_{k+1}\cdot 1\underbrace{0...0}_{n-k-1}+...+a_{n-1}\cdot 10+a_n)-$$
$$-(a_n\cdot 1\underbrace{0...0}_{n-1}+a_{n-1}\cdot 1\underbrace{0...0}_{n-2}+...+a_{k+1}\cdot 1\underbrace{0...0}_{k}+a_k\cdot 1\underbrace{0...0}_{k-1}+...+a_2\cdot 10+a_1)=$$
$$=a_1\cdot\underbrace{99...9}_{n-1}+a_2\cdot\underbrace{99...9}_{n-3}0+...+a_k\cdot 9\underbrace{0...0}_{k-1}-a_{k+1}\cdot 9\underbrace{0...0}_{k-1}-...-a_{n-1}\cdot\underbrace{99...9}_{n-3}0-a_n\cdot\underbrace{99...9}_{n-1}=$$
$$=\underbrace{99...9}_{n-1}\cdot(a_1-a_2)+\underbrace{99...9}_{n-3}0\cdot(a_2-a_{n-1})+...+9\underbrace{0...0}_{k-1}\cdot(a_k-a_{k+1}).$$

Acīmredzot šī izteiksme pieņem maksimālo vērtību, ja

$a_1=a_2=\ldots=a_k=9$,

$a_{k+1}=a_{k+2}=\ldots=a_{n-1}=0$,

$a_n=1$

(atceroties, ka $a_n\neq 0$).

2) n – nepāra skaitlis, n=2k-1. Līdzīgi iegūstam,

$$A-B=\underbrace{99...9}_{n-1}\cdot(a_1-a_n)+\underbrace{99...9}_{n-1}0\cdot(a_2-a_{n-1})+...+99\underbrace{0...0}_{k-2}\cdot(a_{k-1}-a_{k+1}).$$

Šī izteiksme pieņem maksimālo vērtību, ja

$a_1=a_2=\ldots=a_{k-1}=9$,

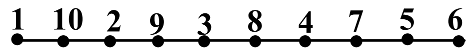
a_k – patvaļīgs cipars,

$a_{k+1}=a_{k+2}=\ldots=a_{n-1}=0$,

$a_n=1$.

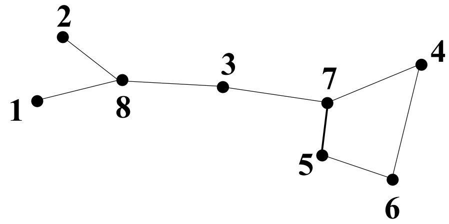
2.2. Atbilde. Jā, var.

Risinājums. Viens no veidiem, kā to var izdarīt, attēlots 63. zīmējumā.



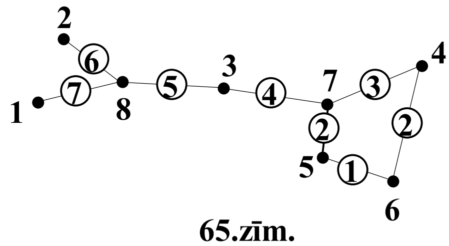
63.zīm.

Iedomāsimies, ka doti n punkti, no kuriem daži savienoti ar līnijām tā, ka no katra punkta uz katru var aiziet, ejot pa šīm līnijām. Katra līnija savieno divus no dotajiem punktiem un citu doto punktu uz tā nav.
Pierakstīsim katram no dotajiem n punktiem vienu no skaitļiem 1, 2, 3,…, n (katram punktam citu skaitli), piemēram, tā, kā izdarīts 64. zīmējumā.



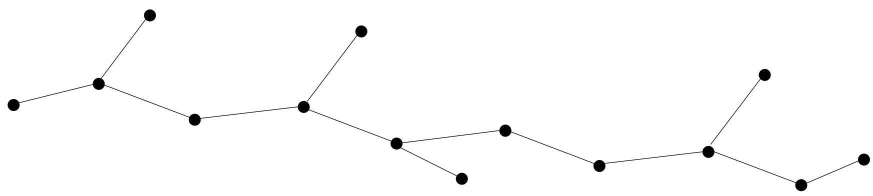
64.zīm.

Ja mēs katrai līnijai aprēķināsim tās galapunktos uzrakstīto skaitļu starpību, tad 64. zīmējumā attēlotajā gadījumā iegūsim ainu, kas parādīta 65. zīmējumā (starpības ierakstītas aplīšos):



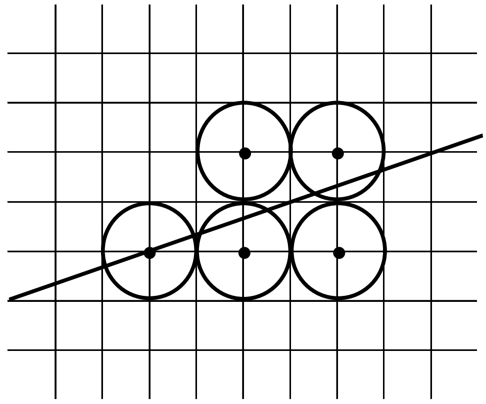
65.zīm.

Mēs redzam, ka visi skaitļi 1, 2, 3,…, 6, 7 parādās kā iegūtās starpības.
Nākošais jautājums ir neatrisināta matemātiska problēma:
Pierādīt vai apgāzt, to ka jebkurus n punktus, kas savienoti ar līnijām tā, ka no katra punkta uz katru var aiziet, ejot pa šīm līnijām, var sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz n tā, ka katrs no skaitļiem 1, 2, 3,…, n-1 parādās kā galapunktos ierakstīto skaitļu starpība vismaz vienai līnijai.
Lai pierādītu šo apgalvojumu, jāpierāda, ka prasīto sanumurēšanu var veikt jebkurai "saistītai" punktu un līniju sistēmai; lai to apgāztu, pietiek uzrādīt vienu tādu "saistītu" punktu un līniju sistēmu, kurai šāda sanumurēšana nav iespējama.
Pamēģiniet patstāvīgi pierādīt šo apgalvojumu tādām punktu un līniju sistēmām, kas sastāv no viena gara "stumbra" ar zariem, kuru garums ir 1; katrā vietā atzarojas ne vairāk kā viens zars (piemēram skat. 66.zīm.).



66.zīm.

2.3. Risinājums. Novelkam taisni caur apakšējās rindas kreisās riņķa līnijas centru un rūtiņu virsotni, kas atrodas vidū starp pārējām četrām riņķa līnijām (skat. 67.zīm.).



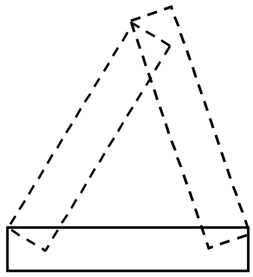
67.zīm.

Skaidrs, ka šī taisne dala uz pusēm apakšējās rindas kreisā malējā riņķa laukumu. Tā kā četru pārējo riņķu veidotajai figūrai ir simetrijas centrs – rūtiņu virsotne, kas atrodas starp šiem riņķiem, un novilktā taisne iet caur šo simetrijas centru, tad tā dala uz pusēm arī četru pārējo riņķu veidotās figūras laukumu, tātad apmierina uzdevuma nosacījumus.
Iesakām lasītājam atrast vēl citas (vismaz divas) taisnes, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un kuras var novilkt uz rūtotā laukuma, izmantojot vienīgi lineālu. Bez tam iesakām padomāt par šādiem uzdevumiem:

A. Pierādīt, ka, lai arī kādu virzienu plaknē mēs izvēlētos, eksistē šajā virzienā ejoša taisne, kas dala 1. zīmējumā iesvītroto laukumu uz pusēm (tas nenozīmē, ka šādu taisni var konstruēt tikai ar lineāla palīdzību).

B. Kā varētu novilkt mūsu zīmējumā konstruēto taisni, ja nebūtu pieejamas rūtiņu līnijas un riņķu centri, bet tikai pašas riņķa līnijas un to pieskaršanās punkti?

2.4. Risinājums. Novilksim loku ar rādiusu $R_1 = |BC|$ no punkta (galda stūra) B un loku ar rādiusu $R_2 = |BD|$ no punkta (galda stūra) C. Atradīsim šo loku krustpunktu M virs galda virsmas veidotā taisnstūra. Pagriežot galdu pirmo reizi, galda stūri B atstāsim uz vietas, bet stūri C savietosim ar punktu M. To var izdarīt, ja $|BM| = |BC| = R_1$. Punktā M galda stūri C atstāsim uz vietas un pagriezīsim galda stūri A, līdz tas savietojas ar sākotnējo punktu C. Tas ir iespējams, jo $R2 = |AC| = |BD|$. Galda stūris A nu atrodas vajadzīgajā vietā; to nekustinot, griezīsim galdu, līdz tā stūris C ieņems vajadzīgo stāvokli (sākotnējo punktu A) (skat. 68.zīm.).



68.zīm.

2.5. Atbilde. Augumu dilšanas secībā nostādītajā ierindā skolēniem jāstāv šādā secībā:

(8) (5) (6) (10) (1) (2) (7) (4) (3) (9)

Risinājums. Dosim divus šī uzdevuma atrisinājumus.

A. Turpmāk skolēnu ar numuru k apzīmēsim ar (k), kur k=1,2,…,10. Nostādīsi skolēnus jaunā rindā augumu dilšanas secībā no kreisās uz labo (turpmāk šo jauno rindu sauksim par ierindu, bet sākotnējo – par rindu).
Noskaidrosim ierindas uzbūvi:
(2) rindā redz vienu par sevi garāku skolēnu pa kreisi no sevis. Tā kā rindā pa kreisi no (2) stāv tikai (1), tad (1) ir garāks par (2), un ierindā (2) stāv pa labi no (1). Iegūstam
…(1)…(2)… .
(3) rindā pa kreisi no sevis redz divus par sevi garākus skolēnus. Tā kā rindā pa kreisi no (3) stāv tikai (1) un (2), tad tie abi ir garāki par (3), un ierindā (3) stāv pa labi no (2). Iegūstam situāciju
…(1)…(2)…(3)… .
(4) rindā pa kreisi no sevis redz divus par sevi garākus skolēnus. Tā kā (1) garāks par (2), bet (2) garāks par (3), tad (1) un (2) garāki par (4), bet (3) – īsāks par (4). Tāpēc ierindā (4) stāv starp (2) un (3). Iegūstam situāciju
…(1)…(2)…(4)…(3)… .
(5) rindā pa kreisi no sevis neredz nevienu garāku par sevi. Tātad (5) ir garāks par (1), (2), (3) un (4), tātad (5) ierindā atrodas pa kreisi no (1). Iegūstam situāciju
…(5)…(1)…(2)…(4)…(3)… .
Līdzīgi spriedīsim par pārējiem un iegūsim, ka augumu dilšanas secībā nostādītajā ierindā skolēniem jāstāv šādā secībā:

(8) (5) (6) (10) (1) (2) (7) (4) (3) (9)

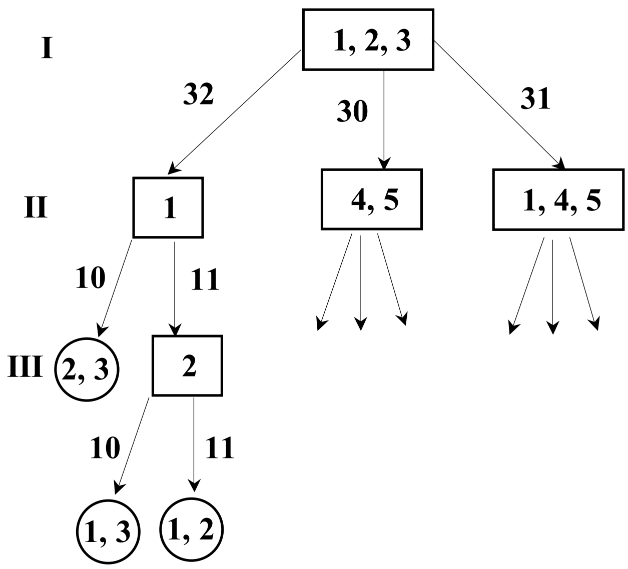
Tātad
(8) ir 1,60 m garš
(5) ir 1,59 m garš
(6) ir 1,58 m garš
utt.

B. Noskaidrosim, kur sākotnējā rindā var stāvēt 1,60 m garais skolēns. Skaidrs, ka viņš pa kreisi no sevis neredz nevienu skolēnu garāku par sevi. Tāpēc viņš var stāvēt 1., 5. vai 8. vietā. Ja viņš stāvētu 1. vai 5. vietā, tad 8. vietā stāvētu par viņu

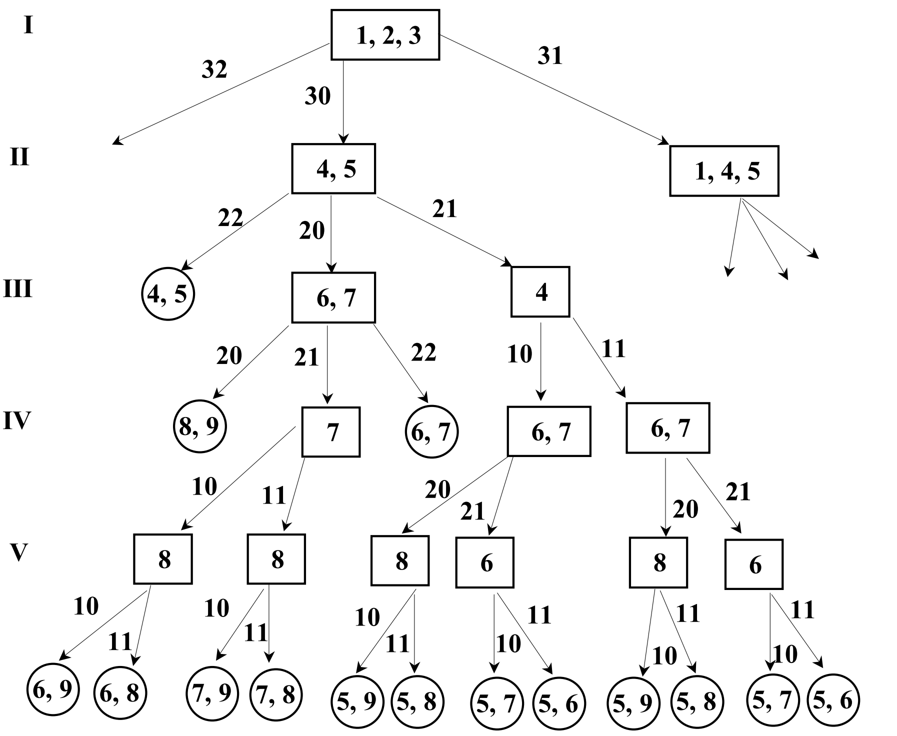
īsāks skolēns, un šis skolēns pa kreisi no sevis redzētu par sevi garāko 1,60 m garo skolēnu; tātad 8. vietā stāvošajam skolēnam atbilstošais skaitlis nebūtu 0.
Tātad 1,60 m garais skolēns var stāvēt tikai 8. vietā.
Noskaidrosim, kurā vietā var stāvēt 1,59 m garais skolēns. Viņš pa kreisi no sevis var redzēt vai nu vienu par sevi garāku skolēnu (ja viņš stāv pa labi no 1,60 m garā skolēna), vai nevienu par sevi garāku skolēnu. Bet ne 9., ne 10. vietā nestāv skolēns, kas redzētu pa kreisi tikai vienu par sevi garāku skolēnu; tātad 1,59 m garais skolēns stāv pa kreisi no 1,60 m garā skolēna un pa kreisi no sevis neredz nevienu par sevi garāku skolēnu. Tad līdzīgi kā iepriekš konstatējam, ka 1,59 m garais skolēns stāv 5. vietā.
Noskaidrosim, kurā vietā var stāvēt 1,58 m garais skolēns. Viņš pa kreisi no sevis var redzēt 0, 1 vai 2 par sevi garākus skolēnus. Tāpēc skaidrs, ka viņš nevar stāvēt pa labi no 8. vietas. Ja viņš nestāvētu 6. vietā, tad viņš stāvētu pa kreisi no 6. vietas; tad 6. vietā stāvošais skolēns pa kreisi no sevis redzētu 1,58 m un 1,59 m garos skolēnus, tātad redzētu vismaz divus par sevi garākus skolēnus. Tā ir pretruna. Tātad 1,58 m garais skolēns stāv 6. vietā.
Līdzīgi turpinot, katrs nākamais (pēc auguma) skolēns jāievieto pirmajā tam piemērotajā vietā no labās puses.
Nonākam pie tāda paša rezultāta kā pirmajā risinājumā.

2.6. Risinājums. Dosim divus šī uzdevuma atrisinājumus.

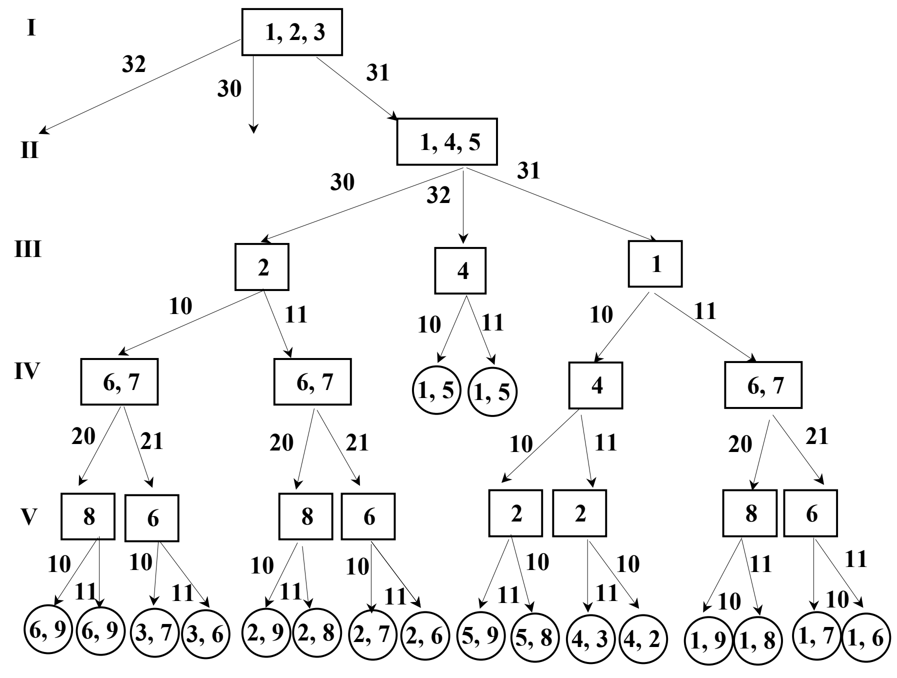
A. Visas monētas sanumurēsim un svēršanu attēlosim shēmā (skat. 69.(a), 69.(b) un 69.(c) zīm.)



69.(a) zīm.



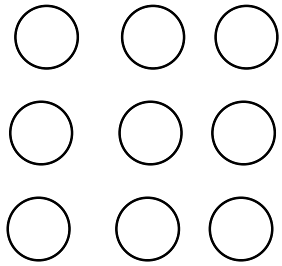
69.(b) zīm.



69.(c) zīm.

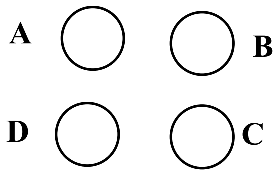
Taisnstūros rakstām, kuras monētas sveram,
blakus vai virs bultām – to svarus,
aplītī – kuras monētas ir smagākās,
labajā pusē ar romiešu cipariem – monētu svēršanas numuru.

B. Novietosim monētas 3 rindās un 3 kolonnās, kā parādīts 70. zīmējumā.



70.zīm.

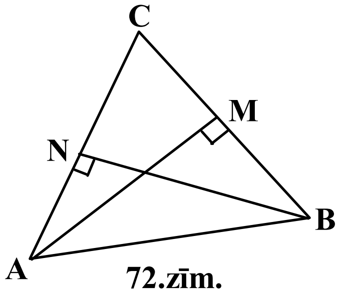
Nosveram atsevišķi pirmo un otro rindu. Ja kāda no tām sver 32 g vai arī abas sver pa 30 g, mēs esam noskaidrojuši, starp kurām trim monētām ir abas smagākās; ar divām svēršanām varam tās atrast.
Ja turpretī abas nosvērtās rindas sver pa 31 g vai arī viena no tām sver 31 g, bet otra 30 g, tad ar divām svēršanām esam noskaidrojuši, kurās divās rindās ir pa vienai smagākajai monētai.
Tādā gadījumā nosveram atsevišķi pirmo un otro kolonnu.
Ja kāda no tām sver pa 32 g vai arī abas sver pa 30 g, mēs jau esam atraduši abas smagākās monētas.
Ja turpretī abas tās abas sver pa 31 g vai arī viena no tām sver 31 g, bet otra - 30 g, tad ar divām svēršanām esam noskaidrojuši tās divas kolonnas, no kurām katrā ir pa vienai smagākajai monētai.
Aplūkosim monētas, kas atrodas kādā no abām atrastajām kolonnām un kādā no abām atrastajām rindām (skat. 71.zīm.).



71.zīm.

Skaidrs, ka abas smagākās monētas ir vai nu A un C, vai arī B un D. Nosverot vienu no tām, noskaidrojam, kura no šīm iespējām pastāv īstenībā.
Iesakām lasītājiem patstāvīgi padomāt, vai ar 4 svēršanām varētu atrast abas smagākās monētas.

2.7.<u>Atbilde</u>. Trijstūra leņķu lielumi ir 90^0, 45^0 un 45^0.
<u>Risinājums</u>. (Skat. 72.zīm.).



72.zīm.

Apzīmēsim $|AC|=b$, $|BC|=a$, $|AM|=h_a$, $|BN|=h_b$.
Ja trijstūris ABC nav taisnleņķa trijstūris ar taisno leņķi C, tad M un N nesakrīt ar virsotni C; tad no taisnleņķa trijstūriem AMC un BNC iegūstam, ka
$b>h_a$ un $a>h_b$ (hipotenūza garāka par kateti);
sareizinot šīs nevienādības (to locekļi ir pozitīvi), iegūstam
$a\cdot b > h_a\cdot h_b$ (1)

Bet pēc dotā $h_a\geq a$ un $h_b\geq b$;
sareizinot šīs nevienādības, iegūstam
$h_a\cdot h_b\geq a\cdot b$, kas ir pretrunā ar (1).
Tātad trijstūris ABC ir taisnleņķa trijstūris ar taisno leņķi C. Tad tā augstumi ir malas AC un BC.
No nevienādībām $|AC|\geq|BC|$ un $|BC|\geq|AC|$ iegūstam $|AC|=|BC|$, tātad trijstūris ABC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris un tā leņķu lielumi ir 90°, 45° un 45°.

2.8. Pierādījums. No sakarības

$$\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n} =$$
$$= a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \underbrace{99\ldots9}_{n-1} \cdot a_1 + \underbrace{99\ldots9}_{n-2} \cdot a_2 + \ldots + 9 \cdot a_{n-1}$$

izriet, ka skaitlis, to dalot ar 3, dod tādu pašu atlikumu, kādu, dalot ar 3, dod tā ciparu summa. Pierādīsim, ka naturāla skaitļa kvadrāts, to dalot ar 3, nevar dot atlikumu 2.
Tiešām, šķirosim visus naturālos skaitļus m trīs grupās atkarībā no tā, kādu atlikumu tie dod, ja tos dala ar 3.
Ja m dalās ar 3 bez atlikuma (dod atlikumu 0), tad $m=3k$, un k ir vesels skaitlis; tad $m^2=9k^2$ dalās ar 3 bez atlikuma.
Ja m, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad $m=3k+1$, (k ir vesels skaitlis);
tad $m^2=9k^2+6k+1=3\cdot(3k^2+2k)+1$, t.i., dalot ar 3, dod atlikumu 1.
Redzam, ka naturāla skaitļa kvadrāts, dalot to ar 3, dod atlikumu 0 vai 1. Tātad, arī naturāla skaitļa kvadrāta ciparu summa, dalot to ar 3, dod atlikumu 0 vai 1. Tātad, tā nevar būt 5.

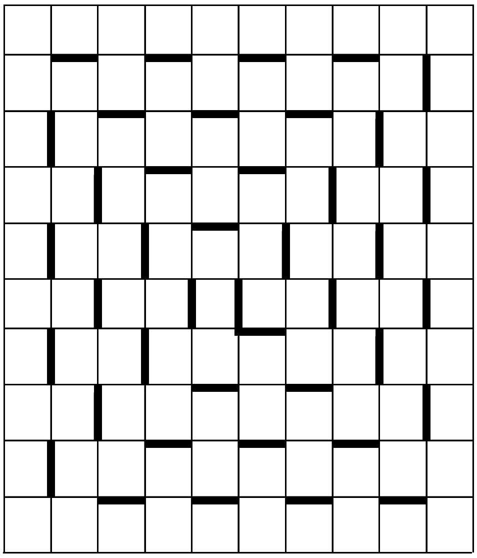
2.9. Pierādījums. Noskaidrosim, kādus atlikumus, dalot ar 4, dod virknes $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ locekļi.
Ar r_n apzīmēsim atlikumu, kādu, dalot ar 4, dod a_n ($n=1, 2, \ldots, n, \ldots$). Skaidrs, ka $r_1=1$, $r_2=1$.

Lemma. r_{n+2} vienāds ar atlikumu, kādu, dalot ar 4, dod skaitlis $r_{n+1}\cdot r_n+1$.

Tiešām, $a_n=4\cdot M_n+r_n$; $a_{n+1}=4\cdot M_{n+1}+r_{n+1}$, kur M_n un M_{n+1}ir veseli skaitļi (dalījumi, kādus iegūst, a_n un a_{n+1} dalot ar 4). Tad
$a_{n+2}=a_{n+1}\cdot a_n+1=$
$=(4\cdot M_{n+1}+r_{n+1})\cdot(4\cdot M_n+r_n)+1=$
$=(16\cdot M_n\cdot M_{n+1}+4\cdot M_n\cdot r_{n+1}+4\cdot M_{n+1}\cdot r_n)+(r_n\cdot r_{n+1}+1)$.
Lemmas apgalvojums izriet no tā, ka pirmā iekava dalās ar 4 bez atlikuma.

Varam secināt, ka r_{n+2} atkarīgs tikai no r_n un r_n+1, t.i., no abiem iepriekšējiem atlikumiem. Pēc lemmas viegli iegūt, ka $r_3=2$, $r_4=3$, $r_5=3$, $r_6=2$, $r_7=3$.
Tā kā $r_3=2$, $r_4=3$ un arī $r_6=2$, $r_7=3$, un, ievērojot iepriekšējo secinājumu, iegūstam, ka turpmāk atlikumu virkne būs ar periodu 2; 3; 3. Redzam, ka tajā nekad neparādīsies 0. Tātad neviens (a_n) loceklis nedalās ar 4. Tātad ar 4 nedalās arī a_{1964}.

2.10. Atbilde. Jāslēdz vismaz 41 iela.
Risinājums. Tā kā no malējiem krustojumiem var aizbraukt ne vairāk kā trijos virzienos, tad atliek
$(11-2)\cdot(11-2)=9\cdot9=81$ krustojums; no tiem var aizbraukt 4 virzienos. Slēdzot vienu ielu divos krustojumos samazinās izbraucamo ielu skaits. Ja slēgtu 40 ielas, tad izbraucamo ielu skaits samazinātos ≤80 krustojumos. Tā kā ir 81 krustojums, tad jāslēdz vismaz 41 iela. To var izdarīt šādi (skat. 73.zīm.).



73.zīm.

3. nodarbības atrisinājumi

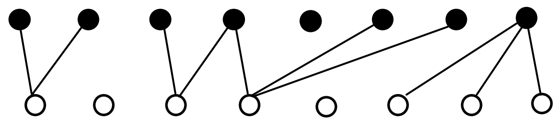
3.1. Atbilde. Tāds divciparu skaitlis ir 36.
Risinājums. Ja divciparu skaitļa pirmo ciparu apzīmē ar a, bet otro ar b, tad iegūst vienādojumu

$$10\cdot a+b=2ab$$
$$2ab-10\cdot a=b$$
$$2a\cdot(b-5)=b$$
$$(b-5)=\frac{b}{2a} \qquad (*)$$

Tā kā a un b ir nenegatīvi skaitļi, tad $\frac{b}{2a}$ ir nenegatīvs, (b-5) – nenegatīvs, $b-5\geq0$, $b\geq5$.
Tā kā b-5 ir vesels skaitlis, tad $\frac{b}{2a}$ - vesels skaitlis. Tātad b ir pāra skaitlis.
Ja skaitlis b apmierina nosacījumus, tad iespējams, ka b=6 vai b=8.
Ja b=6, tad no (*) iegūstam, ka a=3.

Ja b=8, tad no (*) iegūstam, ka 2a·3=8, 6a=8.
Tā kā a ir vesels skaitlis, tad šim vienādojumam nav atrisinājuma.
Tātad vienīgais divciparu skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 36.

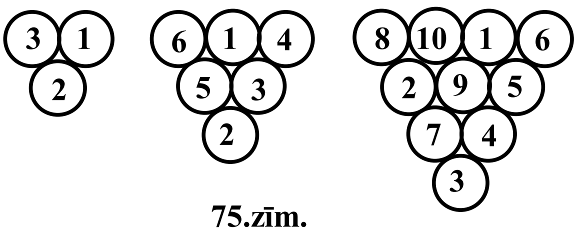
3.2. Pierādījums. Shematiski attēlosim katru klases zēnu ar melnu punktu, bet katru meiteni – ar baltu.
Ja kāds zēns draudzējas ar kādu meiteni, novilksim līniju, kas savieno attiecīgos punktus (skat. 74.zīm.)



74.zīm.

Skaidrs, ka gan zēnu draudzību skaita summai, gan meiteņu draudzību skaita summai jābūt vienādai ar novilkto līniju skaitu, tātad tām jābūt vienādām. Tā kā 42≠37, tad skaitot vai summējot kaut kur pieļauta kļūda, kas arī bija jāpierāda.

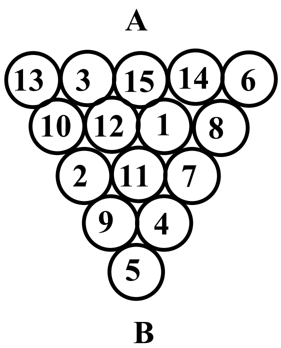
3.3. Atbilde. Jā, var (skat. 75.zīm.).



75.zīm.

Lasītājam ieteicams patstāvīgi noskaidrot, cik dažādos veidos skaitļus var ierakstīt tā, lai uzdevuma prasības būtu apmierinātas.

3.3.1. Atbilde. Ja dota figūra, kurā ir 15 aplīšu, uzdevuma prasības var apmierināt, kā parādīts 76. zīmējumā.



76.zīm.

Risinājums. Var pierādīt, ka tā ir vienīgā iespēja, kā to izdarīt (ja par citu iespēju neuzskata skaitļu izvietojumu, kas simetrisks attēlojumam attiecībā pret līniju AB).

Ja dota figūra, kurā ir 21 aplītis, skaitļus saskaņā ar uzdevuma prasībām izvietot nevar. Pierādīsim to. Pieņemsim, ka to var izdarīt.

Apzīmēsim pirmās rindas skaitļus no kreisās uz labo ar a, b, c, d, e, f. Pēdējo rindu skaitļu vietā pagaidām aplīšos rakstīsim to divu skaitļu summu, kas atrodas virs atbilstošā aplīša. Tātad otrajā rindā būs skaitļi a+b, b+c, d+e, e+f,

trešajā rindā a+2b+c, b+2c+d, b+2c+d, c+2d+e, d+2e+f,

ceturtajā rindā a+3b+3c+d, b+3c+3d+e, c+3d+3e+f,

piektajā rindā a+4b+6c+4d+e, b+4c+6d+4e+f,

sestajā rindā a+5b+10d+5e+f.

Visu aplīšos ierakstīto skaitļu summa būs

6a+20b+34c+34d+20e+6f=

=2(3a+10b+17c+17d+10e+3f).

Tātad visu skaitļu summa būs pāra skaitlis. Divu veselu skaitļu starpība ir pāra skaitlis tad un tikai tad, ja to summa ir pāra skaitlis. Tiešām pietiek ievērot, ka a+b=(a-b)+2b, t.i., a+b un a-b atšķiras par pāra skaitli 2b. Tātad, ja summu vietā mēs būtu rakstījuši aplīšos starpības, arī tad visu uzrakstīto skaitļu summai jābūt pāra skaitlim.

Tā kā dotajā figūrā ir 21 aplītis, tad uzrakstāmo skaitļu summai jābūt

1+2+3+…+21=231 – nepāra skaitlim.

Kā redzējām iepriekš, tas nevar būt. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un skaitļus, kas ļautu izpildīt uzdevuma prasības, ierakstīt nevar.

3.4. Atbilde. Vismazākais lodīšu skaits ir 15.

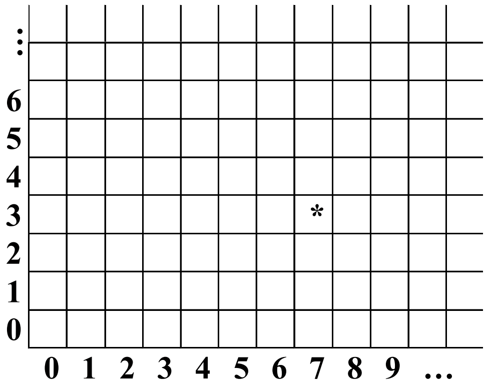
Risinājums. Iespējami lodīšu pāri ar šādiem numuriem: 2 – 4, 3 – 9, 4 – 16, kuri apmierina uzdevuma nosacījumus. Ja, uz labu laimi ņemot, gadās paņemt atlikušās 11 lodītes, kuru numurus neviens no šiem skaitļu pāriem nesatur, un no katra pāra pa vienai lodītei ar numuriem 2, 3, 16, tad nevienas paņemtās lodītes numurs nav citas paņemtās lodītes numura kvadrāts. Tātad, ja uz labu laimi paņem 14 lodītes, var gadīties, ka uzdevuma prasības nav izpildītas. Ja izņem vēl piecpadsmito lodīti; tad būs izņemtas vismaz divas lodītes, no kurām vienas numurs būs otras numura kvadrāts, jo tikai viena lodīte nebūs izņemta. Tātad 15 ir vismazākais lodīšu skaits, kuru izņemot, var garantēt, ka uzdevuma prasības būs izpildītas.

3.5. Risinājums. Attēlosim spēli grafiski.

Izveidosim rūtiņu tabulu (skat. 77.zīm.). Gan tās kolonas, gan rindiņas sanumurētas ar skaitļiem 0, 1, 2,… .

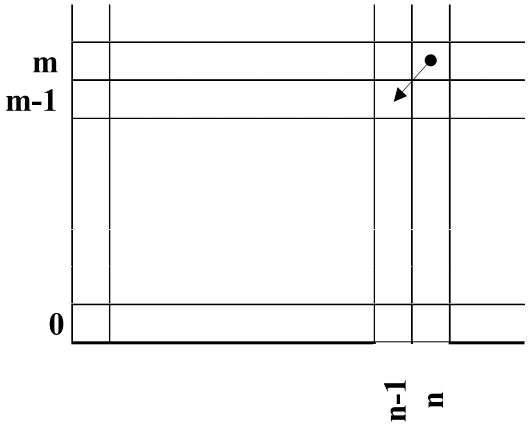
Skaitļu pāri (n;m) attēlosim ar rūtiņu, kas atrodas kolonas ar numuru n rindiņā ar numuru m. Piemēram, zīmējumā ar zvaigznīti apzīmētā rūtiņa attēlo skaitļu pāri (7;3).

Pieņemsim, ka mums ir kaut kāda figūra (viena vienīga).



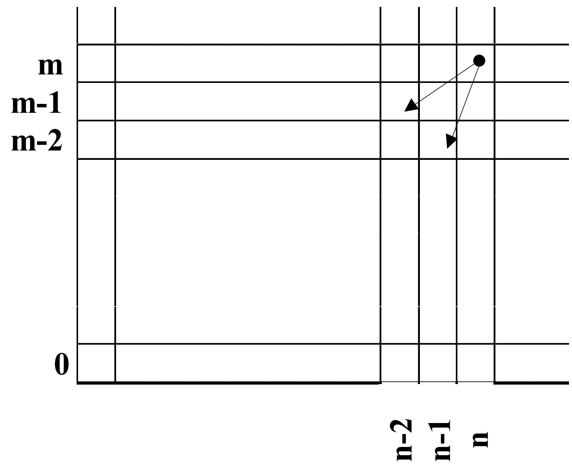
77.zīm.

Pieņemsim šādu nosacījumu: ja spēles gaitā uz tāfeles uzrakstīts skaitļu pāris (n;m), tad figūrai jāatrodas rūtiņā, kas attēlo šo pāri. Tad gājienus, kādus uzdevumā minētajā spēlē var izdarīt spēlētāji, varēs attēlot, pārbīdot šo figūru.
Kādi figūras pārveidojumi attēlos spēlē pieļaujamos gājienus?
Acīmredzot gājienam (n;m)→(n-1;m-1) atbildīs figūras pārbīdīšana par vienu rūtiņu uz leju un par vienu rūtiņu pa kreisi (skat. 78.zīm.).



78.zīm.

Gājieniem (n;m)→(n-1;m-2) un (n;m)→(n-2;m-1) atbilst figūras pārbīdīšana par vienu rūtiņu pa kreisi un divām rūtiņām uz leju vai par divām rūtiņām pa kreisi un vienu rūtiņu uz leju (skat. 79.zīm.).



79.zīm.

Gājienam (n;m)→(n-x;m) atbilst figūras pārbīdīšana par x rūtiņām pa kreisi, bet gājienam (n;m)→(n;m-x) atbilst figūras pārbīdīšana par x rūtiņām uz leju.

Nosacījums, ka nedrīkst rakstīt pārus, kuros ieiet negatīvi skaitļi, izpaužas tādējādi, ka figūru nedrīkst izbīdīt ārpus rūtiņu lapas.

Šādā interpretācijā mūsu spēli var attēlot šādi. Divi spēlētāji pēc kārtas bīda figūru, izdarot iepriekš aprakstītos gājienus; tas, kas figūru iebīda lapas stūrī – rūtiņā (0;0) – uzvar.

Tās rūtiņas, uz kurām jācenšas pārbīdīt figūru, lai uzvarētu, iesvītrosim (tās mēs sauksim par "uzvarošām rūtiņām"); tās rūtiņas, uz kurām spēlētājs, kas grib uzvarēt, nedrīkst pārbīdīt figūru, izsvītrosim (ievilksim tajās krustiņus); tās mēs sauksim par "zaudējušām".

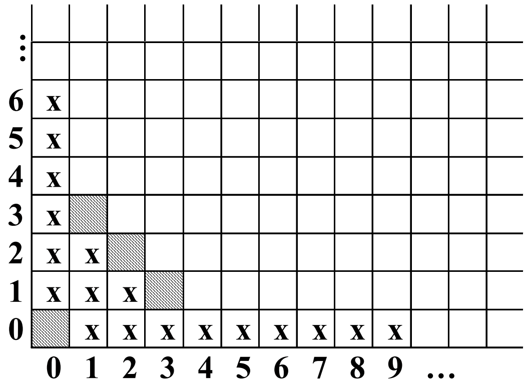
Skaidrs, ka rūtiņa (0;0) ir "uzvaroša" pēc spēles definīcijas. No tā uzreiz izriet, ka rūtiņas (0;x), (x;0), (1;1) un (1;2) un (2;1) ir "zaudējošas". Ja spēlētājs pārbīdīs figūru uz kādu no šīm rūtiņām, tad viņa pretinieks savā nākošajā gājienā varēs pārbīdīt figūru uz rūtiņu (0;0) un uzvarēt.

Iegūstam 80. zīmējumā attēloto ainu.

⋮											
6	x										
5	x										
4	x										
3	x										
2	x	x									
1	x	x	x								
0		x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

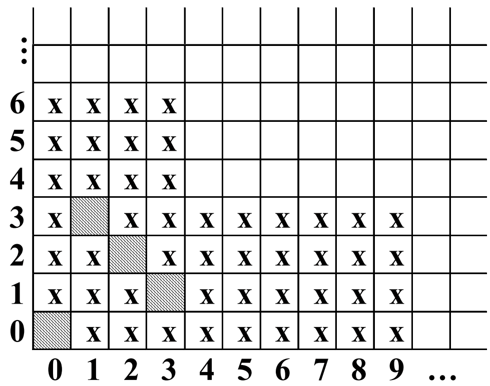
80.zīm.

No 80. zīmējuma redzams, ka rūtiņas (1;3), (2;2) un (3;1) ir "uzvarošas". Tiešām, ja kāds no spēlētājiem pārbīda figūru uz kādu no šīm rūtiņām, tad viņa pretinieks nākošajā gājienā ir spiests to pārbīdīt uz kādu no izsvītrotajām rūtiņām, t.i., uz rūtiņu, kas pēc iepriekšējā sprieduma ir "zaudējoša". Tāpēc iegūstam 81. zīmējumā parādīto ainu.



81.zīm.

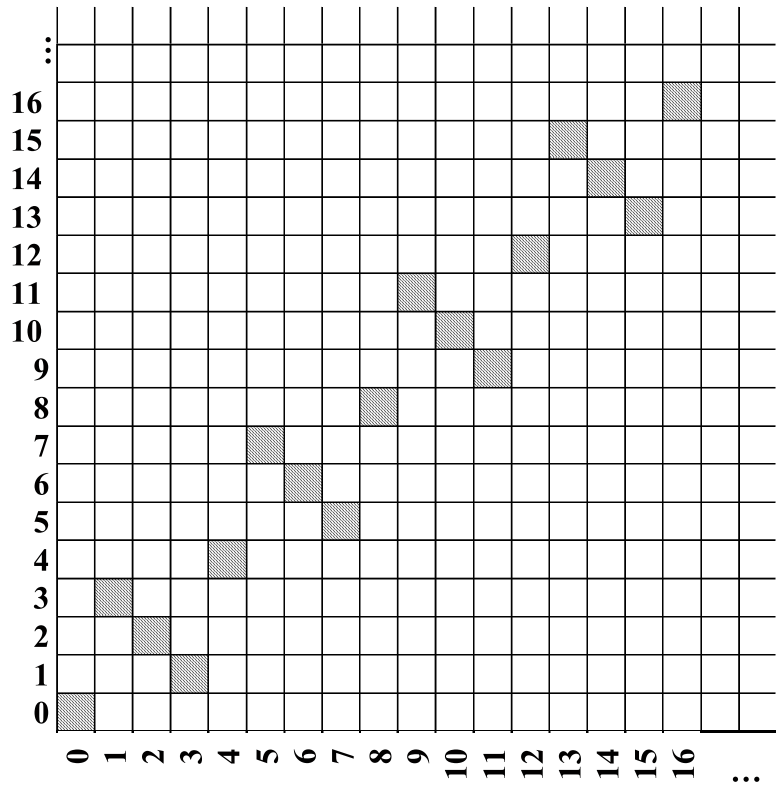
Izsvītrojot visas tādas rūtiņas, no kurām ar vienu gājienu var nonākt uz kādu no nupat iesvītrotajām(visas tādas rūtiņas ir "zaudējošas"), iegūstam 82. zīmējumā attēloto ainu.



82.zīm.

Tagad atkal var ievērot, ka no rūtiņas (4;4) var nonākt tikai izsvītrotajās rūtiņās, tāpēc rūtiņa (4;4) ir "uzvaroša"; iekrāsot šo rūtiņu un turpināt tāpat, kā iepriekš. Tomēr lietderīgi ievērot, ka pašreiz mēs esam tieši tādā pašā stāvoklī, kā sākot analizēt spēli, tikai rūtiņas (0;0) vietā ir rūtiņa (4;4), un visas apskatāmās lapas vietā – daļa, kas palikusi balta. No vienādiem stāvokļiem, veicot vienādas operācijas, iegūst vienādus rezultātus, tāpēc tāda pati iekrāsoto un izsvītroto rūtiņu sistēma, kāda redzama 82. zīmējumā, novietosies 82. zīmējumā redzamo balto rūtiņu vietā.

Šī pati sistēma atkārtosies vēl trešo, ceturto, … reizi (skat. 83. zīm. atzīmētās rūtiņas, kas tikai uzvar).



83.zīm.

No zīmējuma viegli saprast, ka "uzvarošās" rūtiņas ir
(4k; 4k), (4k+2; 4k+2), (4k+1; 4k+3) un (4k+3; 4k+1), k=0, 1, 2, …, un tikai tās.
Rūtiņa (38; 37) nav "uzvaroša".
Tāpēc pirmais spēlētājs var figūru pārbīdīt uz "uzvarošo" rūtiņu: (38; 37)→(36; 36).
Otrais spēlētājs ir spiests figūru pārbīdīt uz "zaudējošo" rūtiņu; bet pēc "zaudējošo" rūtiņu konstrukcijas, pirmais spēlētājs varēs figūru atkal pārbīdīt uz kādu "uzvarošo" rūtiņu, utt.
Tādējādi pirmais spēlētājs vienmēr pārbīda figūru uz "uzvarošo" rūtiņu, bet otrais spēlētājs vienmēr to pārbīda uz "zaudējošo" rūtiņu.
Tā kā spēle nevar turpināties bezgalīgi, tad kāds no spēlētājiem noteikti pārbīdīs figūru uz rūtiņu (0; 0); tas būs pirmais spēlētājs, kurš arī uzvarēs.
Viegli saprast, ka pirmais spēlētājs var uzvarēt vienmēr, ja sākumā dotais skaitļu pāris nav "uzvarošs". Ja sākumā dotais skaitļu pāris ir "uzvarošs", tad, pareizi spēlējot var uzvarēt otrais spēlētājs.

3.6. Risinājums. Skaidrs, ka nevienu no apskatāmajiem skaitļiem nevar pārveidot tā, lai tas būtu mazāks par 1.
Aplūkosim šādus pārveidojumus:
1→1
2→1
3→3
4→2→1

5→10→20→40→80→160→610→305→530→265→256→128→64→32→16→8→→4→2→1
6→3
7→14→41→82→164→146→73→37→74→148→184→92→46→64→32→16→8→4→2→1
8→4→2→1
9→9
10→5→…→1

Rodas jautājums, vai skaitļus 3, 6 un 9 nevar pārveidot par mazākiem naturāliem skaitļiem, nekā parādīts iepriekš.

Aplūkosim skaitli 3. Tas dalās ar 3. Ja skaitli, kas dalās ar 3, reizina ar 2, un dalījums ir vesels skaitlis, tad arī tas dalās ar 3. Ja skaitlī, kas dalās ar 3, patvaļīgi samaina vietām ciparus, tad arī iegūtais skaitlis dalās ar 3 (jo skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3). Tāpēc visi skaitļi, kurus var iegūt no 3, izdarot uzdevumā aprakstītās operācijas, dalās ar 3. Tātad 3 par mazāku skaitli pārveidot nevar.

Līdzīgi pierāda, ka 6 nevar pārveidot par mazāku naturālu skaitli nekā 3.

Izmantojot dalāmības pazīmi ar 9, līdzīgi pierāda, ka 9 nevar pārveidot par mazāku naturālu skaitli nekā 9.

Neatrisināta matemātiska problēma ir šāds jautājums: vai katru naturālu skaitli, kas nedalās ar 3, var pārveidot par 1, izmantojot uzdevumā minētās operācijas?

3.7. Atbilde. Meklējamais skaitlis ir 95210.

Risinājums. Lai skaitlis $\overline{abcde}$ būtu vislielākais, izvēlēsimies par pirmo tā ciparu vislielāko iespējamo, t.i., a=9.

Acīmredzot $e \geq 0$; tā kā $d > e$, tad $d \geq 1$. Tā kā $c > d+e$, tad $c \geq 2$. Tātad $c+d+e \geq 3$.

Ievērojot nosacījumus, ka $9=a>b+c+d+e$, tad no šejienes iegūstam $c+d+e<4$;
tā kā iepriekš pierādījām, ka $c+d+e \geq 3$, tad $c+d+e=3$.

Atceroties, ka $e \geq 0$, $d \geq 1$, $c \geq 2$, iegūstam, ka $e=0$, $d=1$, $c=2$;
meklējamais skaitlis ir 95210.

Pārbaude rāda, ka tas apmierina uzdevuma prasības.

3.8. Pierādījums. Iedomāsimies, ka katra virsotne sastāv no 2 vienādas krāsas punktiem, un katrs no tiem ir kādas daudzstūra malas galapunkts.

Izsvītrosim tās malas, kurās galapunkti ir dažādās krāsās, kopā ar to galapunktiem. Tā rezultātā esam izsvītrojuši vienādu skaitu balto un melno punktu. Tā kā atlicis vienāds skaits balto un melno punktu, un katrs punkts ir tieši daudzstūra malas galapunkts, tad ir vienāds skaits malu ar baltiem un melniem galapunktiem.

3.9. Pierādījums. Apskatīsim izliektu daudzstūri N, kura malas atrodas uz izliekta 100–stūra M diagonālēm. Tā kā N ir izliekts daudzstūris, tad

1) uz vienas daudzstūra M diagonāles nevar atrasties vairāk kā viena daudzstūra N mala,

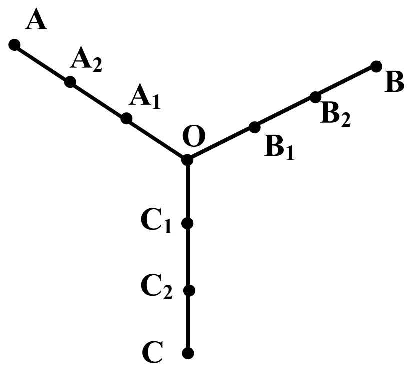
2) no vienas daudzstūra M virsotnes nevar iziet vairāk par 2 diagonālēm, uz kurām atrodas daudzstūra N malas.

(Pieņemsim, ka šādas diagonāles ir trīs. Apskatīsim vidējo no tām; visam izliektajam daudzstūrim N jāatrodas vienā pusē no šīs diagonāles, kas ir pretrunā ar to, ka abās pusēs no tās atrodas daudzstūra N malas.)

Sanumurēsim daudzstūra M virsotnes pēc kārtas ar 1, 2,…, 100. Ar x_i apzīmēsim skaitu diagonālēm, kas iziet no i–tās virsotnes un uz kurām atrodas daudzstūra N malas.
Tā kā uz katras daudzstūra M diagonāles atrodas ne vairāk par vienu daudzstūra N malu un katrai daudzstūra M diagonālei ir divi gali - M virsotnes, tad summa $S=x_1+x_2+\ldots+x_{100}$ ir divkāršots daudzstūra N malu skaits.
Bet $S\leq 200$, jo katram i=1, 2, …, 100 $x_i\leq 2$.
Tātad daudzstūrim N nav vairāk par 100 malām, kas arī bija jāpierāda.

3.10. Pierādījums. Visā turpmākajā risinājuma gaitā pieņemam, ka policists pārvietojas ar maksimālo ātrumu.

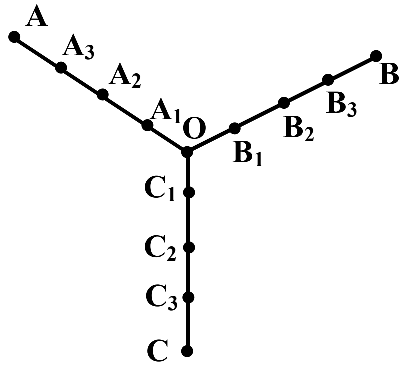
A. Katru tuneli sadalām daļās, kuru garums ir $\frac{d}{3}$, kā parādīts 84. zīmējumā.



84.zīm.

No sākuma policists nostājas labirinta centrā O.
Meklēšanas pirmajā posmā policists iet pa maršrutu OC_2O.
Ja, veicot šo maršrutu, policists nav pamanījis laupītāju, tad brīdī, kad viņš atgriežas punktā O, laupītājs atrodas vai nu gaitenī OA starp A un A_1, vai arī gaitenī OB starp B un B_1.
Otrajā posmā policists iet pa maršrutu OA_2O.
Ja laupītājs ir bijis gaitenī OA_1, tad policists viņu pamanīs. Ja policists viņu nav pamanījis, tad laupītājs ir bijis gaitenī OB. Otrajā posmā policists nogāja attālumu $\frac{4d}{3}$, tātad laupītājs varēja noiet ne lielāku attālumu kā $\frac{2d}{3}$. Tā kā otrā posmā sākumā laupītājs atradās starp B_1 un B, tad, laupītājs būs mēģinājis pārskriet no gaiteņa OB uz gaiteni OC, policistam atgriežoties punktā O, laupītājs vēl nebūs sasniedzis punktu C_1, un policists viņu pamanīs gaitenī OC (jo policists redz laupītāju attālumā $\frac{d}{3}$, $|OC_1|=\frac{d}{3}$).
Tātad, ja atgriežoties punktā O, policists laupītāju nepamana gaitenī OC, tad laupītājs ir gaitenī OB_1, un policists var doties pēc viņa.

B. Katru tuneli sadalām daļās, kuru garums ir $\frac{d}{4}$, kā parādīts 85. zīmējumā.



85.zīm.

Maršruts, pa kuru ejot, policists noteikti ieraudzīs laupītāju, varētu būt, piemēram šāds: $OC_3OB_2OA_3OB_3$.
Pierādījumu atstājam lasītājam veikt patstāvīgi.

4. nodarbības atrisinājumi

4.1. Pierādījums. Pietiktu pierādīt, ka vismaz viena no starpībām ir pāra skaitlis (pozitīvs vai negatīvs), jo, reizinot šo pāra skaitli ar abām pārējām iekavām, mēs noteikti iegūtu pāra skaitli. Piemēram, ja kaut kādā veidā kļūtu zināms, ka b-c=-8, tad visa izteiksme dalītos ar 2, jo tad

$$(a-b)(b-c)(c-a)=2\cdot(-4)(a-b)(c-a).$$

Tāpēc pierādīsim, ka vismaz viena no starpībām a-b, b-c, c-a dalās ar 2. Apskatīsim gadījumu, kad divas starpības, piemēram, a-b un b-c, ir nepāra skaitļi. To varam uzrakstīt šādi:
$a-b=2k+1$
$b-c=2m+1$, kur k un m – veseli skaitļi.
Tad $(a-b)+(b-c)=2k+1+2m+1=2(k+m+1)$ ir pāra skaitlis.
Bet $(a-b)+(b-c)=a-b+b-c=a-c$, tāpēc, ja a-b un b-c ir nepāra skaitļi, tad a-c noteikti ir pāra skaitlis.
Līdzīgi varam spriest arī šādos gadījumos: ja a-b un c-a ir nepāra skaitļi, tad
$b-c=-((c-a)+(a-b))$ noteikti ir pāra skaitlis, un, ja b-c un c-a abi ir nepāra skaitļi, tad
$a-b=-((b-c)+(c-a))$ noteikti ir pāra skaitlis.
Tagad skaidrs, ka gadījums, kad visas starpības a-b, b-c un c-a ir nepāra skaitļi, nav iespējams. Vienmēr vismaz viena starpība ir pāra skaitlis, un tātad vienmēr reizinājums $(a-b)(b-c)(c-a)$ dalās ar 2.
To, ka vienmēr vismaz viena no starpībām a-b, b-c, c-a dalās ar 2, var pierādīt arī citādi. Katrs no skaitļiem a, b un c var būt vai nu pāra skaitlis, vai nepāra skaitlis. Ja mums būtu zināmas skaitļu a, b un c vērtības, mēs tos varētu sadalīt divās grupās – vienā grupā nepāra skaitļi, otrā – pāra skaitļi. (Tā, piemēram, a ir nepāra skaitlis, bet b un c – pāra skaitļi.) Skaidrs, ja skaitļi ir 3 un tie jāsadala 2 grupās, tad varēs atrast divus skaitļus, kas iedalīti vienā grupā. (Var gadīties, ka vienā grupā ir 1 skaitlis, otrā – 2 skaitļi, vai arī vienā – 0 skaitļu, otrā – 3 skaitļi.)
Pierādīsim, ka šo 2 skaitļu starpība noteikti ir pāra skaitlis. Abi skaitļi ir ņemti no vienas grupas, tātad abi ir pāra skaitļi vai arī abi ir nepāra skaitļi.

1. Ja abi ir pāra skaitļi, tad šos skaitļus var apzīmēt ar 2m un 2n (m, n – kaut kādi veseli skaitļi). Abu skaitļu starpība ir 2m-2n=2(m-n) vai 2n-2m=2(n-m). Tātad divu pāru skaitļu starpība ir pāra skaitlis.
2. Ja abi ir nepāra skaitļi, tad šos skaitļus var apzīmēt ar 2s+1 un 2k+1 (s, k – kaut kādi veseli skaitļi). Abu skaitļu starpība ir
(2s+1)-(2k+1)=2(s-k) vai
(2k+1)-(2s+1)=2(k-s).
Tātad divu nepāra skaitļu starpība ir pāra skaitlis. Tā kā tie divi no skaitļiem a, b un c, kas iedalīti vienā grupā, vai nu abi ir pāra skaitļi, vai abi ir nepāra skaitļi, un to starpība ir pāra skaitlis, tad esam pierādījuši, ka vismaz viena no starpībām
a-b, b-c, c-a ir pāra skaitlis, un tātad reizinājums (a-b)(b-c)(c-a) noteikti dalās ar 2.
Dotajam uzdevumam ir arī divi tādi atrisinājumi, kuros visus iespējamos atrisinājumus var attēlot tabulā.

I risinājums.

Uzdevumā teikts – pierādīt, ka skaitlis (a-b)(b-c)(c-a) dalās ar 2. Katrs no skaitļiem
a-b, b-c, c-a var būt vai nu pāra skaitlis, vai nepāra skaitlis.
(Piemēram, (a-b) – pāra, (b-c), (c-a) – nepāra. Tad reizinājums ir pāra skaitlis.) Visas iespējamās kombinācijas attēlosim tabulā (skat. 86.zīm.). (Pāra skaitli apzīmēsim ar p, nepāra skaitli ar n.)

	a-b	b-c	c-a	(a-b)(b-c)(c-a)
1.	p	p	p	p
2.	p	p	n	p
3.	p	n	p	p
4.	p	n	n	p
5.	n	p	p	p
6.	n	p	n	p
7.	n	n	p	p
8.	n	n	n	n

86.zīm.

Tā kā reizinājums (a-b)(b-c)(c-a) var būt nepāra skaitlis tikai vienā gadījumā, kad (a-b) – nepāra, (b-c) – nepāra un (c-a) – nepāra skaitlis, svarīgi pierādīt, ka šāds gadījums nav iespējams. No tabulas redzams, ka visos pārējos gadījumos (var būt, ka arī no tiem kāds nav reāli iespējams, taču tas mums nav svarīgi) reizinājums
(a-b)(b-c)(c-a) dalās ar 2. To, ka skaitļi a-b, b-c, c-a visi reizē nevar būt nepāra skaitļi, esam pierādījuši iepriekš.
II risinājums.

Katrs no skaitļiem a, b un c var būt gan pāra, gan nepāra skaitlis. Arī šajā gadījumā iegūsim 8 dažādas kombinācijas (skat. 87.zīm.).

	a	b	c
1.	**p**	**p**	**p**
2.	**p**	**p**	**n**
3.	**p**	**n**	**p**
4.	**p**	**n**	**n**
5.	**n**	**p**	**p**
6.	**n**	**p**	**n**
7.	**n**	**n**	**p**
8.	**n**	**n**	**n**

87.zīm.

Ja I risinājumā tā kombinācija, kad visas starpības a-b, b-c, c-a ir nepāra skaitļi, nebija iespējama, tad tagad visas 8 kombinācijas ir iespējamas, un to, ka reizinājums
(a-b)(b-c)(c-a) vienmēr dalās ar 2, būsim pierādījuši tikai tad, ja visos 8 gadījumos
(a-b)(b-c)(c-a) būs pāra skaitlis.
Papildināsim tabulu vēl ar 4 ailēm: a-b, b-c, c-a, (a-b)(b-c)(c-a) un aizpildīsim tās, ievērojot, ka
1) divu pāra skaitļu starpība ir pāra skaitlis,
2) divu nepāra skaitļu starpība ir pāra skaitlis,
3) pāra un nepāra skaitļu starpība ir nepāra skaitlis,
4) tad, ja viens no reizinātājiem ir pāra skaitlis, arī reizinājums ir pāra skaitlis.
1) un 2) apgalvojumu jau iepriekš esam pierādījuši:
3) un 4) apgalvojumu var pierādīt līdzīgi (skat. 88.zīm.).

	a	b	c	a-b	b-c	c-a	(a-b)(b-c)(c-a)
1.	**p**	**p**	**p**	**p**	**p**	**p**	**p**
2.	**p**	**p**	**n**	**p**	**n**	**n**	**p**
3.	**p**	**n**	**p**	**n**	**n**	**p**	**p**
4.	**p**	**n**	**n**	**n**	**p**	**n**	**p**
5.	**n**	**p**	**p**	**n**	**p**	**n**	**p**
6.	**n**	**p**	**n**	**n**	**n**	**p**	**p**
7.	**n**	**n**	**p**	**p**	**n**	**n**	**p**
8.	**n**	**n**	**n**	**p**	**p**	**p**	**p**

88.zīm.

Tātad, lai kādi arī būtu skaitļi a, b un c, reizinājums (a-b)(b-c)(c-a) vienmēr dalās ar 2.

4.2. Risinājums. Izlasot vārdus "novietot uz horizontāla galda četras vienādas pudeles tā, lai…" daudzi no jums, droši vien, šo uzdevumu mēģināja atrisināt gadījumam, kad visas pudeles stāv ar kakliņiem uz augšu. Kad redzēja, ka uzdevuma prasība nav izpildāma, risināšanu izbeidza.
Taču pudele attiecībā pret galdu var stāvēt gan ar kakliņu uz augšu, gan – uz leju. Tā var gulēt horizontāli. Ja mums atļautu pudeles turēt rokās, tad tas varētu būt visdažādākajos stāvokļos paceltas virs galda – vertikāli, horizontāli, slīpi. Bet

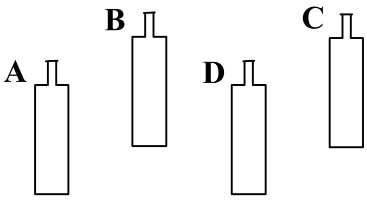
uzdevumā teikts, kā tās jānovieto. Varbūt varam kaut kā novietot slīpi? Bet tad pudeles būtu jābalsta vai nu viena pret otru, vai arī pret citiem ķermeņiem. Tā kā uzdevumā nav prasīts "atrast visus pudeļu novietošanas veidus", bet ir teikts: "novietot uz horizontāla galda četras vienādas pudeles tā, lai visi attālumi starp kakliņiem būtu vienādi", tad apskatīsim tikai vertikāli un horizontāli novietotas pudeles, t.i., pudeles, kas novietotas tikai trīs stāvokļos. Tagad varam sastādīt tabulu (skat. 89.zīm.) par veidiem, kādos šīs pudeles var būt izvietotas (cik ar kakliņu uz augšu, cik guļus, cik ar kakliņu uz leju). Izvietojuma attēli ir 98. un 99. zīmējumos.

	Ar kakliņu uz leju	**Ar kakliņu uz augšu**	**Guļus**
1.	**0**	**4**	**0**
2.	**0**	**3**	**1**
3.	**1**	**3**	**0**
4.	**0**	**2**	**2**
5.	**2**	**2**	**0**
6.	**1**	**2**	**1**
7.	**0**	**1**	**3**
8.	**3**	**1**	**0**
9.	**2**	**1**	**1**
10.	**1**	**1**	**2**
11.	**0**	**0**	**4**
12.	**4**	**0**	**0**
13.	**1**	**0**	**3**
14.	**3**	**0**	**1**
15.	**2**	**0**	**2**

89.zīm.

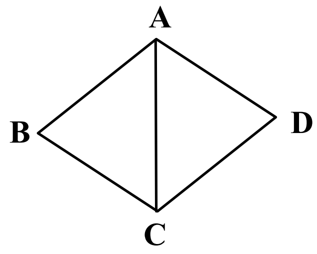
Tātad pavisam eksistē 15 dažādi veidi, kā 4 pudeles var novietoties uz galda. Apskatīsim pēc kārtas visus 15 gadījumus un katrā no tiem izspriedīsim, vai ir iespējams starp pudelēm izvēlēties tādus attālumus, lai visi attālumi starp pudeļu kakliņiem būtu vienādi.

1.izvietojums – visas pudeles stāv ar kakliņiem uz augšu (skat. 90.zīm.).



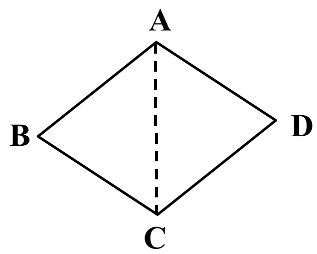
90.zīm.

Skaidrs, ka tagad visu pudeļu kakliņu centri – apzīmēsim tos ar burtiem A, B, C, D atrodas vienā plaknē (šī plakne ir paralēla galda virsmai). Vispirms noskaidrosim, kā plaknē var izvietot 3 punktus, lai visi attālumi starp tiem būtu vienādi. Vienīgais iespējamais izvietošanas veids ir regulāra trijstūra virsotnēs. Tātad pudeles ar kakliņiem A, B un C jānovieto tā, lai punkti A, B un C atrastos regulāra trijstūra virsotnēs, jo tikai tad $|AB| = |AC| = |BC|$. Ja gribam, lai $|AD| = |DC| = |CA|$, tad arī punktiem A, C un D jāatrodas regulāra trijstūra virsotnēs; tad tam ir jābūt citam trijstūrim, jo punkti D un B nedrīkst sakrist. 91. zīmējumā parādīts vienīgais iespējamais pudeļu izvietojums, kas apmierina uzdevuma prasības $|AB| = |AC| = |BC| = |AD| = |DC|$. (Mērogs var būt gan lielāks, gan mazāks, bet izvietojuma konstrukcija (leņķis) paliek tā pati.)



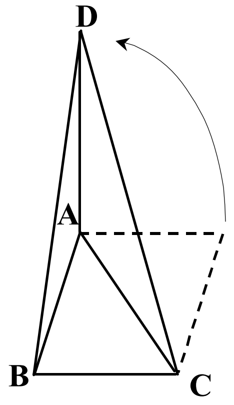
91.zīm.

Atcerēsimies, ka arī attālumam $|AB|$ ir jābūt tādam pašam kā visi pārējie. Tas šajā konstrukcijā nav iespējams, tādēļ jāsecina, ka 4 pudeles ar kakliņiem uz augšu nevar izvietot tā, lai visi attālumi starp kakliņiem būtu vienādi.
Tagad ir skaidrs, ka arī 11. un 12. gadījumos (visas četras pudeles atrodas guļus vai visas četras ar kakliņiem uz leju) uzdevums ir neatrisināms, jo arī tajos visu pudeļu kakliņu centri atrodas vienā plaknē. Plaknes gadījumā mums traucēja tikai viens attālums, t.i., starp B un D. Pārējie atbilda uzdevuma nosacījumiem.
Iedomāsimies, ka no cieta papīra izgriezts 92. zīmējumā parādītais četrstūris ABCD.



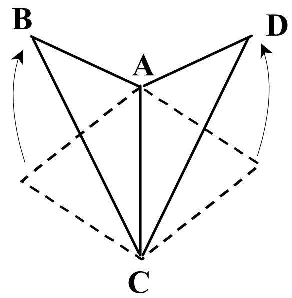
92.zīm.

Līnija AC būs locījuma līnija. Vai varam šo četrstūri salocīt tā, lai attālums starp punktiem B un D kļūtu tāds pats kā, piemēram, starp punktiem A un C? Varam.
Piemēram, ΔABC atstājot uz vietas, bet ΔADC lēnām ceļot augšā aiz virsotnes D. Attālums starp B un D visu laiku samazināsies. Brīdī, kad $|BD|$ kļūs vienāds ar $|AC|$, kustību pārtrauksim (skat. 93.zīm.).

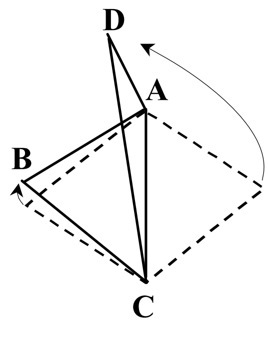


93.zīm.

Varam rīkoties arī šādi: atstāsim uz vietas tikai nogriezni AC, bet abas virsotnes B un D celsim augšā vienu otrai pretī. Līdzko $|DB| = |AC|$, kustību pārtrauksim. Atkarībā no tā, cik atšķirīgi būs punktu B un D celšanas ātrumi, varam iegūt dažādus zīmējumus (skat. 94. un 95.zīm.):

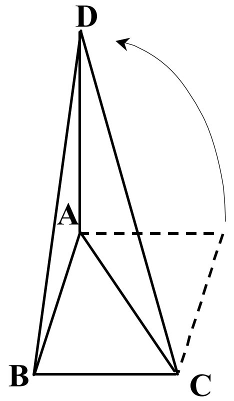


94.zīm.



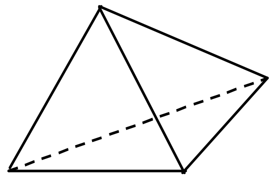
95.zīm.

Tādu punktu A, B, C un D izvietojumu kā 96. zīmējumā iespējams iegūt, piemēram, tad, ja ir 3 pudeles ar kakliņiem uz leju (punkti A, B un C) un viena pudele ar kakliņu uz augšu (punkts D).



96.zīm.

Attēls būs tāds pats (tikai punkti A, B un C nedaudz pacelti no galda virsmas) arī tad, ja ir novietota stāvus. (Izmēģiniet!) Starp citu, šāda konstrukcija ir izvietojama arī tad, ja ir viena pudele guļus un trīs pudeles ar kakliņiem uz leju, tikai šajā gadījumā visi attālumi būs daudz mazāki, nekā iepriekšējos gadījumos. (Šāda konstrukcija var būt arī neizpildāma, ja pudeļu kakliņi ir ļoti resni, t.i., pudeles diametra un kakliņa diametra starpība ir maza.)
Tūdaļ jāsaka, ka visos pārējos pudeļu izvietojumu gadījumos (izņemot 1., 11. un 12.) tās ir iespējams izkārtot tā, lai visi attālumi starp kakliņu centriem būtu vienādi. Lūdzu, vispirms izdomājiet paši, kā katrā gadījumā to var izdarīt, un tikai pēc tam salīdziniet ar sekojošo atrisinājumu, zīmējumiem un komentāriem.
Tātad dažādo iespējamo pudeļu izvietojumu telpā, kas apmierina uzdevuma prasības, ir 12. Visos gadījumos punkti A, B, C un D veido regulāru trijstūra piramīdu (skat. 97.zīm.),



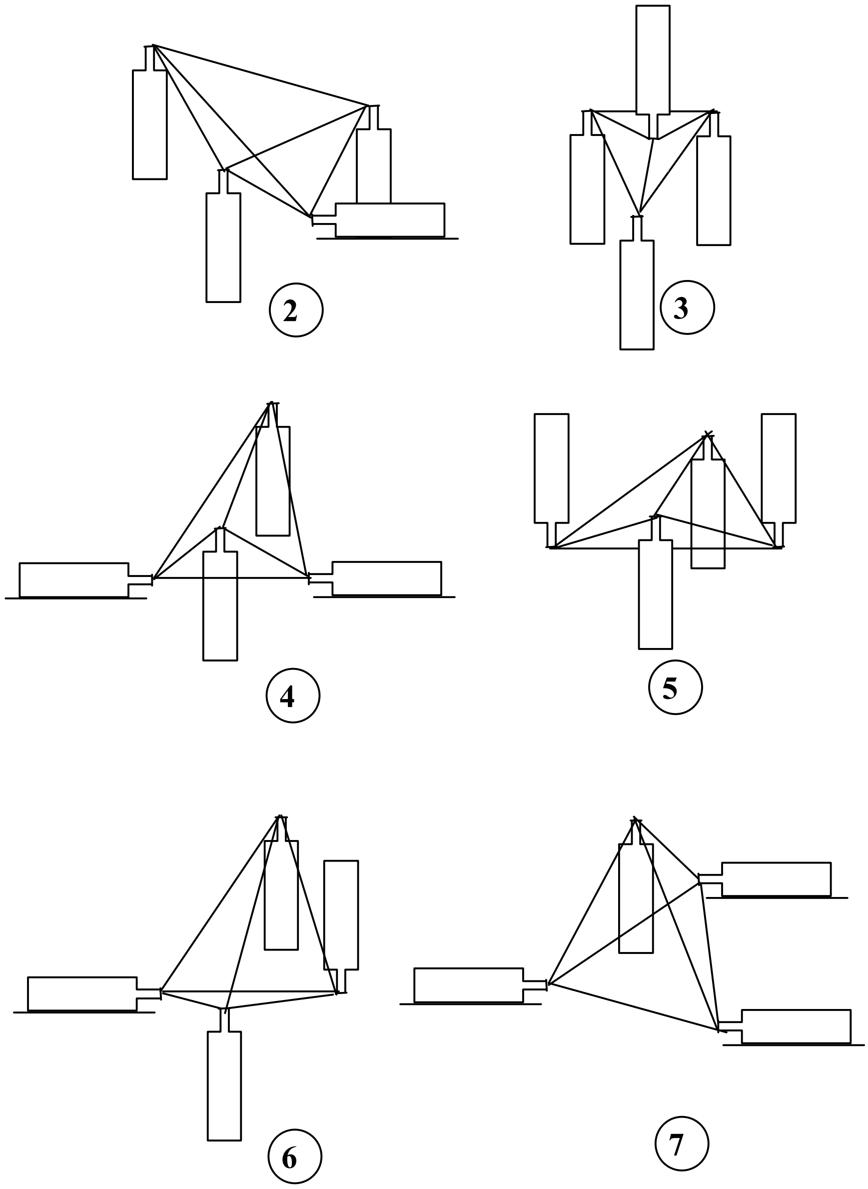
97.zīm.

taču visos 12 gadījumos šīs piramīdas viena no otras ar kaut ko atšķiras. Piemēram, 3. un 8. gadījumā piramīdas ir vienādas pēc izmēriem, tikai 8. gadījumā šī piramīda "stāv" stabili uz pamata, bet 3. gadījumā it kā nostādīta uz virsotnes.
Varam saskatīt līdzību arī 3. un 2. gadījumā. Abos gadījumos piramīdai viena virsotne atrodas lejā, bet trīs pārējās ir vienādā attālumā no galda. Piramīdas atšķiras pēc izmēriem un arī ar to, ka 3. gadījumā viena virsotne saskaras ar galda virsmu, bet 2. gadījumā neviena piramīdas virsotne nesaskaras ar galda virsmu. Līdzīgi (uz vienas šķautnes) novietotas piramīdas arī 4., 5. un 15. gadījumā, bet katrai ir citi izmēri.
Šādi līdzību meklēšanas vingrinājumi labi attīsta dažādas vērtīgas īpašības, piemēram, telpisko iztēli, salīdzināšanas un analizēšanas spējas, kas labam matemātiķim ir ļoti vajadzīgas.

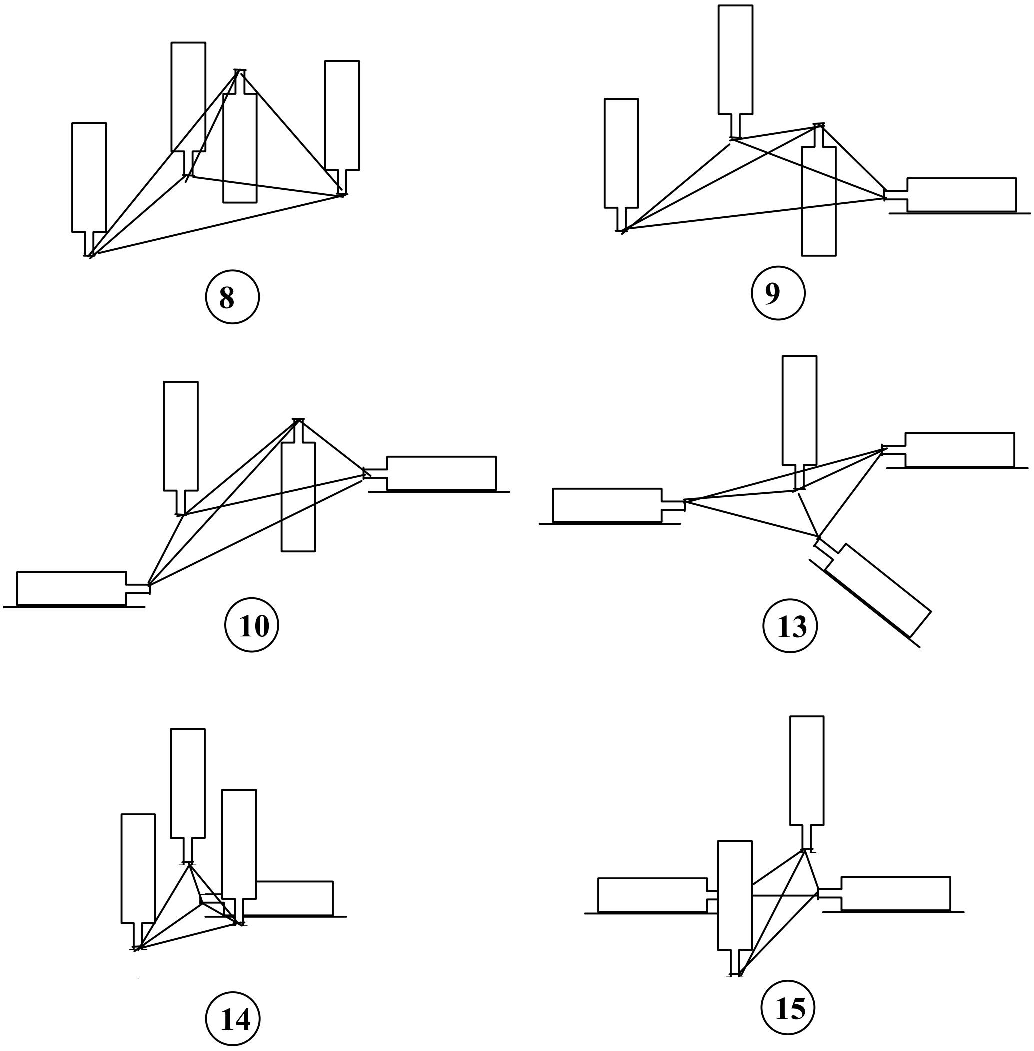
Pamatojoties uz šo uzdevumu, tālāk dota matemātiska mīkla.
Mīkla. Astoņas reizes tiek izraudzīta kāda piramīdas īpašība, pēc tam ar attiecīgajiem numuriem norādītas visas tās piramīdas, kurām šī īpašība piemīt:

1) 2., 3., 13.; **4) 3., 6., 10., 13.;** **7) 5., 9., 15.;**
2) 7., 8., 14.; **5) 4., 5., 6.;** **8) 2., 4., 7.**
3) 4., 5., 15.; **6) 2., 6., 9., 14.;**

Uzminiet, kāda īpašība katru reizi izraudzīta!



98.zīm.



99.zīm.

4.3. Atbilde. Lai kā arī taisnstūris, kura izmēri 9x10, būtu pārklāts ar 45 kartītēm, kuru izmēri 1x2, to otrreiz nevar pārklāt ar šīm pašām kartītēm tā, lai visas kartītes, kas pirmajā pārklājumā atradušās vertikāli, būtu horizontālā stāvoklī, un otrādi.

Risinājums. Šajā uzdevumā teikts “taisnstūris, kura izmēri 9x10 rūtiņas, pārklāts ar 45 kartītēm, kuru izmēri 1x2”.

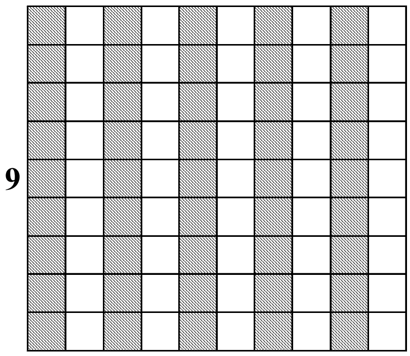
Vai jums visiem uzreiz neradās jautājums – kā pārklāts? Iespēju, kā taisnstūri, kura izmēri 9x10 var pārklāt ar 45 kartītēm, kuru izmēri 1x2, ir ārkārtīgi daudz. Kura no šīm daudzajām iespējām izmantota konkrētajā gadījumā? To uzdevuma sastādītājs ir noklusējis un, droši vien, ar nodomu.

Tāpēc tagad vispirms būtu jānoskaidro, vai eksistē kaut viens tāds pārklājuma veids, kādā taisnstūri var pārklāt ar tām pašām kartītēm tā, lai kartītes, kas pirmajā pārklājumā atradās horizontāli, tagad atrastos vertikāli, un otrādi.

Ja būtu daži pārklājumi, kādos var izpildīt prasības, un daži, kādos nevar, tad uzdevuma atrisinājums būtu šāds.

“Tas, vai taisnstūri var pārklāt ar tām pašām kartītēm tā, lai…(seko nosacījums)…, ir atkarīgs no tā, kādā veidā taisnstūris pārklāts sākumā.

Taisnstūri otrreiz var pārklāt atbilstoši nosacījumiem tad, ja sākumā taisnstūris ir pārklāts šādi: (tālāk seko zīmējumi vai apraksti un arī pierādījums tam, ka šos taisnstūrus tiešām var pārklāt ar tām pašām kartītēm tā, lai visas tās, kas bijušas vertikālas, tagad būtu horizontālas, un otrādi).
To nevar izdarīt visos pārējos gadījumos. (Seko pierādījums, ka visos pārējos gadījumos prasīto tiešām nevar izdarīt.)"
Tāda būtu atrisinājuma shēma tad, ja daži pārklājumi apmierinātu uzdevuma nosacījumus un daži – neapmierinātu. Taču darīsim citādi: uzzīmēsim dažus (pēc iespējas atšķirīgus) pārklājuma veidus un katram no tiem mēģināsim izveidot citu pārklājumu tā, lai tik kartīšu, cik bija vertikālo, jaunajā pārklājumā, būtu horizontālas, un tik, cik bija horizontālo, jaunajā pārklājumā būtu vertikālas.
Piemēram, ja sākotnēji taisnstūris pārklāts ar 25 horizontālām un 20 vertikālām kartītēm, tad, taisnstūri nepagriežot, tas jāpārklāj ar 25 vertikālām un 20 horizontālām kartītēm.
Lūdzu, tagad uzzīmējiet dažus pārklājumus un pārbaudiet, vai tie atbilst uzdevuma nosacījumiem. Tikai pēc tam lasiet tālāk.
Nevienā gadījumā (pieņemsim, ka pārklājumā ir x horizontālas un y vertikālas kartītes) neizdevās iegūt pārklājumu ar y horizontālām un x vertikālām kartītēm. Tāpēc rodas pārliecība, ka to nevar izdarīt nevienam pārklājumam. Atliek tikai to pierādīt. Iedomāsimies, ka viens tāds pārklājums eksistē. Tajā ir v vertikālas un h horizontālas kartītes, un mēs varam izveidot pārklājumu ar v horizontālām un h vertikālām kartītēm. Necentīsimies šo pārklājumu uzzīmēt vai iztēloties, jo tāda pārklājuma patiesībā nav. Vienkārši domāsim, kas notiktu, ja šāds pārklājums eksistētu. Tātad pieņemsim, ka taisnstūri, kura izmēri ir 9x10, var pārklāt abos vajadzīgajos veidos.
Tagad uzzīmēsim vēl divus taisnstūrus, kuru izmēri 9x10, un abus iekrāsosim šādi (skat. 100.zīm.):



100.zīm.

Skaidrs, ka arī tos varēs pārklāt – vienu ar v vertikālām un h horizontālām kartītēm, bet otru – ar v horizontālām un h vertikālām kartītēm.
Tātad abi mūsu jaunie taisnstūri ir pārklāti. Tagad skaitīsim tajos melnās un baltās rūtiņas. Katra horizontālā kartīte pārklāj vienu melnu un vienu baltu rūtiņu, bet katra vertikālā – vai nu divas melnas, vai divas baltas. Tāpēc visas vertikālās kartītes kopā noteikti pārklāj pāra skaitu melno un pāra skaita balto rūtiņu. Bet visas horizontālās kartītes kopā pārklāj h melnas un h baltas rūtiņas, ja horizontālo kartīšu skaits ir h, vai v melnas un v baltas rūtiņas, ja horizontālo kartīšu skaits ir v. Tā kā vertikālās kartītes ir pārklājušas pāra skaitu melno un

pāra skaitu balto rūtiņu, bet pavisam ir 45 baltas un 45 melnas rūtiņas, tad horizontālās kartītes pārklāj nepāra skaitu melno un nepāra skaitu balto rūtiņu. Tāpēc gadījumā, kad horizontālo kartīšu skaits ir h, secinām, ka h ir nepāra skaitlis, un gadījumā, kad horizontālo kartīšu skaits ir v, secinām, ka v ir nepāra skaitlis. Bet kopējais kartīšu skaits ir 45, tātad, divus nepāra skaitļus v un h saskaitot, būtu jāiegūst 45, bet tas nav iespējams.
Tātad, ja pieņemam, ka tāds pārklājums, par kuru runāts uzdevumā, ir iespējams, tad divu nepāra skaitļu summa būtu nepāra skaitlis. Vienīgā iespēja šo pretrunu novērst, ir atzīt, ka neviens šāds pārklājums neeksistē.

4.4. Atbilde. n=12.
Risinājums. Skaitļa n^6 pierakstā ir 7 cipari.
10^6= 1000000 – tas ir vismazākais no visiem 7-ciparu skaitļiem, tāpēc $n^6>1000000$, un $n>10$.
$20^6=2^6\cdot 10^6=64000000$ – tas jau ir 8-ciparu skaitlis.
Skaidrs, ka $n<20$, jo n^6 ir 7-ciparu skaitlis.
Tagad varētu pārbaudīt visus skaitļus no 10 līdz 20 un noskaidrot, vai kāda skaitļa sestā pakāpe satur ciparus 2, 4, 5, 8, 8, 9, 9. Cita iespēja – mēģināt samazināt pārbaudāmo skaitļu skaitu.
Izrēķināsim 15^6.

$$15^6=(\frac{30}{2})^6=\frac{3^6\cdot 10^6}{2^6}=\frac{729}{64}\cdot 10^6;$$

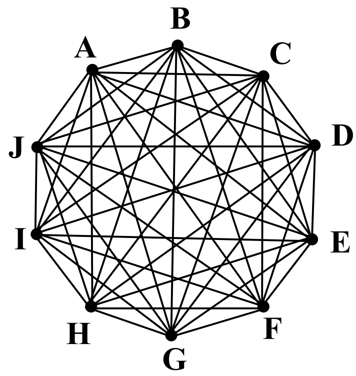
skaitļa $\frac{729}{64}$ veselā daļa ir divciparu skaitlis, jo

$\frac{640}{64}=10$, bet $\frac{729}{64}>\frac{640}{10}$.

Pareizinot skaitli $\frac{729}{64}$ ar 10^6, iegūsim 8-ciparu skaitli.
Arī tas mums vairs neder, tāpēc $n<15$.
Atliek pārbaudīt vienīgi vērtības n=11, n=13, n=12, n=14.
Ja n=11, tad $n^2=11^2$ beidzas ar ciparu 1, $n^3=n^2\cdot 11$ beidzas ar ciparu 1, tāpat arī 11^4, 11^5, 11^6 utt. beidzas ar ciparu 1. Bet uzdevumā teikts, ka n^6 pieraksts nesatur ciparu 1, tātad $n\neq 11$.
Ja n=14, tad 14^2 beidzas ar ciparu 6, $14^3=14^2\cdot 14$ beidzas ar ciparu 4, 14^4 beidzas ar 6, 14^5 beidzas ar 4, 14^6 beidzas ar ciparu 6. Bet cipara 6 skaitļa n^6 pierakstā nav, tāpēc $n\neq 14$.
Tagad atliek pārbaudīt tikai divas n vērtības: n=12, n=13. Esam pierādījuši, ka neviena cita skaitļa sestā pakāpe nav 7-ciparu skaitlis, kas satur ciparus 2, 4, 5, 8, 8, 9, 9.
$12^2=144$,
$12^6=144\cdot 144\cdot 144=20736\cdot 144=20736\cdot(100+40+4)=2073600+207360\cdot 4+20736\cdot 4=$
$=2073600+829440+82944=2985984$.
Tātad skaitlis 12 apmierina uzdevuma prasības. Jāpārbauda vēl skaitlis 13. Varbūt tas der?
$13^2=169$,
$13^6=169\cdot 169\cdot 169=(170-1)^2\cdot 169=(170\cdot 170-170-170+1)\cdot 169=(28900-340+1)\cdot 169=$
$=28561\cdot(170-1)=4855370-28561=4826809$.
13^6 ir 7-ciparu skaitlis, bet satur citus ciparus, nekā teikts uzdevumā.

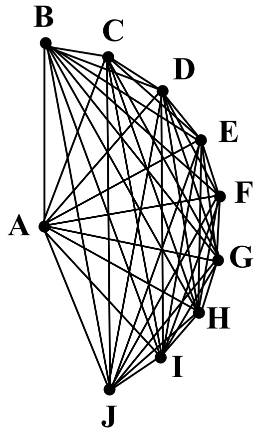
Tātad vienīgā n vērtība, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir n=12.
Piezīme. Arī tad, ja jūs visas vērtības n=11, n=12,…, n=19 esat pārbaudījuši ar kalkulatora palīdzību, uzdevums skaitās pilnīgi atrisināts. Tikai jāpaskaidro, kāpēc neder tās n vērtības, kurām n≤10 un n≥20.

4.5. Risinājums. Tāds desmitstūris iespējams tikai tad, ja tas ir ieliekts, jo izliektam daudzstūrim visas diagonāles atrodas iekšpusē.
Mēģiniet zīmēt ieliektu desmitstūri. Vienu, otru, trešo,…, desmito,…, trīsdesmito. Redzēsiet, ka nekas nesanāk – vai nu atrodas kāda diagonāle, kura krusto malas, vai arī daudzstūra iekšpusē ir vairāk nekā 7 diagonāles. Bet kā būtu, ja ņemtu talkā 101. zīmējumā attēloto izliekto daudzstūri?



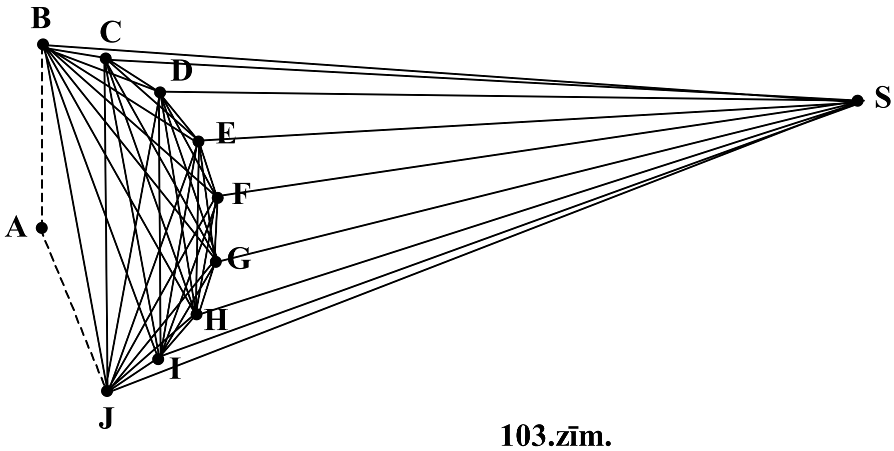
101.zīm.

To var transformēt tā, kā parādīts 102. zīmējumā.



102.zīm.

Tad, tālu pa labi no šī daudzstūra novietojot kādu punktu S, savienojot to ar J un B un noņemot virsotni A, malas JA un AB, iegūst 103. zīmējumā redzamo desmitstūri SBCDEEFGHIJ, kuram lielākā daļa diagonāļu atrodas ārpusē, jo izliektā 10-stūra iekšpuse tagad kļuvusi par jaunā 10-stūra ārpusi.

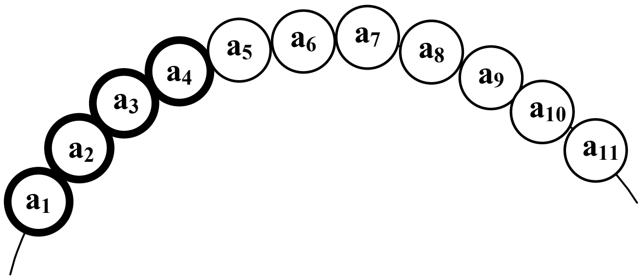


103.zīm.

No jaunā rodas tikai diagonāles SI, SH, SG, SF, SE, SD un SC. Tās visas atradīsies jaunā desmitstūra iekšpusē, bet to skaits ir tieši 7.
Tātad uzdevums atrisināts.

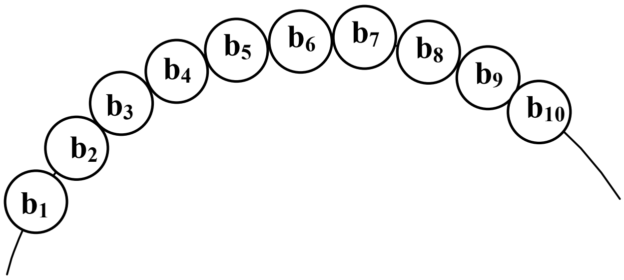
4.6. Atbilde. Tāds 40 skaitļu izvietojums uz riņķa līnijas neeksistē.

Risinājums. Pieņemsim, ka uz riņķa līnijas ir uzrakstīti 40 skaitļi tā, ka katru septiņu pēc kārtas ņemtu skaitļu summa ir negatīva, bet katru vienpadsmit pēc kārtas ņemtu skaitļu summa – pozitīva.
Apskatīsim 4 pēc kārtas ņemtus skaitļus a_1, a_2, a_3, a_4. Septiņus nākošos skaitļus apzīmēsim ar a_5, a_6,…, a_{11} (skat. 104.zīm.).



104.zīm.

Skaitļu uzrakstīšanas veids apmierina uzdevuma nosacījumus, tāpēc
$a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}<0$, un
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}>0$.
Tas var būt tikai tad, ja $a_1+a_2+a_3+a_4>0$.
Tā kā skaitļi a_1, a_2, a_3, a_4 bija brīvi izvēlēti, varam droši apgalvot, ka jebkuru četru pēc kārtas ņemtu skaitļu summa ir pozitīvs skaitlis. Un, protams, arī jebkuru astoņu pēc kārtas ņemtu skaitļu summa ir pozitīvs skaitlis, jo, ja
$a_1+a_2+a_3+a_4>0$ un $a_5+a_6+a_7+a_8>0$, tad arī
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8>0$. Tātad jebkuru 7 pēc kārtas ņemtu skaitļu summa ir negatīvs skaitlis, bet jebkuru 8 pēc kārtas ņemtu skaitļu summa ir pozitīvs skaitlis.
Apskatīsim kādu riņķa līnijas daļu, piemēram, (skat. 105.zīm.) skaitļus b_1, b_2,…, b_{10}.



105.zīm.

Izmantojot iepriekš iegūtās īpašības, varam rakstīt:

$$\left.\begin{array}{r} b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8<0 \\ b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8>0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad b_1>0$$

$$\left.\begin{array}{r} b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9<0 \\ b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9>0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad b_2>0$$

$$\left.\begin{array}{r} b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}<0 \\ b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}>0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad b_3>0$$

utt.

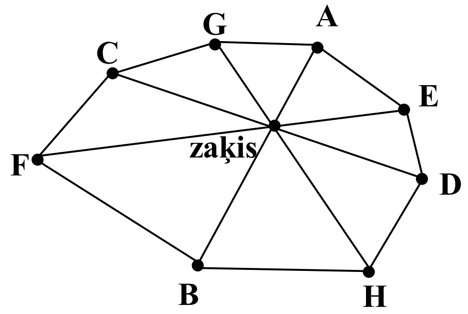
Šādā veidā spriežot iegūsim, ka <u>visi</u> skaitļi ir lielāki par nulli. Bet 7 pozitīvu skaitļu summa taču nevar būt negatīva! Tātad iegūta pretruna.
Mūsu spriedumu īsumā var pierakstīt šādi: "Ja šāds skaitļu izvietojums uz riņķa līnijas eksistētu, tad 7 pozitīvu skaitļu summa būtu negatīvs skaitlis".
Bet tā kā 7 pozitīvu skaitļu summa nekad nevar būt negatīvs skaitlis, tad tāds 40 skaitļu izvietojums uz riņķa līnijas, lai katru 7 pēc kārtas ņemtu skaitļu summa būtu negatīva un katru 11 – pozitīva, neeksistē.
Tagad pacentieties atbildēt uz šādiem jautājumiem:
1. Vai uzdevuma risinājumā kaut kur tika izmantots tas, ka 40 skaitļi jāizvieto uz riņķa līnijas? (Ja tas nekur netika izmantots, tad ar tāda paša sprieduma palīdzību mēs varētu pierādīt, ka arī uz taisnes 40 skaitļi tādā veidā nav izvietojami.)
2. Kā šāds uzdevums risināms gadījumā, kad dota taisne?
3. Vai uzdevuma nosacījumos ir būtiski tas, ka jāuzraksta tieši 40 skaitļi? Vai uzdevums būtu risināms tāpat, ja skaitļa 40 vietā būtu minēts kāds cits skaitlis?

4.7. <u>Pierādījums</u>. Pirms sākam risināt uzdevumu, jānoskaidro, pie kādiem nosacījumiem šis gadījums <u>varēja notikt</u>.
Ja, zinām, ka mednieks A tēmēja uz zaķi, bet nošāva mednieku B, varam secināt, ka zaķis un abi mednieki atradās uz vienas taisnes (skat. 106.zīm.).

B____________________ **A**
zaķis

106.zīm.

Tā kā arī mednieks B šāva uz zaķi, tad tieši viņš (un nevis kāds cits) nošāva mednieku A. Tā kā gan mednieks A, gan B šāva tikai vienu reizi, tad viņi nošāva tikai viens otru un nevienu citu mednieku.
Ja mednieks C nošāvis mednieku D, līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā varam izspriest, ka zaķis un abi mednieki atrodas uz vienas taisnes un ka abi mednieki C un D ir nošāvuši viens otru un nevienu citu mednieku.
Analoģiski varam izspriest par visiem citiem medniekiem. Tātad
1) mednieku skaits ir pāra skaitlis (t.i., daudzstūra virsotņu skaits k ir pāra skaitlis);
2) zaķis atrodas daudzstūra diagonāļu krustpunktā; (ja k=8, situācija varētu būt tāda, kā parādīts 107. zīmējumā).



107.zīm.

3) ja mednieki A un B ir nošāvuši viens otru, tad taisne, kas savieno A ar B, doto k-stūri sadala 2 daļās tā, ka vienā taisnes pusē noteikti ir tieši tikpat daudz mednieku, cik otrā pusē. (Zīmējumā taisnes AB vienā pusē ir mednieki F, C, G, otrajā – mednieki E, D, H.)
Pierādīsim to šādi.
Pieņemsim, ka taisne AB ir novilkta un vienā pusē ir n mednieku, otrā pusē – m mednieku, pie tam n<m. Tā kā mednieki A un B ir tēmējuši uz zaķi, bet nošāvuši viens otru, tad zaķis atrodas uz taisnes AB. Visi citi mednieki arī tēmēja uz zaķi, tāpēc jebkurš šāviens krustos taisni AB. Katrs mednieks nošāvis tieši vienu citu mednieku, tātad tie mednieki, kuru skaits ir n, nošāvuši tieši n medniekus no tiem, kuri atrodas taisnes AB pretējā pusē. Pēc pieņēmuma pretējā pusē ir m mednieku un m>n, tātad daži mednieki paliks dzīvi. Uzdevumā teikts, ka visi mednieki iet bojā, tātad gadījums, ka n<m nav iespējams. Esam pierādījuši, ka O ir krustpunkts tām diagonālēm, kuras daudzstūra virsotņu skaitu sadala vienādās daļās, t.i., vienā pusē diagonālei ir tikpat virsotņu, cik otrā pusē.
Nav grūti pārliecināties, ka katrā k-stūrī, ja k ir pāra skaitlis, šāds diagonāļu krustpunkts ir ne vairāk kā viens.
Tagad esam beiguši noskaidrot un precizēt apstākļus, kuros uzdevumā aprakstītais notikums varēja izpildīties. Reizē ar to esam pierādījuši prasīto – to, ka bez punkta O daudzstūrī nav cita punkta ar aprakstīto īpašību.

4.8. <u>Atbilde</u>. Katrā stabiņā nepāra skaits balto kubiņu nevar būt. Katrā stabiņā nepāra skaits melno kubiņu var būt.

<u>Risinājums</u>. Pavisam ir 14 balti kubiņi. Vai var būt tā, ka katrā stabiņā ir nepāra skaits baltu kubiņu?
Apskatīsim visus tos stabiņus, kas atrodas vertikālā stāvoklī. Tādu stabiņu ir 9. Ja katrā stabiņā (to pavisam ir 27 – pa 9 katrā virzienā) būtu nepāra skaits baltu

kubiņu, tad arī katrā no apskatāmajiem 9 stabiņiem būtu nepāra skaits baltu kubiņu. Taču visi šie 9 stabiņi kopā veido kubu 3x3x3, tātad tajos kopā ir 14 baltu kubiņu.
(*) Vai var katrā stabiņā ierakstīt skaitli 1 vai 3, lai summā iznāktu 14? (Vispār katrā stabiņā var būt 0, 1, 2 vai 3 balti kubiņi, bet skaitļi 0 un 2 nav nepāra skaitļi, tāpēc summu 14 drīkstam sastādīt tikai no 1 un 3.)
Izmēģinot visus iespējamos variantus, varam pārliecināties, ka šādi summu 14 iegūt nevar. To var izspriest arī citādi.
Jautājums **(*)** ir ekvivalents šādam <u>uzdevumam</u>:

"Vai var 9 kastītēs sadalīt 14 monētas tā, lai katrā kastītē būtu 1 vai 3 monētas?"

Rēķināsim šo <u>uzdevumu</u>. Vispirms visās kastītēs ieliksim 1 monētu. Paliks pāri 14-9=5 monētas.
Tagad dažās kastītēs jāpieliek vēl divas monētas, tad tajās būs 3, pārējās – 1 monēta. Taču 5 ar 2 nedalās – divās kastītēs varēsim pielikt 2 monētas, bet viena monēta paliks pāri. Tātad 14 monētas nevar izvietot 9 kastītēs tā, lai katrā būtu 1 vai 3 monētas.
Līdz ar to esam ieguvuši negatīvu atbildi arī uz dotā uzdevuma jautājumu: nevar būt, ka katrā stabiņā ir nepāra skaits baltu kubiņu.

Iespējams arī cits spriedums.
Pieņemsim, ka mūsu 9 stabiņos katrā ir nepāra skaits baltu kubiņu, bet visos kopā ir 14 baltu kubiņu. X – to stabiņu skaits, kuros ir 1 balts kubiņš, y - to stabiņu skaits, kuros ir 3 balti kubiņi (acīmredzot x+y=9). Tad
$1 \cdot x+3 \cdot y=14$
$x+y=9$.
Atņemsim no pirmā vienādojuma otro. Iegūsim
$x+3y-x-y=14-9$
$2y=5$
$y=\frac{5}{2}$.
Taču tas nav iespējams, jo y ir vesels skaitlis. Tātad pieņēmums, ka katrā stabiņā ir nepāra skaits baltu kubiņu, ir nepareizs.
Atbildēsim uz otro jautājumu – vai var būt tā, ka katrā stabiņā ir nepāra skaits melnu kubiņu?
Melno kubiņu skaits ir 13. 13 var sadalīt 9 stabiņos tā, lai katrā būtu 1 vai 3 melni kubiņi:
13=3+3+1+1+1+1+1+1+1.
Tādu pretrunu, kā iepriekšējā gadījumā, iegūt neizdodas. Taču vēl esam tālu no galīgā atrisinājuma. Vēl jāpārbauda, vai visus melnos kubiņus var izvietot tā, lai visos 27 stabiņos (pa 9 trijos virzienos) būtu nepāra skaits melnu kubiņu.
Iedomāsimies, ka dotais kubs 3x3x3 novietots uz galda. Tos 9 kubiņus, kas saskaras ar galda virsmu, nosauksim par 1. stāvu, nākošo kārtu – par 2. stāvu, bet pašu augšējo – par 3. stāvu (skat. 108.zīm.).

A_1	B_1	C_1
D_1	E_1	F_1
H_1	J_1	G_1

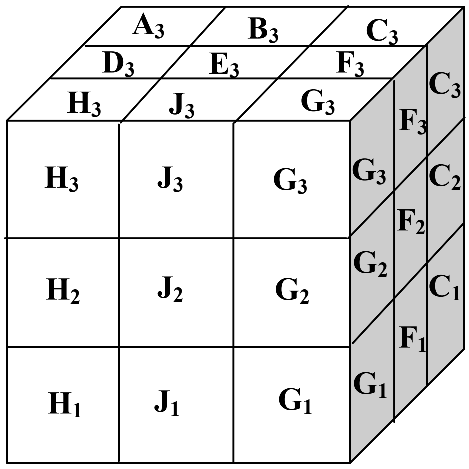
1.stāvs

A_2	B_2	C_2
D_2	E_2	F_2
H_2	J_2	G_2

2.stāvs

A_3	B_3	C_3
D_3	E_3	F_3
H_3	J_3	G_3

3.stāvs



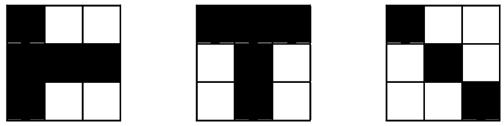
108.zīm.

Jāpārlūko šādi stabiņi.

Vertikāle	**1)**	$A_1A_2A_3$	**Horizontāle**	**10)**	$H_1J_1G_1$	**19)**	$H_1D_1A_1$
	2)	$B_1B_2B_3$		**11)**	$D_1E_1F_1$	**20)**	$J_1E_1B_1$
	3)	$C_1C_2C_3$		**12)**	$A_1B_1C_1$	**21)**	$G_1F_1C_1$
	4)	$D_1D_2D_3$		**13)**	$H_2J_2G_2$	**22)**	$H_2D_2A_2$
	5)	$E_1E_2E_3$		**14)**	$D_2E_2F_2$	**23)**	$J_2E_2B_2$
	6)	$F_1F_2F_3$		**15)**	$A_2B_2C_2$	**24)**	$G_2F_2C_2$
	7)	$H_1H_2H_3$		**16)**	$H_3J_3G_3$	**25)**	$H_3D_3A_3$
	8)	$J_1J_2J_3$		**17)**	$D_3E_3F_3$	**26)**	$J_3E_3B_3$
	9)	$G_1G_2G_3$		**18)**	$A_3B_3C_3$	**27)**	$G_3F_3C_3$

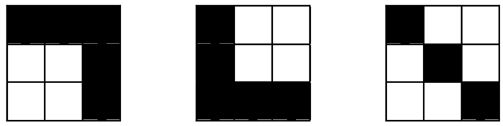
Pārbaudot dažādus 13 melnu kubiņu izvietojuma variantus, var atrast 2 tādus, kuros katrā no uzrakstītajiem stabiņiem melno kubiņu skaits ir 1 vai 3 (skat. 109.zīm.).

1.variants



1.stāvs **2.stāvs** **3.stāvs**

2.variants



1.stāvs **2.stāvs** **3.stāvs**

109.zīm.

Daudzus citus zīmējumu variantus ir iespējams iegūt no šiem, vai nu pagriežot kubu citā stāvoklī, vai arī mainot "stāvus" vietām.

Tātad šajā gadījumā atbilde ir pozitīva – var būt tā, ka katrā stabiņā ir nepāra skaits melnu kubiņu.

4.9. <u>Pierādījums</u>. Šo uzdevumu ļoti viegli sajaukt ar citu: "Atrast visas skaitļu a, b, c vērtības, kas apmierina vienādību $a^{15}+b^{15}=c^{16}$."

Bieži vien skolēni, paši to neapzinādamies, sāk rēķināt tieši tādu uzdevumu, un, protams, neveiksmīgi. Tiek pārbaudītas visdažādākās iespējamās pieejas uzdevumam, ievietoti a, b un c vietā dažādi skaitļi, bet labākajā gadījumā, tiek iegūtas 3 atbildes:

1) a=b=c=2;

2) a=1, b=0, c=1;

3) a=0, b=1, c=1.

Patiesībā uzdevumā prasīts kaut kas cits – pierādīt, ka šādu atbilžu ir pietiekami daudz (piemēram, 1001). Ir jāsaprot, ka nav jāatrod <u>visas</u> atbildes, ka šis vienādojums nav jāatrisina. Uzdevuma nosacījumus mēs drīkstam vienkāršot pēc savas patikas, no visiem iespējamiem gadījumiem izvēlēties to, kurš patīk vislabāk, ja vien šim apakšgadījumam eksistē prasītās >1000 atbildes.

Pastāstīsim, kā šis uzdevums ir atrisināts (starp citu, tādā veidā spriežot, atrisinājumu varēja arī neiegūt, un tad būtu jāmeklē cits paņēmiens, kā uzdevumu vienkāršot, taču šoreiz mums ir laimējies).

Dota vienādība $a^{15}+b^{15}=c^{16}$. Būtu vieglāk, ja abās vienādības pusēs būtu reizinājums, taču šoreiz kreisajā pusē ir summa. Vienkāršības labad tagad apskatīsim gadījumu, ka a=b. Dotā vienādība vienkāršojas $2a^{15}=c^{16}$.

Šeit atkal nevajadzētu kļūdīties: jāņem vērā, ka nav jāatrod visi a un c, kuriem šāda vienādība ir spēkā. Pietiek, ja uzmin >1000 šādu atbilžu. Tāpēc necentīsimies rēķināt, bet minēt.

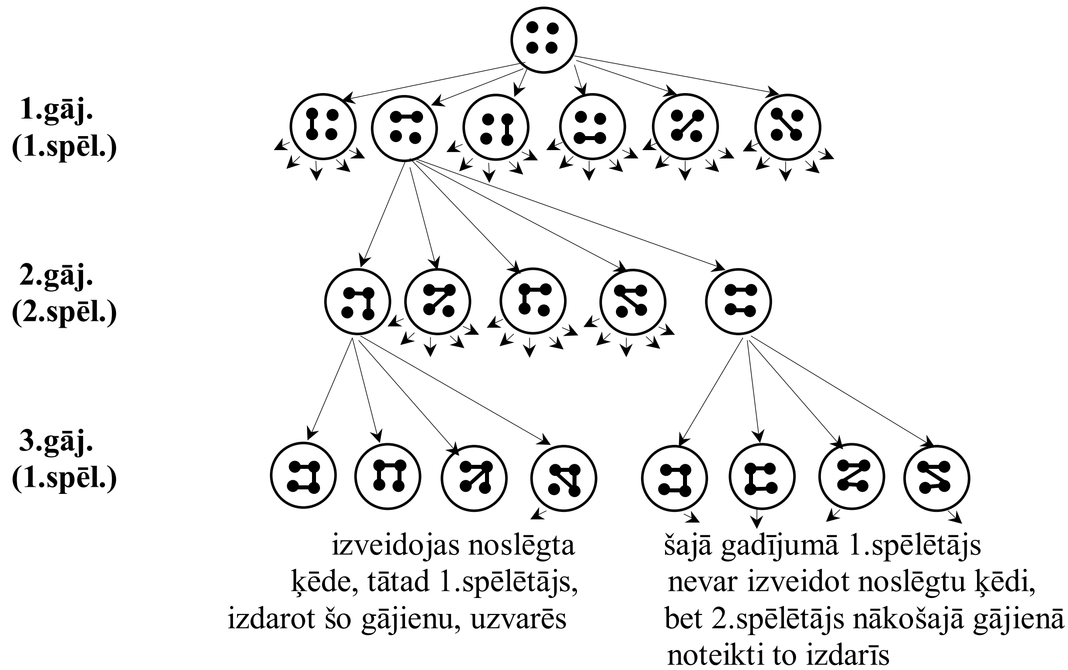
Kreisajā pusē ir reizinātājs "2". Vai nebūtu ērtāk, ja arī visi pārējie reizinātāji būtu 2 pakāpes (t.i., abi pārējie skaitļi a^{15} un c^{16} sastāvētu tikai no divniekiem)? Tas vēl vairāk vienkāršotu uzdevumu. Pagaidām gan vēl nav zināms, vai tādā veidā kaut kas iznāks. Ja neiznāks, domāsim kaut ko citu, bet tagad pārbaudīsim.

Ja $a=2^m$, $c=2^k$ (k, m – naturāli skaitļi), tad vienādība pārrakstāma šādi:

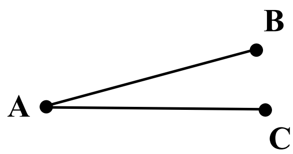
$2\cdot(2^m)=2^{k\cdot16}$
$2^{15m+1}=2^{16k}$
15m+1=16k
k=$\dfrac{15m+1}{16}$, kur k ir vesels skaitlis,
tātad 15m+1 dalās ar 16. Ir nepieciešams, lai 15m+1 būtu pāra skaitlis, jo nepāra skaitlis nekādā gadījumā ar 16 nedalīsies. 15m+1 ir pāra skaitlis tikai tad, ja m ir nepāra skaitlis (variet pārbaudīt!).
Uzrakstīsim m=2n+1 (n – naturāls skaitlis), tad
$$k=\frac{15\cdot(2n+1)+1}{16}=\frac{30n+15+1}{16}=\frac{15n}{8}+1.$$
Skaidrs, ka k ir vesels skaitlis tad, ja n dalās ar 8.
Tāpēc ērti n vietā likt 8t (t – naturāls skaitlis). Tad
$m=2\cdot8t+1=16t+1$
$$k=\frac{15\cdot8t}{8}+1=15t+1.$$
Izrādās, ka ideja par to, ka visi reizinātāji ir divnieki, nebija slikta, jo esam ieguvuši veselu grupu skaitļu, kuriem dotā vienādība ir spēkā (tas, vai ir vēl kādas citas atbildes, mūs nemaz neinteresē; to, ka šādu atbilžu ir vairāk nekā 1000, esam pierādījuši).
Atbilde. $a=b=2^{16t+1}$, $c=2^{15t+1}$, t=0, 1, 2, 3, 4, 5,…, 1000, 1001,…, jeb skaitļu trijnieki (a, b, c), kas apmierina vienādību ir šādi:
1) $(2^{16\cdot0+1}, 2^{16\cdot0+1}, 2^{15\cdot0+1})=(2, 2, 2)$
2) $(2^{16\cdot1+1}, 2^{16\cdot1+1}, 2^{15\cdot1+1})=(2^{17}, 2^{17}, 2^{16})$
3) $(2^{16\cdot2+1}, 2^{16\cdot2+1}, 2^{15\cdot2+1})=(2^{33}, 2^{33}, 2^{31})$
…………………………………………
Atbilžu pareizību varam pārbaudīt. Vai $a^{15}+b^{15}=c^{16}$?
$(2^{16t+1})^{15}+(2^{16t+1})^{15}=(2^{15t+1})^{16}$
$2\cdot2^{15\cdot(16t+1)}=2^{16\cdot(15t+1)}$
$2^{15\cdot16t+15+1}=2^{16\cdot15t+16}$
$2^{16\cdot15t+16}=2^{16\cdot15t+16}$
Vienādība ir spēkā.

4.10. Atbilde. Pareizi spēlējot, vienmēr uzvarēs 2.spēlētājs.

Risinājums. Naglu skaits ir 1977.Nav viegli uz reiz orientēties šajās 1977 naglās un izdomāt, kā tad būtu jāspēlē.
Tāpēc būsim pieticīgāki un sāksim ar 3 naglām. Noslēgta ķēde izveidosies trešajā gājienā (ne ātrāk un ne vēlāk). Tāpēc uzvarēs 1.spēlētājs;
1.gājienu izdara 1.spēlētājs,
2.gājienu izdara 2.spēlētājs,
3.gājienu izdara 1.spēlētājs.
Kā būs ar 4 naglām?

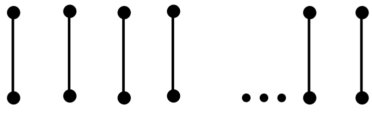


Tātad 2.spēlētājs var spēlēt tā, lai viņš uzvarētu; ja 2.spēlētājs spēlē pareizi, tad 1.spēlētājs 3.gājienā ir spiests izdarīt “sliktu” gājienu, jo “labo” gājienu vairs nav.
Tagad, lūdzu, paņemiet papīru, zīmuli un izdomājiet patstāvīgi, kā pareizi jāspēlē un kurš uzvarēs, ja naglu skaits būs 5, 6 un 7. Tikai pēc tam lasiet tālāk.
Ja esat izanalizējuši uzdevumus ar 5, 6 un 7 naglām, tad noteikti jau ir skaidrs – ja pēc kāda gājiena viena no naglām (apzīmēsim to ar A) savienota ar divām citām naglām (piem., B un C) (skat. 110. zīm.),



110.zīm.

tad nākošajā gājienā tiks savienotas naglas B un C, un tas spēlētājs, kurš to izdarīs, būs uzvarējis. Tātad, pareizi spēlējot, katrs spēlētājs cenšas nepievienot vadu tai naglai, kas jau ir savienota ar kādu citu naglu.
Rezultātā visas naglas sadalās pāros un šie pāri savā starpā nav savienoti (skat. 111. zīm.).

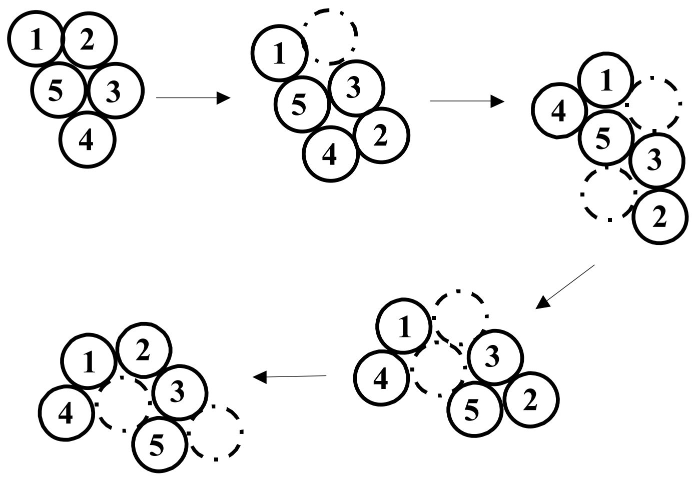


111.zīm.

Ja naglu ir 1977, tad var izveidot 988 šādus pārus, un paliks vēl viena nagla. Tas notiks pēc 988 gājieniem.
Ja 1.gājienu izdara 1.spēlētājs,
2.gājienu izdara 2.spēlētājs,
3.gājienu izdara 1.spēlētājs,
4.gājienu izdara 2.spēlētājs, utt.
(gājienus ar nepāra numuriem izdara 1.spēlētājs, bet gājienus ar pāra numuriem izdara 2.spēlētājs), tad
989. gājiens jāizdara 1.spēlētājam.
Viņš var vai nu brīvo naglu savienot ar kādu citu, vai arī divas naglas, kurām jau ir pāri, savienot savā starpā. Jebkurā no šiem gadījumiem 2.spēlētājs ar nākošo gājienu izveido noslēgtu ķēdi.
Tālāk, pareizi spēlējot, vienmēr uzvarēs 2.spēlētājs, un tas notiks 990.gājienā.
Ja 1.spēlētājs spēlēs nepareizi, bet 2.spēlētājs – pareizi, arī tad uzvarēs 2.spēlētājs, tikai tas notiks ātrāk nekā 990.gājienā, bet, ja 2.spēlētājs spēlēs nepareizi un 1.spēlētājs spēlēs pareizi, tad uzvarēs 1.spēlētājs.

5. nodarbības atrisinājumi

5.1. Atbilde. Viens no daudzajiem iespējamajiem risinājumiem parādīts 112.zīmējumā.



112.zīm.

5.2. Atbilde. No 1 līdz 1000 ir 272 skaitļi, kuru pierakstā ir kaut viens vieninieks.

Risinājums. Skaitlis 1000 satur ciparu 1. Tālāk aplūkosim visus pārējos skaitļus. Papildināsim divciparu un viencipar u skaitļus līdz trīsciparu skaitļiem ar nullēm skaitļa priekšā. (Piemēram, 93 apskatām kā 093, 4 kā 004.)
Līdz ar šiem skaitļiem apskatām arī skaitli 000. Tātad mēs apskatām 1000 “trīsciparu skaitļus”. Tā kā sākumā dotie skaitļi tika papildināti ar nullēm, tad starp apskatāmajiem skaitļiem tādu skaitļu, kas satur kaut vai vienu vieninieku, ir tikpat, cik sākumā (neskaitot skaitli 1000).
Aprēķināsim, cik starp apskatāmajiem skaitļiem ir tādu skaitļu $\overline{abc}$, kas nesatur nevienu vieninieku (a, b, c - cipari).
Cipars a var pieņemt jebkuru no 9 vērtībām 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; tāpat jebkuru no šīm vērtībām var pieņemt katrs no cipariem b un c. Tā kā katra no 9

iespējamām cipara a vērtībām var kombinēties ar katru no 9 iespējamām cipara b vērtībām, tad skaitļa $\overline{abc}$ divus pirmos ciparus var izvēlēties 9·9=81 veidos.
Tā kā katram no šiem veidiem var galā pierakstīt jebkuru no deviņām iespējamām cipara c vērtībām, tad skaitli $\overline{abc}$ prasītajā veidā var izvēlēties 81·9=729 veidos.
Tātad ir 729 skaitļi $\overline{abc}$, kas nesatur nevienu vieninieku.
Tāpēc ir 1000-729=271 skaitļi $\overline{abc}$, kas satur kaut vienu vieninieku.
Atceroties vēl skaitli 1000, iegūstam, ka no 1 līdz 1000 ir 271+1=272 naturāli skaitļi, kuru pierakstā ir vismaz viens vieninieks.

5.3. Atbilde. Vecākais brālis finišēs pirmais.

Risinājums. Kamēr vecākais brālis noskrien 60 m, jaunākais brālis noskrien 56 m. Tātad otrajā skrējienā 4 m attālumā no finiša abi brāļi būs līdzās. Tā kā vecākais brālis skrien ātrāk, tad viņš finišēs pirmais.

5.4. Atbilde. Pareizais laiks ir "bez vienas minūtes trīs".

Risinājums. Apzīmēsim pareizo laiku ar x.
Tad viena no cilvēku A, B, C un D atbildēm ir vai nu x+2 min., vai x-2 min.;
tāpat viena no šīm atbildēm ir vai nu x+3 min., vai x-3 min.,
viena no tām ir vai nu x+4 min., vai x-4 min.,
un viena no tām ir vai nu x+5 min., vai x-5 min.
Uzrakstīsim šīs iespējas tabulas veidā.

x-2	**x+2**
x-3	**x+3**
x-4	**x+4**
x-5	**x+5**

Pēc A un C dotajām atbildēm pulksteņu uzrādītā laika starpība ir 9 minūtes, pie tam A pulkstenis rāda agrāku laiku.
No tabulas redzams, ka tas iespējams tikai tad, ja
a) A atbilde ir "x-4", bet c atbilde ir "x+5",
b) A atbilde ir "x-5", bet c atbilde ir "x+4".
Aplūkosim abas iespējas.
Pirmajā gadījumā pareizais laiks ir "bez divām minūtēm trīs", bet tad B kļūdījies par 1 minūti; tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad šī iespēja atkrīt.
Otrajā gadījumā pareizais laiks ir "bez vienas minūtes trīs". Pārbaude rāda, ka šī atbilde apmierina visus uzdevuma nosacījumus.
Ja atrisinājumu uzmin un tikai pārbauda, vai pulksteņi kļūdās par 2, 3, 4 vai 5 minūtēm, tad jāpamato, kāpēc nav iespējami citi atrisinājumi. Ja tas nav izdarīts, uzdevumu nevar uzskatīt par pilnīgi atrisinātu, jo varētu būt uzdevums, kuram ir vairāki atrisinājumi.

5.5. Atbilde. Viens grāmatas eksemplārs maksā 1 latu un 18 santīmus.

Risinājums. Viena grāmatas eksemplāra cenu apzīmēsim ar x santīmiem. Tad var uzrakstīt šādas nevienādības:
$1200<11x<1300$,

2000<17x<2100.
Tā kā

$1200 : 11 = 109\frac{1}{11}$,

$1300 : 11 = 118\frac{2}{11}$,

$2000 : 17 = 117\frac{11}{17}$,

$2100 : 17 = 123\frac{9}{17}$,

tad šīs nevienādības var pārrakstīt formā

$109\frac{1}{11} < x < 118\frac{2}{11}$ un $117\frac{11}{17} < x < 123\frac{9}{17}$.

Tā kā x – vesels skaitlis, tad vienīgā vērtība, kas apmierina abas iegūtās nevienādības, ir x=118. Tātad viens grāmatas eksemplārs maksā 1 latu un 18 santīmus.

5.6. <u>Pierādījums</u>. Aplūkosim 113.zīmējumu.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
16	**17**	**18**	**19**	**20**	$\boxed{\mathbf{21}}$	**22**	**23**	**24**
24	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
32	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
48	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
56	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

113.zīm.

Viegli saprast, ka katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir divu skaitļu summa – tā skaitļa, kas pierakstīts blakus attiecīgajai rindiņai tabulas ārpusē, un tā skaitļa, kas pierakstīts zem attiecīgās kolonnas tabulas ārpusē.
Piemēram, 21=16+5 (skat. 113.zīm.).
Sauksim rindiņām blakus pierakstītos skaitļus par "pirmajiem saskaitāmajiem", bet zem kolonnām pierakstītos skaitļus - par "otrajiem saskaitāmajiem".
Tās rūtiņas, kurās skaitļiem pierakstītas "-" zīmes, iekrāsosim, bet pārējās atstāsim baltas. Pierakstītās "-" zīmes nodzēsīsim. Mums jāpierāda, ka "krāsaino" skaitļu summa vienāda ar "balto" skaitļu summu.
Tā kā katrā rindiņā ir 4 baltas un 4 iekrāsotas rūtiņas, tad "krāsaino" skaitļu pirmo saskaitāmo summa vienāda ar "balto" skaitļu pirmo saskaitāmo summu. Tā kā katrā kolonnā ir 4 baltas un 4 iekrāsotas rūtiņas, tad "krāsaino" skaitļu otro saskaitāmo summa vienāda ar "balto" skaitļu otro saskaitāmo summu. Tā kā "balto" ("krāsaino") skaitļu summu iegūst, saskaitot to pirmo saskaitāmo summu

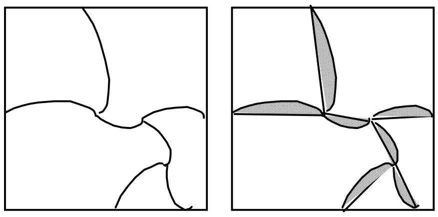
ar otro saskaitāmo summu, tad "krāsaino" skaitļu summa vienāda ar "balto" skaitļu summu.

5.7. Atbilde. Skaitlis, kas sastāv no 600 sešiniekiem un nullēm, nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Risinājums. Ja skaitlis dalās ar 10, tad, lai tas būtu vesela skaitļa kvadrāts, tam jādalās ar 100. Tāpēc tad, ja skaitlis dalās ar 10 un ir pilns kvadrāts, tā beigās ir pāra skaits nuļļu.
Ja šīs nulles atmet, arī iegūst skaitli, kas ir vesela skaitļa kvadrāts. Iegūtais skaitlis beidzas ar 6. Tā kā skaitlis sastāv no sešiniekiem un nullēm un beidzas ar 6, tad dalot šo skaitli ar 2, iegūsim skaitli, kas beidzas ar 3. Šis skaitlis ar 2 nedalās.
Tātad skaitlis, kas sastāv no 600 sešiniekiem un nullēm un beidzas ar 6, nedalās ar 4, bet ar 2 dalās. Tāds skaitlis nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

5.8. Atbilde. Jā, var.

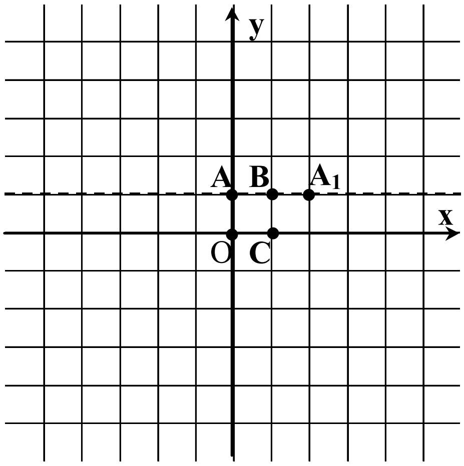
Risinājums. Katram robežas līnijas gabalam (kas nesatur robežu līniju krustpunktus) uz vienu pusi piezīmēsim zonu tā, lai jauni robežu krustošanās punkti nerastos. Kartē visas šīs zonas, kas radās pie iepriekšējām robežām, krāsosim vienā krāsā, atlikušās zonas - otrā krāsā (piemēru skat. 114.zīm.).



114.zīm.

5.9. Atbilde. Nē, nevar.

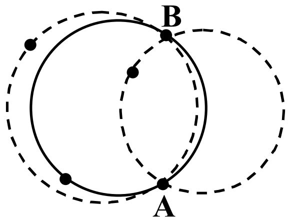
Risinājums. Uzzīmēsim koordinātu asis (skat. 115.zīm.) ar nullpunktu sākuma rūtiņas tajā virsotnē, kurā nesēž sienāzis. Tātad vienam no sienāžiem jānokļūst jānokļūst punktā O, kura koordinātas ir (0;0).
Sienāžu koordinātas sākumā ir A(0;1), B(1;1), C(1;0). Sienāžu koordinātu starpības ir veseli skaitļi.



115.zīm.

Ja A lec pāri B, tad pēc lēciena tas ir uz vienas taisnes ar B un savu iepriekšējo stāvokli un tādā pašā attālumā no B (punktā A_1), kā pirms lēciena. Tāpēc katra A koordināta ir izmainījusies par skaitli, kas ir B un A sākotnējā stāvokļa atbilstošo koordinātu divkāršota starpība. Tā kā koordinātu starpības ir veseli skaitļi, tad abas koordinātas izmainās par pāra skaitļiem.
Katram sienāzim vismaz viena koordināta sākumā ir nepāra skaitlis; ja to izmaina par pāra skaitli, iegūst nepāra skaitli.
Tātad punktā O, kura koordinātas (0;0), neviens sienāzis nenokļūs.

5.10. Pierādījums. Novilksim taisni caur diviem punktiem A un B tā, lai pārējie 3 punkti atrastos no tās vienā pusē. Novilksim riņķa līnijas caur punktiem A un B un katru no 3 pārējiem punktiem. Divas riņķa līnijas var krustoties ne vairāk kā divos punktos. Tā kā novilktās riņķa līnijas krustojas punktos A un B, tad vairāk krustpunktu tām nav. Vidējā riņķa līnija būs prasītā, jo abi pārējie punkti ir uz vienu pusi no taisnes AB un katrs uz savas riņķa līnijas (skat. 116.zīm.).



116.zīm.

6. nodarbības atrisinājumi

6.1. Atbilde. Skaitlis 4·A beidzas ar divām nullēm, un starpība A-B ir pozitīvs sešciparu skaitlis tādā un tikai tādā gadījumā, ja A ir viens no sešciparu skaitļiem: 631425, 634125, 641325, 643125.

Risinājums. Skaitli A uzrakstīsim šādi: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ (a_1, a_2,…, a_6 ir skaitļa A cipari).

Tad skaitlis B ir uzrakstāms kā $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$.

Reizinājums 4·A beidzas ar divām nullēm, tātad skaitlis A beidzas ar 25. Pierādīsim to. Apgalvojums "Skaitlis beidzas ar divām nullēm" patiesībā nozīmē "Skaitlis dalās ar 100". Skaitlis 4·A var dalīties ar 100 tikai tad, ja $4\cdot\overline{a_5a_6}$ dalās ar 100, jo

$4\cdot A=4\cdot\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}=4\cdot(\overline{a_1a_2a_3a_4}\cdot 100+\overline{a_5a_6})=4\cdot 100\cdot\overline{a_1a_2a_3a_4}+4\cdot\overline{a_5a_6}$).

Ja $4\cdot\overline{a_5a_6}$ dalās ar 100, iespējami šādi gadījumi:

$4\cdot\overline{a_5a_6}=100 \Rightarrow \overline{a_5a_6}=25 \Rightarrow a_5=2, a_6=5;$

$4\cdot\overline{a_5a_6}=200 \Rightarrow \overline{a_5a_6}=50 \Rightarrow a_5=5, a_6=0;$
bet šāds gadījums nav iespējams,
jo 0 skaitļa A sastāvā neietilpst.

$4\cdot\overline{a_5a_6}=300 \Rightarrow \overline{a_5a_6}=75 \Rightarrow a_5=7, a_6=5;$
tas nav iespējams, jo cipars 7
skaitļa A sastāvā neietilpst.

$4\cdot\overline{a_5a_6}=400 \Rightarrow \overline{a_5a_6}=100,$
bet 100 nav divciparu skaitlis.

Acīmredzot arī nākošie gadījumi $4\cdot\overline{a_5a_6}=500$, $4\cdot\overline{a_5a_6}=600$ utt. nav iespējami, jo tad $\overline{a_5a_6}$ pārsniedz 100.

Tātad esam pierādījuši: ja 4·A beidzas ar divām nullēm, tad skaitļa A pēdējie cipari noteikti ir šādi: $a_5=2$, $a_6=5$.

Tad A=$\overline{a_1a_2a_3a_4 25}$ un B=$\overline{52a_4a_3a_2a_1}$.

Tā kā A-B ir pozitīvs skaitlis (tas ir teikts uzdevuma nosacījumos), skaitlim A jāsākas ar ciparu 6 (ar 5 tas sākties nevar, bet tam jābūt lielākam par B).

Tātad $a_1=6$, un iegūstam A=$\overline{6a_2a_3a_4 25}$, B=$\overline{52a_4a_3a_2 6}$.

Atcerēsimies, ka uzdevumā teikts: starpība A-B ir sešciparu skaitlis. Tāpēc a_2 jābūt lielākam par 2. Pretējā gadījumā, no a_2 atņemot 2 (vai, ja jau iepriekš būs radies pārnesums, no a_2-1 atņemot 2), radīsies pārnesums, un tad starpība vairs nebūs sešciparu skaitlis.

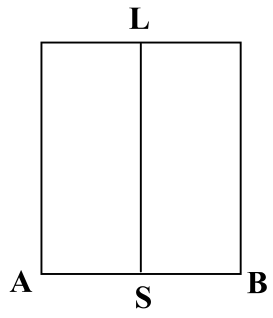
Tātad a_2 var būt tikai 3 vai 4. Iespējami šādi varianti:

1) $a_2=3$, $a_3=1$, $a_4=4$;
2) $a_2=3$, $a_3=4$, $a_4=1$;
3) $a_2=4$, $a_3=1$, $a_4=3$;
4) $a_2=4$, $a_3=3$, $a_4=1$.

Pārbaudīsim:

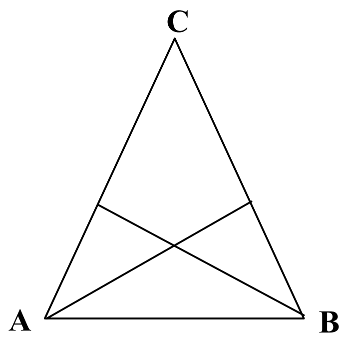
1) A-B=631425-524136=107289;
2) A-B=634125-524136=112689;
3) A-B=641325-523146=118179;
4) A-B=643125-521346=121779.

6.2. Risinājums. Vispirms pārlocīsim lapu uz pusēm. Ja gribēsim, lai divas trijstūra virsotnes atrodas punktos A un B, tad trešajai virsotnei būs jāatrodas uz liekuma līnijas SL (skat. 117.zīm.).



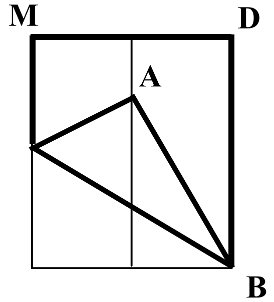
117.zīm.

Uz brīdi iedomāsimies, ka regulārs trijstūris ir iegūts (skat. 118.zīm.).



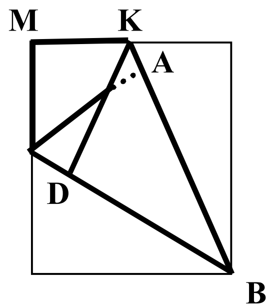
118.zīm.

Tam visu malu garumi ir vienādi; trijstūri ir iespējams pārlocīt gan tā, lai mala AB sakrīt ar malu AC, gan tā, lai mala AB sakrīt ar malu BC.
Atgriezīsimies pie dotās kvadrātveida papīra lapas. Pārlocīsim to tā, lai virsotne atrastos uz vertikālās locījuma līnijas (skat. 119.zīm.).



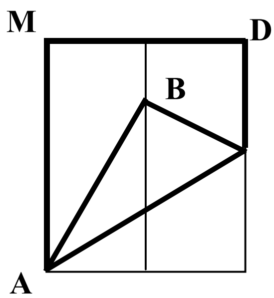
119.zīm.

Tajā vietā, kur tagad novietojusies virsotne A , jāatrodas trešajai regulārā trijstūra virsotnei (apzīmēsim to ar C). Tā kā zīmuli lietot mums nav atļauts, virsotni C atzīmēt nevaram, tāpēc arī tālāk nodarbosimies ar locīšanu. Brīvo kvadrāta stūri aiz virsotnes D pārlocīsim pāri malai AB (skat. 120.zīm.)



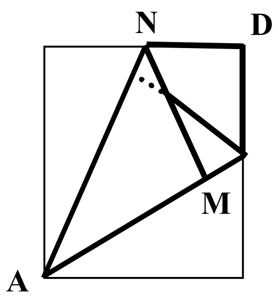
120.zīm.

Tagad lapu varam atlocīt vaļā, bet atcerēsimies, ka griezums būs jāizdara pa locījuma līniju KB. Turpināsim locīšanu, lai pēc iespējas precīzāk iegūtu otru griezuma līniju.
Tagad pārlocīsim lapu tā, lai virsotne B atrastos uz vertikālās locījuma līnijas (skat. 121.zīm.).



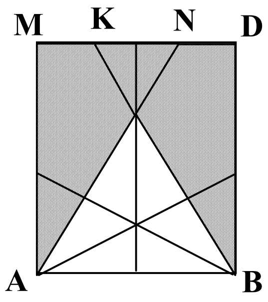
121.zīm.

Pēc tam brīvo kvadrāta stūri aiz virsotnes M pārlocīsim pāri malai AB (skat. 122.zīm.)



122.zīm.

Atlokot lapu vaļā, redzēsim tādas locījuma līnijas, kādas redzamas 123.zīmējumā.

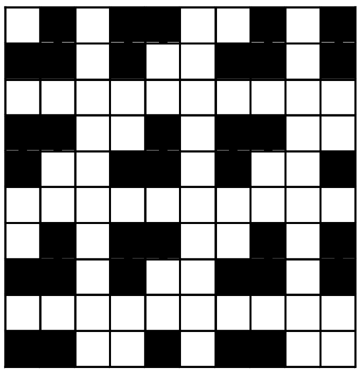


123.zīm.

Atliek iesvītroto daļu nogriezt, un būsim ieguvuši regulāru trijstūri ABC.

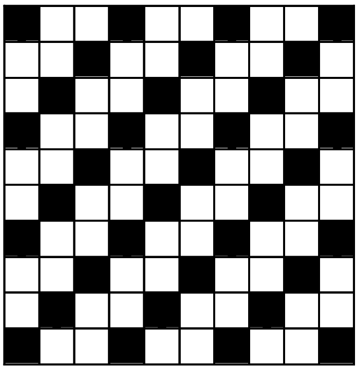
6.3. Atbilde. No dotajiem rakstiem varam iegūst šādus rakstus: a, b, c, a+b, a+c, b+c, 0, a+b+c.
Raksts a attēlots 124. zīmējumā,
raksts b attēlots 125. zīmējumā,
raksts c attēlots 126. zīmējumā,
raksts a+b attēlots 129. zīmējumā,
raksts b+c attēlots 130. zīmējumā,
raksts a+c attēlots 131. zīmējumā,
raksts 0 attēlots 132. zīmējumā,
raksts a+b+c attēlots 133. zīmējumā.

Risinājums. Pirmo rakstu (skat. 124.zīm.) apzīmēsim ar a,



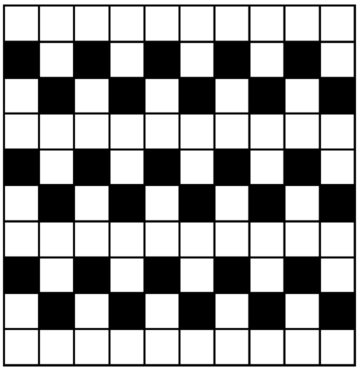
124.zīm.

otro rakstu (skat. 125.zīm.) apzīmēsim ar b,



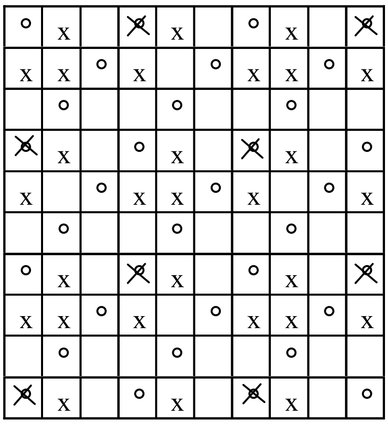
125.zīm.

trešo rakstu (skat. 126.zīm.) apzīmēsim ar c.



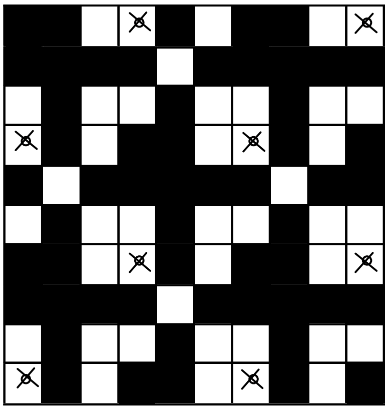
126.zīm.

Pieraksts a+b nozīmē, ka jaunais raksts iegūts, savienojot rakstus a un b, raksts b+c iegūts, savienojot rakstus b un c, utt. Mēģināsim uzzīmēt rakstu a+b.
Viens no paņēmieniem ir šāds: rakstā a iekrāsotās rūtiņas jaunajā lapā atzīmēsim ar maziem krustiņiem, pēc tam uz tās pašas lapas ar aplīšiem atzīmēsim tās rūtiņas, kuras ir iekrāsotas rakstā b. Ja tas izdarīts pietiekami rūpīgi un uzmanīgi, iegūsiet attēlu, kāds parādīts 127. zīmējumā.



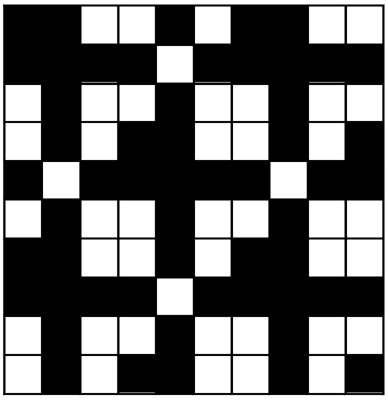
127.zīm.

Tagad uzmanīgi jāapskata visas rūtiņas pēc kārtas un jāiekrāso tikai tās, kurās ir vai nu tikai krustiņš, vai arī tikai aplītis. Rūtiņas, kurās ir gan krustiņš, gan aplītis, jāatstāj neiekrāsotas. Raksts a+b attēlots 128. zīmējumā.



128.zīm.

Tagad varat pārzīmēt to vēlreiz uz tīras lapas (skat. 129.zīm.)

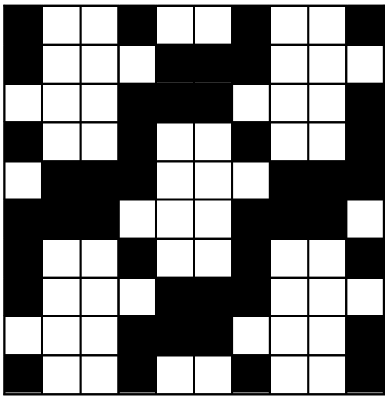


129.zīm.

Ja mēs būtu zīmējuši rakstus nevis uz 10x10 rūtiņas lielām lapām, bet, piemēram, uz lapām ar izmēriem 20x20 vai 30x30 rūtiņas, jaunizveidotie raksti izskatītos skaistāk un būtu pārskatāmāki. Tāpēc, ja jums ir skaidrs jaunā raksta veidošanās princips, varat to pārzīmēt uz lielākas lapas.

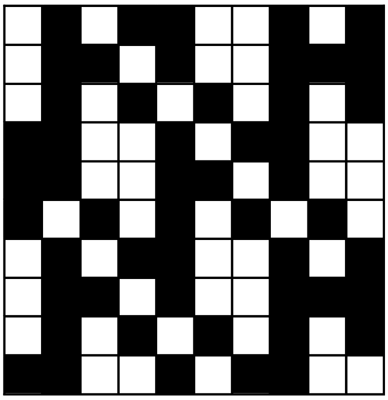
Līdzīgi kā rakstu a+b varam uzzīmēt arī rakstu b+c un rakstu a+c.

Raksts b+c izskatīsies šādi (skat. 130.zīm.).



130.zīm.

Raksts a+c izskatīsies šādi (skat. 131.zīm.).



131.zīm.

Uzdevuma nosacījumos teikts, ka rakstu veidošanā mēs drīkstam izmantot arī jaunizveidotos rakstus. Šķiet, paveras plašas iespējas :
rakstu a+b varam pārklāt ar rakstu b+c,
rakstu b+c varam pārklāt ar rakstu a+c,
rakstu a+c varam pārklāt ar rakstu a,
pēc tam iegūtos atkal varam pārklāt ar a, b, c, a+c, un tā tālāk līdz bezgalībai.
Uzzīmējiet dažus šādus rakstus un noskaidrojiet, vai visos gadījumos jauniegūtais raksts būs atšķirīgs no visiem iepriekš iegūtajiem.

Tagad atrisināsim šādu **uzdevumu**: ”Doti trīs skaitļi 1, 3 un 12. Jaunu skaitli var iegūt, sakaitot kādus divus no dotajiem vai iepriekš iegūtajiem. Cik skaitļu šādā veidā var iegūt?”

Atbilde. Var iegūt bezgalīgi daudz skaitļu. Piemēram, šādi:

1+1=2,	1+3=4,	1+12=13,
3+3=6,	3+12=15,	12+12=24;

tagad mūsu rīcībā jau ir skaitļi 1, 2, 3, 4, 12, 13, 6, 15, 24.

Centīsimies iegūt skaitļus, kas atšķiras no iepriekš iegūtajiem (ja iegūsim skaitli, kas jau ir iegūts iepriekš, nosvītrosim rezultātu):

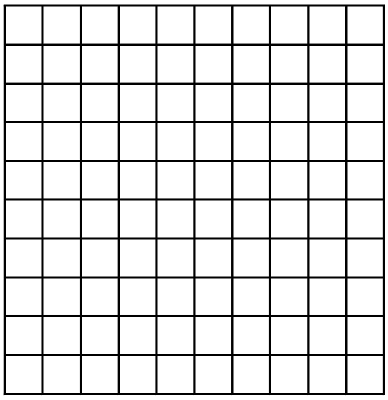
$1+1=\cancel{2}$,	$1+2=\cancel{3}$,	$1+4=5$,	$1+3=\cancel{4}$,	$1+12=13$,	$1+6=7$,	$1+15=16$,	$1+24=25$,
$2+2=\cancel{4}$,	$2+3=\cancel{5}$,	$2+4=\cancel{6}$,	$2+12=14$,	$2+13=15$,	$2+6=8$,	$2+15=17$,	$2+24=26$,
	$3+3=\cancel{6}$,	$3+4=\cancel{7}$,	$3+12=15$,	$3+13=16$,	$3+6=9$,	$3+15=18$,	$3+24=27$,
		$4+4=\cancel{8}$,	$4+12=16$,	$4+13=17$,	$4+6=10$,	$4+15=19$,	$4+24=28$

utt.
Skaidrs, ka šādā veidā turpinot, mēs iegūsim bezgalīgi daudz skaitļu.

(Pierādījums. Pieņemsim, ka var iegūt tikai galīgu skaitļu skaitu un mēs esam uzrakstījuši visus iespējamos skaitļus. Tad starp šiem skaitļiem eksistē vislielākais. Bet šo vislielāko mēs varam palielināt, pieskaitot viņam kādu no iepriekš iegūtajiem skaitļiem. Tad būsim ieguvuši vēl vienu skaitli, kurš atšķiras no visiem iepriekš iegūtajiem. Te ir pretruna, jo mēs pieņēmām, ka esam ieguvuši visus iespējamos skaitļus. Tātad patiesībā varam iegūt bezgalīgi daudz skaitļu.)

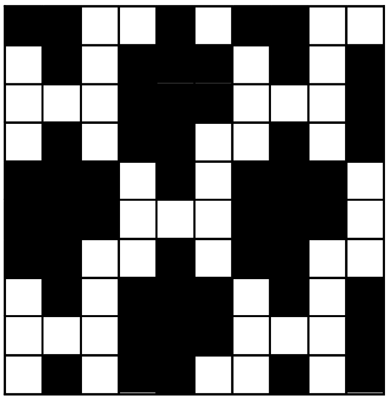
Kāpēc tāpat neiznāk ar rakstiem?
No rakstiem a+b un b+c iegūstam jau pazīstamo rakstu a+c;
(b+c)+(a+c)=a+b,
(a+c)+a=c.
Bet savienojot a ar a iegūstam tukšu lapu (pārbaudiet!), nosauksim šo rakstu par nulles rakstu un apzīmēsim to ar 0. Tātad
a+a=0,
(a+a)+a=a,
((a+a)+a)+a=0,
(((a+a)+a)+a)+a=a utt.
Šajā procesā iespējami tikai divi atšķirīgi rezultāti. Tie ir 0 un a.
Te ir vērojama atšķirība no skaitļiem: ja x ir nenulles skaitlis, tad, pakāpeniski pieskaitot to pašu sev, iegūstam šādu virkni:
x+x=2x, (x+x)+x=3x, ((x+x)+x)+x=4x, (((x+x)+x)+x)+x=5x utt.
Visi iegūtie skaitļi ir atšķirīgi.
Tagad ir skaidrs, kāpēc, uzliekot kādam jaunizveidotajam rakstam virsū tādu, kurš jau ir piedalījies šī raksta veidošanas procesā, iegūstam nevis jaunu, atšķirīgu, bet kādu no iepriekš iegūtajiem rakstiem. Piemēram,
(a+b)+b=a,
(b+c)+c=b,
(a+b)+(b+c)=a+c utt.
Tāpēc rakstu veidošanas procesā jaunus rakstus varam iegūt tikai tad, ja iepriekš iegūtajam rakstam S uzliekam virsū tādu rakstu, kurš raksta S veidošanas procesā nepiedalījās. Tā kā mums sākumā bija doti tikai trīs dažādi raksti a, b un c, varam sastādīt iegūstamo rakstu sarakstu:
0, a, b, c, a+b, a+c, b+c, a+b+c.
Rakstu 0 var iegūt, piemēram, savienojot a ar a,
rakstu a var iegūt, piemēram, savienojot a ar a un vēlreiz ar a,
rakstu b var iegūt, piemēram, b=(b+b)+b,
rakstu c var iegūt, piemēram, c=(c+c)+c,
rakstu a+b+c var iegūt, piemēram, a+b+c=(a+b)+c.

Šos pašus rakstus, protams, ir iespējams iegūt arī daudzos citos veidos.
Raksts a attēlots 124. zīmējumā,
raksts b attēlots 125. zīmējumā,
raksts c attēlots 126. zīmējumā,
raksts a+b attēlots 129. zīmējumā,
raksts b+c attēlots 130. zīmējumā,
raksts a+c attēlots 131. zīmējumā,
raksts 0 attēlots 132. zīmējumā,



132.zīm.

raksts a+b+c attēlots 133. zīmējumā.



133.zīm.

Nekādus citus, no šiem atšķirīgus rakstus, iegūt nav iespējams.

6.4. <u>Risinājums</u>. **I.** Lai beigās iegūtu 14. zīmējumā attēloto stāvokli, sākumā kartītes varēja novietot tā kā parādīts 134. zīmējumā.

			R	**A**	**K**	**U**	**R**	**S**	**S**				
			K	**R**	**O**	**K**	**O**	**D**	**Ī**	**L**	**S**		
							L	**E**	**L**	**L**	**E**		
							S	**K**	**O**	**L**	**A**		
					E	**S**							
S	**A**	**U**	**L**	**E**									
K	**V**	**A**	**D**	**R**	**Ā**	**T**	**S**						
							G	**R**	**Ā**	**M**	**A**	**T**	**A**

134.zīm.

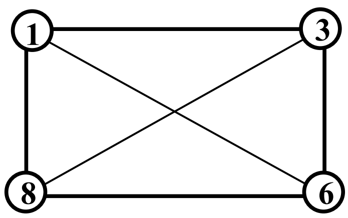
II. a) 15. zīmējumā attēloto stāvokli nav iespējams iegūt, jo attēlā aizkrāsotas 50 rūtiņas, bet mums ir tikai 48 kartītes.

b) 16. zīmējumā attēloto stāvokli ir iespējams iegūt (skat. 135.zīm.). (Patiesībā rindas var mainīt vietām, no tā rezultāts nemainās.)

				S	**A**	**U**	**L**	**E**					
				L	**E**	**L**	**L**	**E**					
K	**V**	**A**	**D**	**R**	**Ā**	**T**	**S**						
			G	**R**	**Ā**	**M**	**A**	**T**	**A**				
				R	**A**	**K**	**U**	**R**	**S**	**S**			
			K	**R**	**O**	**K**	**O**	**D**	**Ī**	**L**	**S**		
							E	**S**					
									S	**K**	**O**	**L**	**A**

135.zīm.

6.5. <u>**I**. Risinājums</u>. Viens no veidiem, kā varētu attēlot pilsētas un ceļus starp tām, parādīts 136. zīmējumā.



136.zīm.

Pilsēta ar numuru 3 tiks apmeklēta vai nu pirmā, vai otrā, vai trešā, vai ceturtā. Tāpēc, lai iekļūtu šajā pilsētā, Nezinītis samaksās vai nu $3 \cdot 1$, vai $3 \cdot 2$, vai $3 \cdot 3$, vai arī $3 \cdot 4$ santīmus. Pierakstīsim to šādi:
par ieiešanu pilsētā ar numuru 3 Nezinītis samaksāja $3y$ santīmus, kur y ir viens no skaitļiem 1, 2, 3, 4.

Analoģiski – par ieiešanu pārējās pilsētās Nezinītis samaksāja attiecīgi 1x, 6z un 8t santīmus (arī x, z un t ir ņemti no skaitļiem 1, 2, 3, 4, pie tam katrs šis skaitlis izmantots tieši vienu reizi).
Par visu ceļojumu kopā Nezinītis būs izdevis 1x+3y+6z+8t santīmus.
Sastādīsim visu iespējamo maršrutu tabulu (piemēram, viens maršruts ir šāds: vispirms jāapmeklē pilsēta ar numuru 1, otrā - pilsēta ar numuru 3,
trešā - pilsēta ar numuru 6, ceturtā - pilsēta ar numuru 8. Tad x=1, y=2, z=3, t=4. Veicot šo maršrutu, Nezinītim būtu jāizdod 1·1+3·2+6·3+8·4=57 santīmi).
Kad visiem iespējamajiem maršrutiem (to ir 24) būsim aprēķinājuši izteiksmes 1x+3y+6z+8t vērtību, izvēlēsimies vismazāko no šīm vērtībām. Tad būs reizē atbildēts gan uz a, gan uz b jautājumu.
Tabulas sākums varētu izskatīties šādi:

x	y	z	t	1x+3y+6z+8t
1	**2**	**3**	**4**	**1·1+3·2+6·3+8·4=57**
1	**2**	**4**	**3**	**1·1+3·2+6·4+8·3=55**
1	**3**	**2**	**4**	**1·1+3·3+6·2+8·4=54**
1	**3**	**4**	**2**	**1·1+3·3+6·4+8·2=50**
1	**4**	**2**	**3**	**1·1+3·4+6·2+8·3=49**
1	**4**	**3**	**2**	**1·1+3·4+6·3+8·2=47**
2	**1**	**3**	**4**	**1·2+3·1+6·3+8·4=55**
*	*	*	*	***
*	*	*	*	***
*	*	*	*	***

Pabeidziet tabulu patstāvīgi un pierādiet, ka izteiksmes 1x+3y+6z+8t vismazākā iespējamā vērtība ir 33!
II. Risinājums. Vispirms pierādīsim **lemmu**: ja a, b, m, n ir naturāli skaitļi un a<b, m<n, tad m·a+n·b>m·b+n·a
(Piemērs: skaitļi 1, 2, 3, 6; 3·1+6·2>3·2+6·1).

Pierādījums. Tā kā a<b un m<n, varam rakstīt, ka
b=a+c, n=m+k, c un k – naturāli skaitļi. Tad
m·a+n·b=m·a+(m+k)(a+c)=2ma+mc+ka+kc, bet
m·b+n·a=m(a+c)+(m+k)a=ma+mc+ma+ka=2ma+mc+ka.
Acīmredzot, ja k>0 un c>0, arī kc>0, tāpēc
2ma+mc+ka+kc>2ma+mc+ka, un tātad esam pierādījuši, ka
m·a+n·b>m·b+n·a, ja b>a un n>m.

Tagad atgriezīsimies pie uzdevuma. Pierādīsim, ka tad, ja nosacījums x>y>z>t nav spēkā, izteiksmes 1x+3y+6z+8t vērtību var pamazināt. Ja kaut vienā vietā tā burta vērtība, kas ir pie mazākā skaitļa, ir mazāka par tā burta vērtību, kas ir pie lielākā skaitļa, (piemēram, y<z), apmainīsim šo burtu vērtības vietām. No lemmas izriet, ka
3y+6z>3z+6y, ja y<z. Tāpēc
1x+3y+6z+8t>1x+3z+6y+8t.
Arī citos gadījumos, ja nosacījums x>y>z>t nav spēkā, apmainot attiecīgo burtu vērtības vietām, izteiksmes vērtība noteikti pamazināsies.

Taču ar to vēl nepietiek, lai varētu apgalvot, ka izteiksmes $1x+3y+6z+8t$ vismazākā ir tad, ja $x>y>z>t$.

Pagaidām esam pierādījuši tikai to, ka jebkuru vērtību, kurai nav spēkā nosacījums $x>y>z>t$, var pamazināt. Par gadījumu, kad nosacījums $x>y>z>t$ ir spēkā, nekas nav spriests. Tāpēc, lai risinājums būtu pilnīgs, jāpiebilst, ka

1) katrs iespējamais maršruta variants apmierina vai nu nosacījumu "$x>y>z>t$ neizpildās", vai arī nosacījumu "$x>y>z>t$ izpildās";

2) variantu ir galīgs skaits, tāpēc starp visām vērtībām noteikti eksistē vismazākā.

Tālāk varam spriest šādi: par visām vērtībām, izņemot to, kurai $x>y>z>t$ ir spēkā, zinām, ka šīs vērtības ir iespējams pamazināt. Mēs zinām arī, ka starp visām iespējamām vērtībām noteikti eksistē vismazākā. Tātad vērtība, kurai ir spēkā $x>y>z>t$, arī ir vismazākā. Tā ir

$1 \cdot 4+3 \cdot 3+6 \cdot 2+8 \cdot 1=33$.

Ievērosim, ka tad, ja iespējamo variantu skaits būtu bezgalīgi liels, nevarētu apgalvot, ka vismazākā vērtība eksistē.

Piemēram, virknē $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ katram virknes loceklim eksistē cits, kas ir par to mazāks, bet vismazākā locekļa šajā virknē nav. Turpretī, ja skaitļu kopa ir galīga, tajā vienmēr eksistē vismazākais elements.

6.6. Risinājums. Šeit esam ievietojuši tikai dažus no daudzajiem uzdevumiem, kuri apmierina mūsu nosacījumus. Uzdevumu atrisinājumus šeit neievietosim, bet jūs paši varat pārliecināties, ka visiem uzdevumiem ir ne vairāk kā 5 atbildes.

1) "Atrast skaitli ar šādām īpašībām: tas ir trīsciparu skaitlis, beidzas ar ciparu 9 un ir kāda cita naturāla skaitļa kvadrāts."

2) "Atrast skaitli ar šādām īpašībām: tas ir vismazākais trīsciparu skaitlis, kuru dalot ar 3, 4 un 5, katru reizi iegūstam atlikumu 2."

3) "Atrast skaitli ar šādām īpašībām: tas ir divciparu skaitlis un, ja apzīmēsim to ar x, tad skaitļi x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7 visi sākas un visi beidzas ar vienu un to pašu ciparu."

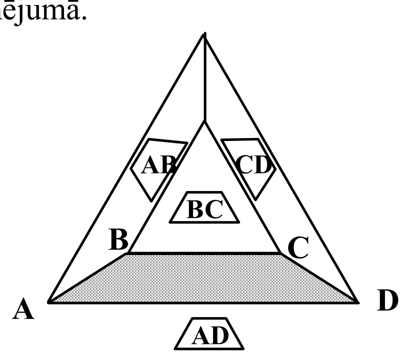
4) "Atrast skaitli ar šādām īpašībām: tas ir četrciparu skaitlis kuram divu vidējo ciparu summa dalās ar 5. Bez tam, reizinot to ar skaitli, kurš uzrakstīts ar tiem pašiem cipariem apgrieztā secībā, iegūsim astoņciparu skaitli, kura 3 pēdējie cipari ir 0."

5) "Atrast skaitli ar šādām īpašībām: skaitlī ir 5 cipari, tieši viens no tiem ir 0, bet, ja šo 0 nosvītrojam, skaitlis samazinās tieši 9 reizes."

6.7. Pierādījums. Ja viens no daudzstūriem ir trijstūris, tam kopīga mala var būt tikai ar 3 citiem daudzstūriem. Tāpēc, ja mēs gribam novietot plaknē vairāk nekā 4 daudzstūrus tā, lai katram ar katru būtu kopīga mala, katra daudzstūra malu skaitam ir jābūt lielākam par 3.

Apskatīsim gadījumu, kad trijstūru nav, bet viens no daudzstūriem ir četrstūris; daudzstūriem ar lielāku malu skaitu spriedumi ir analoģiski.

Pieņemsim, ka mums dots četrstūris ABCD. Ar to robežojas četri citi daudzstūri. Daudzstūri, kuram ar ABCD ir kopīga mala AB, apzīmēsim ar $\boxed{AB}$, to kuram ar ABCD ir kopīga mala BC – ar $\boxed{BC}$ utt.
Pieņemsim, ka daudzstūrim $\boxed{AB}$ ir kopīga mala ar $\boxed{CD}$.
Ja diviem daudzstūriem ir kopīga mala, tad no viena daudzstūra, neškērsojot nevienu citu, var pāriet uz otru.
Tā kā četrstūrim ABCD ir kopīga mala ar $\boxed{AB}$, daudzstūrim $\boxed{AB}$ ir kopīga mala ar $\boxed{CD}$, daudzstūrim $\boxed{CD}$ ir kopīga mala ar četrstūri ABCD, šie trīs daudzstūri veido slēgtu sistēmu. Tā varētu izskatīties apmēram tāda, kā attēlota 137. zīmējumā.



137.zīm.

Daudzstūris $\boxed{BC}$ atrodas šīs slēgtās sistēmas iekšpusē, un tam var būt kopīgas malas tikai ar daudzstūriem ABCD, $\boxed{AB}$ un $\boxed{CD}$. Tātad daudzstūriem $\boxed{BC}$ un $\boxed{AD}$ nav nevienas kopīgas malas. Tātad esam ieguvuši pretrunu.
Līdzīgi varētu spriest tad, ja sākumā četrstūra vietā būtu ņēmuši piecstūri, sešstūri utt.
Tātad esam pierādījuši – plaknē ir iespējams novietot ne vairāk kā četrus izliektus daudzstūrus, kuriem katram ar katru citu ir kopīga mala.

6.8. Pierādījums. Vispirms jāizdomā tāda gājienu sērija, pēc kuras vienam skaitlim zīme būs apmainīta, bet visiem pārējiem zīmes nemainīsies (tālāk redzēsiet, ka to ir iespējams izdarīt). Tad, lai no pirmās virknes iegūtu otro, rīkosimies šādi: salīdzināsim 1. virknes 1. skaitli ar 2. virknes 1.skaitli. Ja tiem zīmes atšķiras, izpildīsim gājienu sēriju, pēc kuras 1. virknes 1. skaitlim zīme mainīsies uz pretējo, pārējiem skaitļiem zīmes nemainīsies.
Pēc tam salīdzināsim 1. virknes 2. skaitli ar 2. virknes 2.skaitli, ja tiem zīmes atšķiras, atkal ar gājienu sērijas palīdzību mainīsim zīmi tieši 1. virknes 2. skaitlim utt.
Tagad apskatīsim, kā izdarīt šādu gājienu sēriju.
Virknē ir 1958 locekļi; to numuri ir 1, 2, …, 1958.
Pieņemsim, ka gribam mainīt zīmi skaitlim ar vietas numuru a. Tad nāksies izpildīt šādu gājienu sēriju:

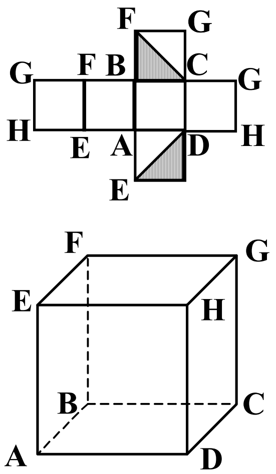
1. gājiens -	apmainīt zīmes skaitļiem, kuru vietu numuri ir	a, $b_1, b_2, ..., b_{10}$;
2. gājiens	-“-	a, $c_1, c_2, ..., c_{10}$;
…	…	…
11. gājiens	-“-	a, $l_1, l_2, ..., l_{10}$;

Skaitļi ar numuriem $b_1, b_2,..., b_{10}, c_1, c_2,..., c_{10},..., l_1, l_2,..., l_{10}$ jāizvēlas aizvien jauni – tā, lai katram no tiem zīme būtu apmainīta tikai vienu reizi (to var izdarīt, jo pavisam virknē ir 1958 skaitļi, bet mums jāizvēlas tikai 110).
Pēc 11. gājiena skaitlim ar numuru a zīme ir mainīta 11 reizes, tāpēc tagad šajā vietā stāv skaitlis ar citu zīmi, nekā sākumā.

Lai mēs varētu teikt, ka zīme mainījusies tikai skaitlim ar numuru a, nepieciešams vēlreiz mainīt zīmes visiem skaitļiem $b_1, b_2,..., b_{10}, c_1, c_2,..., c_{10}, l_1, l_2,..., l_{10}$.
To skaits ir 110, tāpēc varam sadalīt tos 10 grupās (pa 11 skaitļiem katrā grupā) un visām grupām mainīt zīmes. Pēc tam katram šo grupu skaitlim zīme būs mainīta 2 reizes, tātad visiem skaitļiem zīme būs tāda pati kā sākumā. Tā kā pārējie skaitļi šajā gājienu sērijā vispār nav aiztikti, tad arī to zīmes ir tādas pašas kā sākumā.

6.9. Atbilde. Kubu ir iespējams aplīmēt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

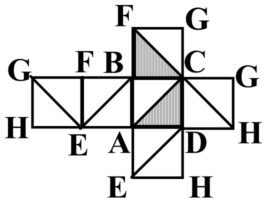
Risinājums. Lai būtu ērtāk iekrāsot, uzzīmēsim kuba virsotnes izklājumu. Izklājumā iekrāsosim divas skaldnes tā, kā parādīts 138. zīmējumā.



138.zīm.

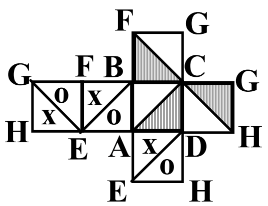
(Ja no šāda izejas stāvokļa neizdosies iegūt izklājumu, kuram pie katra burta balto leņķu summa vienāda ar melno leņķu summu, apskatīsim citu sākuma krāsojumu vai mēģināsim pierādīt, ka šāds krāsojums vispār nav iespējams. Ja izdosies, uzdevums būs atrisināts.)
Visu leņķu summa pie vienas virsotnes ir $3\cdot 90°=270°$.
Tātad baltie leņķi kopā aizņem 135°. No 90° un 45° lieliem leņķiem 135° lielu leņķi var sastādīt tikai divos veidos:
$135°=90°+45°$,
$135°=45°+45°+45°$.

Katram 45° lielam baltam leņķim atbilst viens 45° liels melns leņķis, tāpēc pirmajā gadījumā arī melno leņķu summa 135° tiek sastādīta no viena 45° liela melna leņķa un viena 90° liela melna leņķa;
otrajā gadījumā melno leņķu summa 135° tiks sastādīta no trim 45° lieliem melniem leņķiem.
Tātad, lai uzdevuma nosacījumi būtu spēkā, ir nepieciešams, lai pie katras virsotnes būtu vai nu divi 90° lieli leņķi un divi 45° lieli leņķi, vai arī seši 45° lieli leņķi.
Apskatīsim leņķus pie virsotnes B. Pašlaik 90° aizņem balts leņķis, 90° - melns leņķis, tātad leņķa FBA vienai pusei jābūt melnai, otrai pusei jābūt baltai. Tātad ir nepieciešams, lai skaldnē FBAE trijstūru robežlīnija būtu BE.
Apskatot leņķus pie virsotnes A, līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā varam izspriest, ka skaldnē ADHE trijstūru robežlīnijai ir jābūt DE.
Apskatot leņķus pie virsotnes E, pēc tam - pie virsotnes C, secināsim, ka skaldnēs GFEH un CGHD trijstūru robežlīnijām jābūt attiecīgi GE un CH (skat. 139.zīm.).



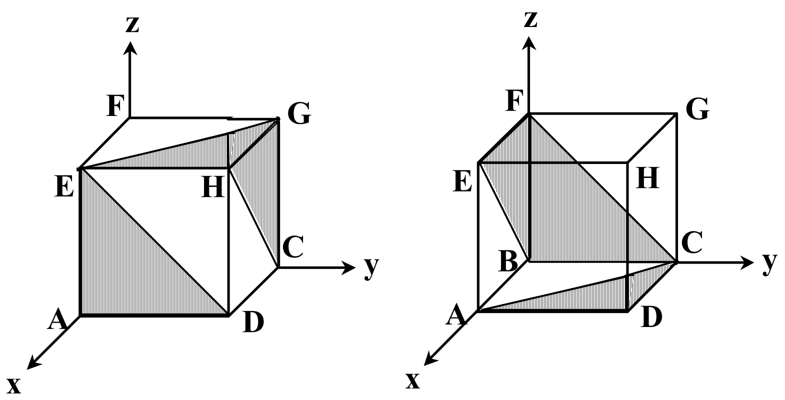
139.zīm.

Pārbaudiet patstāvīgi - pie katras virsotnes patiešām ir vai nu divi 90° lieli leņķi un divi 45° lieli leņķi, vai arī seši 45° lieli leņķi! Tagad mēģināsim tos iekrāsot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.
Apskatīsim leņķus pie virsotnes A. Lai balto leņķu summa būtu vienāda ar melno leņķu summu, trijstūru ΔAEB un ΔADE krāsojumiem jābūt atšķirīgiem. Uzskatāmības labad šajos trijstūros ieliksim zīmes o un x (katrā vienu). (Tas nozīmēs - ja o ir balts, tad x ir melns, un otrādi.)
Katrā skaldnē abu trijstūru krāsojumi atšķiras, tāpēc zīmes x un o varam ielikt arī trijstūros ΔEFB un ΔEDA.
Apskatot leņķus pie virsotnes F, konstatēsim, ka trijstūrim ΔGFE noteikti jābūt citā krāsā nekā ΔFBE, un, tā kā ΔGFE un ΔGHE atrodas vienā skaldnē, ΔGHE jābūt citā krāsā nekā ΔGFE. Skaldnē CGHD ΔCGH jābūt melnam, pretējā gadījumā pie virsotnes G melno leņķu summa nebūs vienāda ar balto leņķu summu (skat. 140.zīm.).



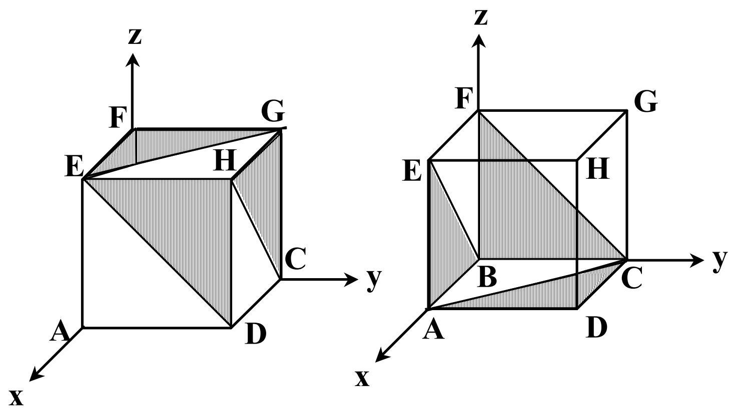
140.zīm.

Izvēloties x – melnu, bet o – baltu, iegūsim kubu, kas attēlots 141. zīmējumā.



141.zīm.

Izvēloties x – baltu, bet o –melnu, iegūsim kubu, kas attēlots 142. zīmējumā.

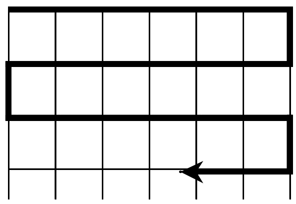


142.zīm.

Pārbaudiet patstāvīgi – katrs šāds krāsojums patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.
Tātad kubu ir iespējams aplīmēt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.
Uzdevums ir atrisināts, taču mums pašiem būtu interesanti uzzināt:
1) Vai abi iegūtie krāsojumi ir atšķirīgi, vai varbūt kubu, kas attēlots 141. zīmējumā, ir iespējams novietot tā, lai viņš izskatītos izkrāsots tieši tāpat kā 142. zīmējumā attēlotais kubs?
2) Vai mēs iegūtu kādu citu atšķirīgu krāsojumu, ja sākumā skaldnes ABCD un BFGC iekrāsotu citādi?

6.10. Atbilde. Šādu lauztu līniju ir iespējams novilkt. Slēgtas lauztas līnijas garums (ja vien dotajā taisnstūrī tādu var novilkt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem) ir $(m+1)\cdot(n+1)$.

Risinājums. Viens no veidiem, kā to var izdarīt, parādīts 143. zīmējumā.



143.zīm.

Pierādīsim, ka neatkarīgi no līnijas veida, tās garums ir noteikts viennozīmīgi. Vispirms atzīmēsim, ka tad, ja taisnstūris sastāv no mxn rūtiņām, tas satur (m+1)·(n+1) rūtiņu virsotnes (ieskaitot arī tās, kas atrodas uz kontūra).
Pieņemsim, ka atrodamies tajā rūtiņu režģa virsotnē, kurā iesākas lauztā līnija. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka tā katrā rūtiņu virsotnē ieiet tieši vienu reizi. Ja mēs ietu pa šo līniju uz priekšu no līnijas sākuma punkta, kurā pašreiz atrodamies, mums nāktos ieiet vēl tieši (m+1)·(n+1)-1 virsotnēs, bet, lai aizietu no iepriekšējās virsotnes uz nākošo, ir jānoiet tieši viena vienība. Tātad nenoslēgtas lauztas līnijas garums ir (m+1)·(n+1)-1.
Ja lauztā līnija iet caur katru rūtiņu režģa virsotni tieši vienu reizi un ir slēgta, tad, apstaigājot to, mums ir jāieiet ne vien (m+1)·(n+1)-1 rūtiņu virsotnēs, kurās neatrodamies, bet beigās arī tajā, kurā pašreiz atrodamies.
Tātad pavisam būs jānoiet (m+1)·(n+1) posmi.