"Profesora Cipariņa klubs" 1980./81. m.g.

1. nodarbība

1.1. Skaitli 30 var izsacīt, izmantojot trīs pieciniekus un aritmētisko darbību zīmes:

$$30=5\cdot5+5.$$

Pierādīt, ka skaitli 30 var izsacīt, izmantojot iekavas, aritmētisko darbību zīmes un jebkuru daudzumu pieciniekų, kas lielāks par trim.

1.2. Sacensībās piedalās 6 komandas. Katrai komandai ar katru citu jāizspēlē viena spēle. Pašreiz katra komanda ir nospēlējusi divas spēles. Cik spēlēm vēl jānotiek?

1.3. Atrodiet tādus dažādus veselus pozitīvus skaitļus a, b un c, kuriem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Atrodiet visas atbildes un pierādiet, ka citu bez jūsu atrastajām nav. Vai var atrast tādus veselus pozitīvus skaitļus a, b, c, d un e, kuriem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1?$$

1.3.1. Pierādīt, ka katram naturālam $n\geq3$ var atrast tādus veselus pozitīvus skaitļus x_1, x_2, x_3,…, x_n, kuriem

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}=1.$$

1.3.2. Vai eksistē tāds $n>1$ un tādi dažādi veseli pozitīvi <u>nepāru</u> skaitļi x_1, x_2, x_3,…, x_n, kuriem

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}=1?$$

1.3.3. Vai eksistē tāds n un tādi veseli pozitīvi nepāru skaitļi x_1, x_2, x_3,…, x_n, kuriem

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}?$$

1.4. Jānim eksāmenā uzdoti 16 jautājumi, uz kuriem var atbildēt ar "jā" vai "nē". Par katru pareizu atbildi Jānis saņem 7 punktus; par katru nepareizu atbildi viņam atņem 4 punktus. Ja Jānis uz kādu jautājumu atsakās atbildēt, viņa punktu summu tas neiespaido. Sākumā Jānim bija 0 punktu, bet, beidzot eksāmenu, viņam bija 1 punkts.
Uz cik jautājumiem Jānis atbildēja pareizi?

1.5. Cik ir dažādu trijstūru, kuru malu garumi izsakāmi ar veselu skaitu centimetru, bet visu triju malu garumu summa ir 25 cm?

1.6. Draugi A, B un C spēlē novusu. Katrā spēlē piedalās divi no viņiem. Neizšķirtu nav. Tas, kas zaudē, nākošajā spēlē dod vietu tam, kas viņa zaudējuma laikā stāvējis malā.
Kad draugi beidza spēlēt, izrādījās, ka A izspēlējis 7 spēles, bet B – 15 spēles.

Cik spēles vispār tika izspēlētas? Cik spēlēs piedalījās C? Kas uzvarēja astotajā spēlē? Kas zaudēja piektajā spēlē?

1.6.1. Draugi A, B un C spēlē novusu, kā aprakstīts 6. uzdevumā.
Kad draugi beidza spēlēt, izrādījās, ka A uzvarējis 6 spēlēs, bet B – 8 spēlēs, C – 10 spēlēs.
Cik spēles izspēlēja katrs spēlētājs?

1.7. Pierādīt, ka plaknē nevar novietot četrus punktus A, B, C un D tā, lai nekādi trīs no tiem neatrastos uz vienas taisnes un lai katrs trijstūris, kura virsotnes atrodas trijos no šiem punktiem, būtu šaurleņķa.

1.8. Atrast visus divciparu skaitļus, kuru ciparu summa nemainās, ja šos skaitļus reizina ar jebkuru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

1.9. Slēgta lauzta līnija krusto katru savu posmu tieši vienu reizi. Pierādīt, ka tās posmu skaits ir pāra skaitlis.

1.9.1. Uzzīmēt tādas līnijas piemēru, kāda minēta 9. uzdevumā.

1.10. Dots, ka n – naturāls skaitlis un ka daļa $\frac{5n+6}{8n+7}$ ir saīsināma. Ar kādiem veseliem pozitīviem skaitļiem var saīsināties dotā daļa?

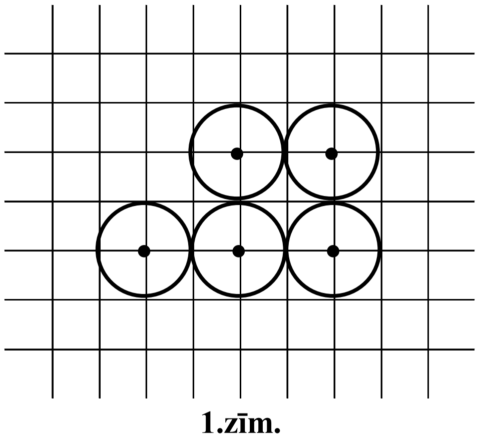
2. nodarbība

2.1. Trīsciparu skaitļa A ciparus uzraksta apgrieztā kārtībā un iegūt trīsciparu skaitli B. Cik liela var būt skaitļu A un B starpība?

2.1.1. Atrisiniet iepriekšējo uzdevumu, ja A un B ir n-ciparu skaitļi!

2.2. Vai var uzrakstīt rindā visus veselos skaitļus no 1 līdz 10 (katru skaitli vienu reizi) tā, lai blakus uzrakstīto skaitļu starpības būtu 1, 2, 3,…,9 (secība var būt arī citāda)?

2.3. Kā novilkt taisni, lai tā sadalītu iesvītroto laukumu uz pusēm? Visi riņķi ir kongruenti, to centri atrodas rūtiņu virsotnēs (skat. 1.zīm.).



1.zīm.

2.4. Istabā atrodas taisnstūrveida galds ABCD. Jānis grib pagriezt galdu tā, lai mala AB atrastos tur, kur tagad ir mala CD, un otrādi. Tomēr galds ir tik smags, ka to var pārvietot vienīgi šādi: pacelt galdu aiz viena stūra (piemēram, aiz A), Pagriezt kaut kādu leņķi ap pretējo stūri (šajā gadījumā C) un nolaist pacelto stūri zemē. Šādas operācijas Jānis var atkārtot vairākas reizes. Kā Jānis var pārvietot galdu vajadzīgajā stāvoklī, to paceļot augstākais 3 reizes?

2.5. Desmit skolēnu augumi ir 1,51 m, 1,52 m, 1,53 m,…, 1,59 m, 1,60 m. Viņi nostājas rindā viens otram blakus un saņem numurus (no kreisās uz labo) no 1 līdz 10. Pēc tam katrs no viņiem paskatās pa kreisi un saskaita, cik skolēnu, kas garāki par viņu, stāv pa kreisi no viņa. Tabulas augšējā rindā parādīti skolēnu numuri, apakšējā – cik biedru, kas ir garāki par viņu, katrs skolēns redz ierindā pa kreisi no sevis.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	**1**	**2**	**2**	**0**	**1**	**4**	**0**	**8**	**3**

Kādā secībā skolēni stāvēja?

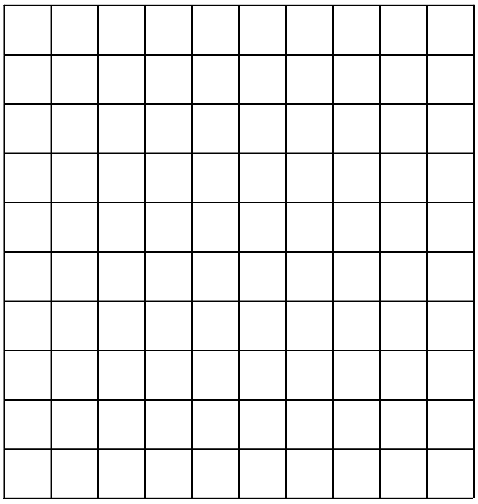
2.6. Dotas 9 pēc ārējā izskata pilnīgi vienādas monētas; 7 no tām katra sver 10 g, bet 2 – katra 11 g. Doti svari ar ciparnīcu, kuras iedaļas vērtība ir 1 g. Kā ar piecām svēršanām uz šiem svariem var atrast abas smagākās monētas?

2.7. Trijstūrī ABC katrs no augstumiem, kas novilkti no virsotnēm A un B, nav īsāks par malu, pret kuru tas novilkts. Aprēķināt trijstūra ABC leņķu lielumus.

2.8. Pierādīt, ka skaitlis, kura ciparu summa ir 5, nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

2.9. Skaitļu virkni $a_1, a_2, a_3,\dots$ veido šādi: $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_n\cdot a_{n+1}+1$, kur n=1, 2, 3,… (t.i., katru nākošo virknes locekli iegūst, abu iepriekšējo reizinājumam pieskaitot vieninieku). Pierādīt, ka a_{1964} nedalās ar 4.

2.10. Pilsētā ir 11 ziemeļu - dienvidu virzienā un 11 austrumu – rietumu virzienā ejošas transporta maģistrāles (skat. 2.zīm.); tātad tajā ir $11^2=121$ krustojums. Maģistrāles posmu starp diviem blakus esošajiem krustojumiem, sauc par ielu; tātad pilsētā ir 200 ielu. Autoinspekcija dažās ielās grib aizliegt transporta kustību tā, lai no katra krustojuma varētu aizbraukt ne vairāk kā trīs virzienos. (Ja kādā ielā kustība ir atļauta, tad pa to var braukt <u>abos</u> virzienos.) Atrodiet mazāko skaitu ielu, kurās autoinspekcija var aizliegt kustību, lai šis nosacījums būtu spēkā.



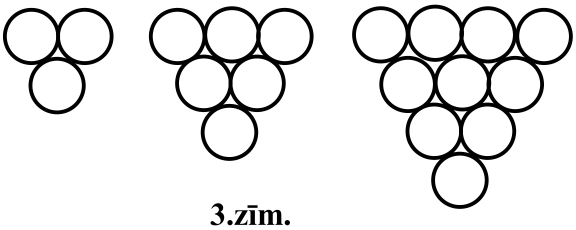
2.zīm.

3. nodarbība

3.1. Atrast visus tos divciparu skaitļus, kas vienādi ar savu ciparu divkāršotu reizinājumu.

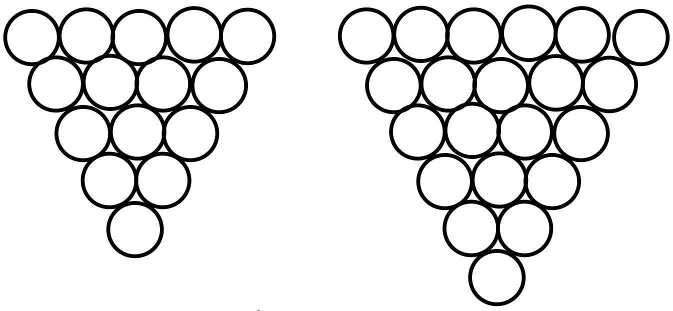
3.2. Klasē saskaitīja, ar cik meitenēm draudzējas katrs zēns un ar cik zēniem – katra meitene (tikai šīs klases ietvaros). Saskaitot kopā visus iegūtos skaitļus par zēniem, summā ieguva 42. Saskaitot kopā visus iegūtos skaitļus par meitenēm, summā ieguva 37. Pierādīt, ka kaut kur tika pieļauta kļūda.

3.3. Katrā no 3. zīmējumā dotajām figūrām aplīšos jāieraksta pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, sākot ar 1 (katrā aplītī viens skaitlis) tā, lai katrā aplītī, kas atrodas tieši zem jebkuriem diviem blakusstāvošiem aplīšiem a un b, būtu ierakstīta to skaitļu starpības absolūtā vērtība, kuri ierakstīti aplīšos a un b. Vai to var izdarīt?



3.zīm.

3.3.1. Vai 23. uzdevuma prasības var būt spēkā figūrām, kas parādītas 4. zīmējumā?



4.zīm.

3.4. Kastē atrodas 16 lodītes ar numuriem no 1 līdz 16 (uz katras lodītes – cits numurs). Kāds minimālais lodīšu skaits jāizņem, neskatoties uz tām, lai varētu garantēt, ka uz vienas no izņemtajām lodītēm būs kādas citas izņemtās lodītes numura kvadrāts?

3.5. Uz tāfeles uzrakstīts naturālu skaitļu pāris. Divi spēlētāji pēc kārtas izdara pa vienam gājienam: vispirms pirmais, tad otrais, tad atkal pirmais utt. Ja uz tāfeles uzrakstīts skaitļu pāris (n;m), tad spēlētājs, kam jāizdara gājiens, šajā gājienā drīkst skaitļus n un m nodzēst un to vietā uzrakstīt jebkuru vienu no šādiem pāriem:

(n-1;m-1), (n-2;m-1), (n-1;m-2), (n-x;m), (n;m-x),

kur x – jebkurš naturāls skaitlis, ko izvēlas spēlētājs, kas izdara gājienu. Turklāt drīkst uzrakstīt tikai tādu pāri, kura abi skaitļi ir nenegatīvi. Uzvar tas spēlētājs, kurš savā gājienā uzraksta skaitļu pāri (0;0).

Kā jāspēlē pirmajam spēlētājam, lai noteikti uzvarētu, ja sākumā uzrakstītais skaitļu pāris ir (38;37)?

3.6. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādas operācijas:

a) reizināt ar 2;

b) dalīt ar 2, ja rezultāts ir vesels skaitlis;

c) mainīt skaitļa ciparus vietām, ja iegūtais skaitlis nesākas ar 0.

Izmantojot aprakstītās operācijas, pārveidot skaitļus no 1 līdz 10 tā, lai iegūtu iespējami mazākus skaitļus.

Piemērs. 53→106→212→122→61→16→8→4→2→1.

3.7. Atrast lielāko iespējamo piecciparu skaitli $\overline{abcde}$, kam piemīt šādas īpašības:

1) d>e;

2) c>d+e;

3) b>c+d+e;

4) a>b+c+d+e.

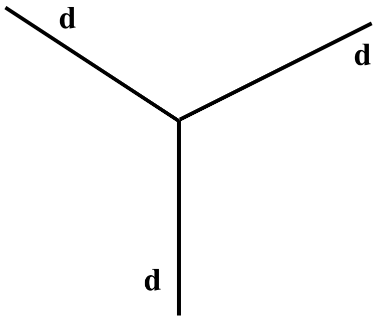
3.8. Divdesmitstūrim 10 virsotnes nokrāsotas baltas, bet 10 melnas. Pierādīt, ka tādu malu, kurām abi gali ir balti, ir tikpat, cik tādu malu, kurām abi gali ir melni.

3.9. Dots izliekts 100-stūris M. Izliekta daudzstūra N visas malas atrodas uz 100-stūra M diagonālēm. Pierādīt, ka daudzstūrim N nav vairāk kā 100 malu.

3.10. Trīs taisni tuneļi ar vienādu garumu d veido labirintu, kas attēlots 5. zīmējumā. Labirintā atrodas policists un laupītājs. Policista maksimālais ātrums divas reizes pārsniedz laupītāja maksimālo ātrumu. Policists ierauga laupītāju tikai tad, ja atrodas ar to vienā tunelī attālumā, kas nepārsniedz a. Pierādīt, ka policists noteikti var noķert laupītāju, ja

a) $a=\frac{d}{3}$;

b) $a=\frac{d}{4}$.



5.zīm.

4. nodarbība

4.1. a, b un c – naturāli skaitļi. Pierādīt, ka skaitlis (a-b)(b-c)(c-a) dalās ar 2.

4.2. Novietot uz horizontāla galda četras vienādas pudeles tā, lai attālumi starp to kakliņiem būtu vienādi. (Par attālumu starp divu pudeļu kakliņiem saucam attālumu starp to atvērumu centriem.)

4.3. Taisnstūris sastāv no 9x10 kvadrātveida rūtiņām, kuru izmēri 1 cm x 1 cm. Tas pārklāts ar 45 kartītēm, kuru izmēri 1 cm x 2 cm.
Vai taisnstūri var pārklāt ar tām pašām kartītēm tā, lai tās kartītes, kas pirmajā pārklājumā atradās horizontāli, tagad atrastos vertikāli, un otrādi? (Paša taisnstūra novietojums nemainās.)

4.4. n naturāls skaitlis. Skaitļa n^6 pierakstā pa vienai reizei sastopami cipari 2, 4 un 5, bet divas reizes – cipari 8 un 9; citu ciparu nav. Atrast n.

4.5. Uzzīmēt desmitstūri, no kura diagonālēm tikai 7 atrodas tā iekšpusē un nevienai nav kopīgu punktu ne ar vienu malu, izņemot virsotnes.

4.6. Vai var uz riņķa līnijas uzrakstīt 40 skaitļus tā, lai katru 7 pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa būtu negatīva, bet katru 11 pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa – pozitīva?

4.7. Katrā izliektā k-stūra virsotnē atrodas pa medniekam, kas apbruņots ar lāzera ieroci (lāzera stars izplatās momentāni); k-stūra iekšpusē punktā O sēž zaķis. Visi mednieki vienlaicīgi izšauj uz zaķi, bet šāviena brīdī zaķis pieliecas, un visi mednieki iet bojā.
Pierādīt, ka bez punkta O nav cita punkta ar tādu īpašību.

4.8. Kubs ar izmēriem 3x3x3 sastāv no 14 baltiem un 13 melniem kubiņiem; Katra kubiņa izmēri ir 1x1x1; 3 kubiņus, kas novietoti rindā paralēli kādai kuba šķautnei, sauksim par stabiņu. Vai var būt tā, ka katrā stabiņā ir nepāru skaits baltu kubiņu? Vai varbūt tā, ka katrā stabiņā ir nepāru skaits melnu kubiņu?

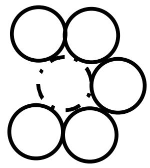
4.9. Pierādīt, ka var atrast vairāk nekā 1000 naturālu skaitļu trijnieku (a;b;c), kas apmierina vienādību

$$a^{15}+b^{15}=c^{16}.$$

4.10. Koka dēlī iedzītas 1977 naglas. Spēlē divi spēlētāji, kas pēc kārtas izdara gājienus. Gājiens ir divu naglu savienošana ar vadu. Divas naglas, kas jau iepriekš savienotas ar vadu, savienot nedrīkst. Tas spēlētājs, pēc kura gājiena rodas noslēgta ķēde, uzvar. Kurš, pareizi spēlējot, uzvar – vai tas, kurš izdara pirmo, vai tas, kurš izdara otro gājienu?

5. nodarbība

5.1. Uz galda guļus stāvoklī atrodas piecas vienāda lieluma monētas. Neatraujot no galda, pārbīdīt monētas tā, lai tās ieņemtu 6. zīmējumā parādīto stāvokli. (Visas zīmējumā attēlotās riņķa līnijas ir vienāda lieluma; blakus esošās riņķa līnijas savstarpēji saskaras. Ar pārtrauktu līniju ierobežotā riņķa vietā monēta neatrodas; šī līnija norāda, ka vidū starp 5 monētām jāpaliek brīvai vietai vēl vienas tāda paša izmēra monētas ievietošanai.) Lineālu, galda malas vai citus palīglīdzekļus bez pašām monētām izmantot nedrīkst.



6.zīm.

5.2. Cik ir veselu pozitīvu skaitļu no 1 līdz 1000, kuru pierakstā ir kaut viens vieninieks?

5.3. Divi brāļi sacentās skriešanā 60 metru distancē. Katra brāļa skrējiena ātrums nemainījās. Kad vecākais nonāca pie finiša pirmajā skrējienā, jaunākajam vēl atlika ko skriet 4 metrus. Otrajā skrējienā vecākais nostājās 4 metrus pirms starta līnijas. Vai otrais skrējiens beigsies neizšķirti?

5.4. Andris aizmirsis mājās pulksteni. Autobusa pieturā viņš pamana stāvam četrus cilvēkus. Andris tiem visiem uzdod jautājumu: "Sakiet, lūdzu, cik pulkstenis?". Viņš saņem šādas atbildes:
A: "Bez sešām minūtēm trīs."
B: "Bez trim minūtēm trīs."
C: "Trīs minūtes pāri trim."
D: "Divas minūtes pāri trim."
Izrādījās, ka visiem stāvētājiem pulksteņi ir nepareizi. Viens no viņiem kļūdījās par 2 minūtēm, otrs par 3, trešais par 4, ceturtais par 5 minūtēm (nav dots, kura pulkstenis par cik minūtēm kavējās vai steidzās).
Cik īstenībā bija pulkstenis?

5.5. 11 vienas un tās pašas grāmatas eksemplāri maksā 12 lati un santīmi, bet 17 šīs pašas grāmatas eksemplāri maksā 20 lati un santīmi.
Cik maksā viens šīs grāmatas eksemplārs?

5.6. Kvadrātveida tabulā ar 8x8 rūtiņām ierakstīti skaitļi, kā parādīts 7. zīmējumā.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
33	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
49	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
57	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**

7.zīm.

32 no šiem skaitļiem priekšā pieraksta "-" zīmi, pie tam tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā tieši 4 skaitļiem pierakstītas "-" zīmes.
Pierādīt, ka šādi pārveidotā tabulā visu ierakstīto skaitļu summa ir 0.

5.7. Kādā veselā pozitīvā skaitlī 600 cipari ir sešinieki, bet pārējie – nulles. Vai šis skaitlis var būt vesela skaitļa kvadrāts?

5.8. Kvadrātveida sala sadalīta atpūtas zonās. Vai esošās zonas noteikti var sadalīt mazākās zonās tā, lai nerastos papildpunkti, kuros krustotos robežu līnijas, un salas karti varētu iekrāsot ar divām krāsām? Vienā krāsā var krāsot tikai tādas atpūtas zonas, kuras robežojas atsevišķos punktos vai vispār nerobežojas.

5.9. Rūtiņu lapas vienas rūtiņas trīs virsotnēs atrodas 3 sienāži. Viņi rotaļādamies lec pāri viens otram. Ja A lec pāri B, tad pēc lēciena A ir tādā pašā attālumā no B, kā pirms lēciena un atrodas uz vienas taisnes ar B un savu iepriekšējo pozīciju. Vai rotaļas laikā kāds no sienāžiem var nokļūt sākotnējās rūtiņās ceturtajā virsotnē?

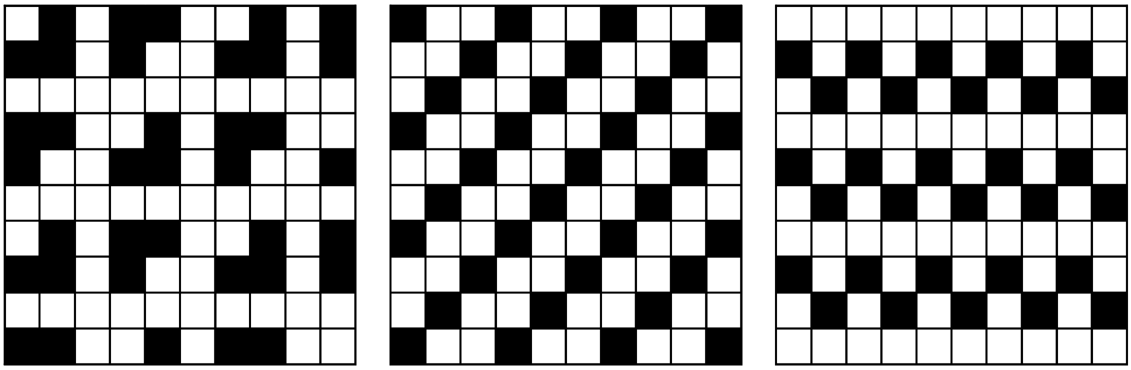
5.10. Plaknē doti pieci punkti. Nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes, nekādi 4 – uz vienas riņķa līnijas.
Pierādīt, ka var novilkt riņķa līniju, kas iet caur trim no šiem punktiem, pie tam viens no abiem pārējiem punktiem atrodas tās iekšpusē, bet otrs – ārpusē.

6. nodarbība

6.1. Sešciparu skaitlis A sastādīts no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6 (katrs cipars izmantots vienu reizi). Pēc tam, uzrakstot skaitļa A ciparus apgrieztā secībā, iegūst skaitli B. Ir zināms, ka reizinājums $4 \cdot A$ beidzas ar divām nullēm, bet starpība A-B ir pozitīvs sešciparu skaitlis. Atrast skaitli A.

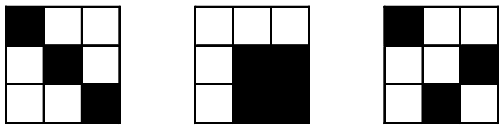
6.2. Dots papīra kvadrāts. Kā, izmantojot tikai papīra griežamo nazīti, var no tā izgriezt regulāru trijstūri?

6.3. Uz trim rūtiņu lapām (10x10 rūtiņas) ir uzzīmēti šādi raksti (skat. 8.zīm.):



8.zīm.

Uzliekot divas šādas lapas uz trešās, tīrās lapas tā, lai tās savstarpēji sakristu, iespējams iegūt jaunu rakstu: tur, kur viena uz otras ir uzklājušās divas vienādas krāsas rūtiņas (divas baltas vai divas melnas rūtiņas), rūtiņa kļūs balta, bet tur, kur viena uz otras uzklājušās dažādas krāsas (balta un melna) rūtiņas, rūtiņa kļūs melna. Piemēram, uzklājot vienu uz otra rakstus (skat. 9.zīm. a) un b)), iegūsim rakstu (skat. 9.zīm. c)).

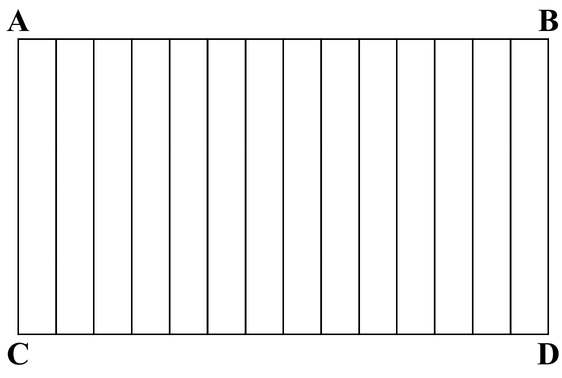


a) **b)** **c)**

9.zīm.

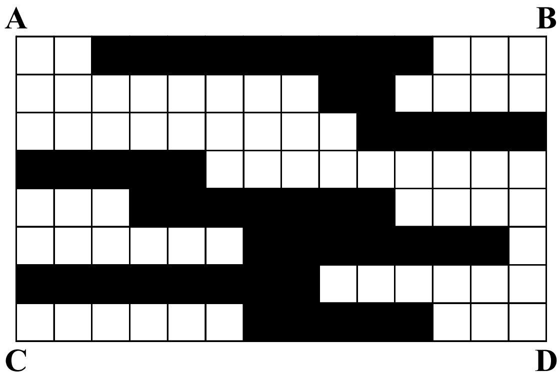
Esiet uzmanīgi – lapas jāuzliek viena uz otras tā, lai tās pilnīgi sakristu, pagriezt lapas nedrīkst. Rakstu veidošanā drīkst izmantot arī visus jauniegūtos rakstus.
Uzzīmējiet visus rakstus, kurus var iegūt no dotajiem.

6.4. Dota 14 cm x 8 cm kaste. Tajā ik pa centimetram ir vertikāla starpsiena (skat. 10.zīm.). Uz kartītēm, kuru izmēri 1 cm x 1 cm, uzrakstīti burti E, S, K, V, A, D, R, Ā, T, S, S, A, U, L, E, K, R, O, K, O, D, I, L, S, G, R, Ā, M, A, T, A, S, K, O, L, A, E, L, L, E, R, A, K, U, R, S, S.



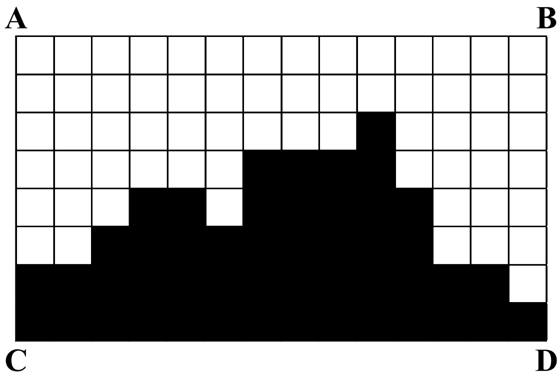
10.zīm.

No burtiem jāsastāda 8 vārdi un pēc tam jāievieto kastē tā, lai katrs vārds būtu savā rindā (kastē ir 8 rindas), bet katrs vārda burts – citā kolonnā, pie tam starp viena vārda burtiem nedrīkst būt tukšumi.
Viens no veidiem, kā vārdus kastē var izvietot, parādīts 11. zīmējumā.



11.zīm.

Paceļot kastes malu AB augstāk nekā malu CD, visas kartītes noslīdēs uz leju un novietosies kolonnās viena virs otras. 12. zīmējumā parādīts, kā izmainīsies 11. zīmējumā attēloto kartīšu stāvoklis.



12.zīm.

I Vai ir iespējams sākumā izvietot dotās kartītes ar burtiem tā, lai pēc kastes sagāšanas izveidotos tāda aina kā 13. zīmējumā?

A B

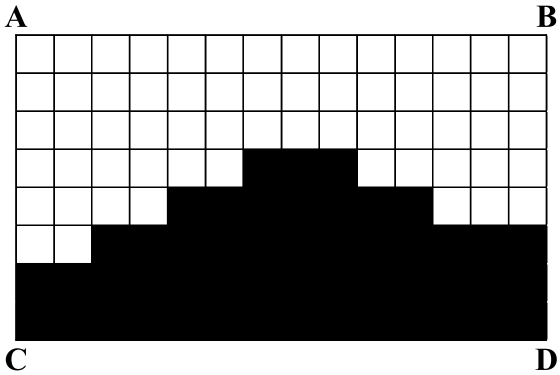
							R						
							O	S	S				
			R	A	K	U	L	D	Ī	V	S		
			K	R	O	K	S	E	L	L	E		
S	A	U	L	E	E	S	S	K	O	L	A		
K	V	A	D	R	Ā	T	G	R	Ā	M	A	T	A

C D

13.zīm.

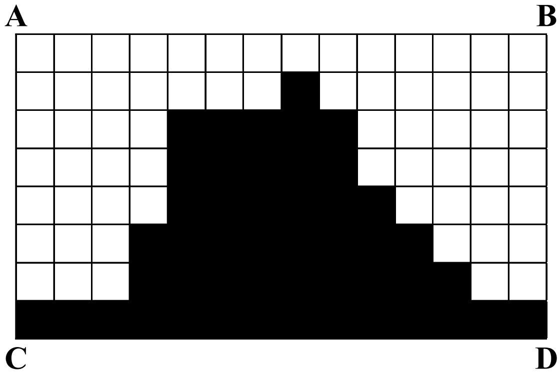
II Vai iespējams sākumā izvietot šīs pašas kartītes tā, lai pēc kastes sagāšanas tās aizpildītu apgabalu, kas attēlots:

a) 14. zīmējumā;



14.zīm.

b) 15. zīmējumā.



15.zīm.

6.5. Nezinītis grib apciemot četru savus draugus, kas dzīvo četrās pilsētās. No katras pilsētas var nokļūt uz jebkuru pilsētu, neiegriežoties citās; pie ieejas katrā pilsētā ir uzrakstīts kāds skaitlis: pirmajā 1, otrajā 3, trešajā 6, ceturtajā 8.

Nezinītis sava ceļojuma maršrutu var izvēlēties pats, bet noteikumi ir šādi: lai ieietu pilsētā, kura maršrutā ir izvēlēta par pirmo, Nezinītis pilsētas pārvaldniekam samaksās tik santīmus, cik liels skaitlis ir uzrakstīts pie pilsētas ieejas; lai ieietu pilsētā, kuru viņš izvēlējies par otro, jāsamaksā divreiz tik, cik ir uzrakstīts pie pilsētas ieejas; lai ieietu trešajā – trīsreiz tik, cik ir uzrakstīts pie pilsētas ieejas, bet, lai ieietu ceturtajā – četrreiz tik, cik ir uzrakstīts pie pilsētas ieejas.

Uzzīmē pilsētas, skaitļus pie to ieejām un ceļus, ar kuriem pilsētas savienotas. Pēc tam izvēlies dažādus maršrutus, apmeklē visas pilsētas un izrēķini, cik katrā gadījumā būs jāmaksā.

Ja tas izdarīts, pacenties atbildēt uz šādiem jautājumiem:

a) kāds maršruts Nezinītim jāizvēlas, lai kopējais samaksāto santīmu skaits būtu iespējami mazāks?

b) kā pierādīt, ka ar mazāku santīmu skaitu Nezinītim neizdotos apciemot visus draugus?

6.6. Sastādi vairākus uzdevumus, kuri sāktos ar vārdiem "Atrast skaitli ar šādām īpašībām:…" daudzpunktu vietā var būt minētas viena, divas, trīs,… īpašības. Par īpašībām var izmantot skaitļa ciparu savstarpējās attiecības, tā ciparu skaitu, tā dalāmību ar citiem skaitļiem, iespēju skaitli izteikt kvadrāta, kuba veidā, iespēju skaitli izteikt kā citu skaitļu summu, starpību, reizinājumu, utt.

Katram uzdevumam drīkst būt tikai daži (ne vairāk kā 5) skaitļi, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

6.7. Pierādīt, ka plaknē nevar novietot vairāk nekā četrus izliektus daudzstūrus tā, lai katriem diviem no tiem būtu kopēja mala.

6.8. Dotas divas virknes, kas sastāv tikai no skaitļiem $+1$ un -1. Katrā virknē ir 1958 skaitļi. Ar vienu gājienu atļauts mainīt zīmes jebkuriem 11 pirmās virknes skaitļiem. Pierādīt, ka ar galīgu gājienu skaitu ir iespējams no pirmās virknes iegūt virkni, kas vienāda ar otro. Divas skaitļu virknes sauksim par vienādām, ja tām vienās un tajās pašās vietās atradīsies vieni un tie paši skaitļi.

6.9. Katra kuba skaldne jāaplīmē ar diviem kongruentiem taisnleņķa trijstūriem: vienu baltu, otru melnu. Vai šos trijstūrus ir iespējams izvietot tā, lai katrā kuba virsotnē visu balto leņķu summa būtu vienāda ar visu melno leņķu summu?

6.10. Dota rūtiņu lapa; rūtiņas malas garums ir 1 cm. Uz šīs lapas uzzīmēts taisnstūris, kura malas iet pa rūtiņu līnijām un malu garumi ir m cm un n cm.

Vai taisnstūrī ir iespējams novilkt lauztu līniju tā, lai visi tās posmi ietu pa rūtiņu līnijām un lai tā izietu caur visām tām rūtiņu virsotnēm, kas atrodas taisnstūra iekšpusē vai uz taisnstūra malām? Kāds būs šīs lauztās līnijas garums? Lauztā līnija katrā rūtiņas virsotnē drīkst ieiet tikai vienu reizi.