"Profesora Cipariņa klubs" 1985./86. m.g.

1. nodarbības atrisinājumi

1.1. Parādīsim, kā var izteikt viencipara skaitļus.

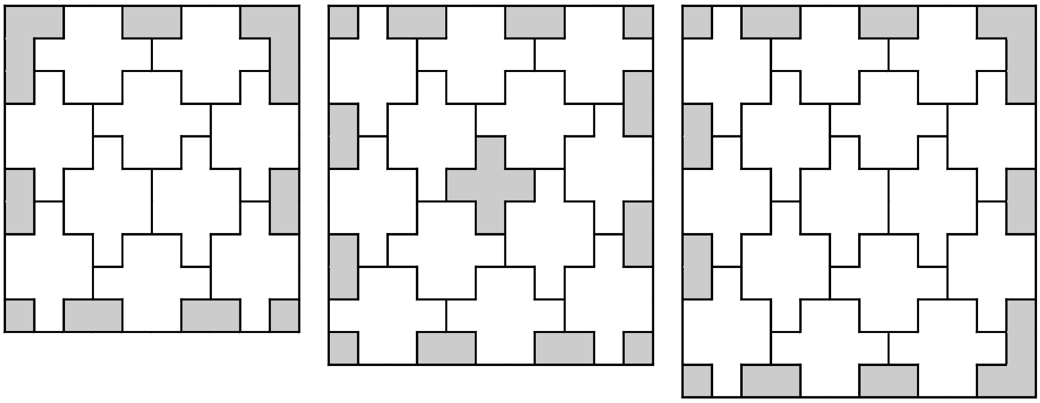
$6+\sqrt{9}-8-1=0$ $6:(9-8+1)=3$ $6+8-9+1=6$ $9\cdot(8-6-1)=9$

$(6+\sqrt{9}-8):1=1$ $6+8-9-1=4$ $(9-8+6):1=7$

$6+\sqrt{9}-8+1=2$ $(6+8-9):1=5$ $9-8+6+1=8$

Šie, protams, nav vienīgie skaitļi, kurus var iegūt.

1.2. Apskatot visus principiāli atšķirīgos vienas figūras un figūru pāra izvietojumus gar kvadrāta malu, redzam, ka to var sadalīt joslās, katrā no kurām ir vismaz puse nenoklātu rūtiņu.



a b c

61. zīm.

Mēģinot izvietot figūras kvadrātā 10x10tā, lai nenoklātas paliek tieši 5 rūtiņas, redzam, ka vismaz vēl viena malas rūtiņa paliek brīva. Tātad ir nenosegtas vismaz 6 rūtiņas. Nav grūti iegūt, ka arī pārējos kvadrātos gar katru malu paliks nenoklātas vismaz 6 rūtiņas. Ņemot vērā to, ka stūra rūtiņas noklāt nevar, secinām, ka visā kvadrātā nenoklātas ir vismaz $6\cdot4-4=20$ rūtiņas jeb kvadrātā 10x10 var izvietot ne vairāk kā $(100-20):8=10$ figūras (skat. 61. a zīm.), kvadrātā 11x11 – $(121-20):8=12{,}625>12$ figūras (skat. 61. b zīm.), bet kvadrātā 12x12 – $(144-20):8=15{,}5>15$ figūras (skat. 61. c zīm.)

1.3. Teiksim, ka nokrāsota nevis kartīte, bet cipars. Vieninieka krāsu sauksim par krāsu a (pārējās dēvēsim par b un c). Ja var izvēlēties divus pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, kuri abi nokrāsoti dažādās krāsās, atšķirīgās no a, tad vajadzīgos ciparus esam atraduši, tāpēc turpmāk apskatīsim tikai tos gadījumus, kad tādus divus ciparus izvēlēties nevar. Skaidrs, ka cipari 2 un 3 vienlaicīgi nevar būt krāsā a, pretējā gadījumā starp atlikušajiem 6 cipariem atradīsies divi pēc kārtas sekojoši cipari dažādās krāsās atšķirīgās no a. Tāpat nav pieļaujams, ka šie katrs no tiem ir savā krāsā, kas, turklāt, atšķiras no a. Paliek trīs gadījumi:

∗ cipars 2 ir krāsā a, bet cipars 3 – krāsā b. Tādā gadījumā ne cipars 4, ne 5 nevar būt krāsā c. Pieņemsim, ka 4 ir krāsā a, tad krāsā c var būt tikai 6, 8 un 9, bet 5 un 7 ir krāsā b. Taču tādā gadījumā 4, 5 un 9 katrs ir savā krāsā. Ja 4 būtu krāsā b, tad cipari 7, 8, 9 būs krāsā c, 5 krāsā b, bet 6 krāsā a. dažādās krāsās ir cipari 2, 5 un 7.

Atlikušie gadījumi (cipari 2 un 3 ir krāsā b; cipars 2 ir krāsā b, bet 3 – krāsā a) analizējami līdzīgi.

1.4. 62. zīm. attēlotajā tabulā ir redzams to četrciparu un piecciparu skaitļu skaits, kuru pierakstā nav neviena vieninieka (ir tikai divnieki), tieši viens vieninieks, tieši divi vieninieki utt.

Vieninieku skaits	4-ciparu skaitļi	5-ciparu skaitļi
0	1	1
1	4	5
2	6	10
3	4	10
4	1	5
5	-	1

62. zīm.

No šīs tabulas seko, ka tādu labo skaitļu skaits, kuru pierakstā starp pirmajiem 4 cipariem nav neviena vieninieka, bet starp pēdējiem 5 ir 1 vieninieks, ir $1\cdot5=5$, tādu, kuriem pirmajās četrās šķirās ir nav vieninieku, bet pēdējās piecās – 2 vieninieki, ir $1\cdot10=10$ (reizinām attiecīgos otrās un trešās kolonnas skaitļus). Tātad labo skaitļu ir

$$1\cdot5+1\cdot10+4\cdot10+1\cdot10+4\cdot10+6\cdot10+1\cdot5+4\cdot5+6\cdot5+4\cdot5+1\cdot1+4\cdot1+6\cdot1+4\cdot1+1\cdot1=$$
$$=5+10+40+10+40+60+5+20+30+20+1+4+6+4+1=256$$

Savukārt, slikto skaitļu skaits ir

$$1\cdot1+4\cdot1+4\cdot5+6\cdot1+6\cdot5+6\cdot10+4\cdot1+4\cdot5+4\cdot10+4\cdot10+1\cdot1+1\cdot5+1\cdot10+1\cdot10+1\cdot5=$$
$$=1+4+20+6+30+60+4+20+40+40+1+5+10+10+5=256$$

Redzam, ka gan labo, gan slikto skaitļu skaits ir vienāds.

1.5. Aplūkosim starpību: tā kā drīkstam izmantot tikai ciparus, tad tās vērtība ir robežās no "1" līdz "9" ("0" nevar būt, jo katrā rūtiņā jāraksta savs cipars).

"1" ir jāizslēdz, jo divciparu un viencipara skaitļa dalījums nekad nav 1.

Arī vērtība "2" ir jāizslēdz, jo to var iegūt tikai vienā veidā 1×2=2, un atkal mēs nevarēsim uzrakstīt dalījumu, jo 5×2=**10**, 6×2=**12**, 7×2=**1**4, 8×2=**1**6, 9×2=**1**8 (katrā piemērā ir izcelti tie cipari, kas vienu reizi jau tika izmantoti vai vispār nedrīkst parādīties).

Starpība nevar būt vienāda arī ar "3", jo reizinājumā šo vērtību var iegūt tikai vienā veidā 1×3=3, taču tādā gadījumā nav iespējams uzrakstīt summu. Līdzīgi iegūstam, ka arī vērtības "4" un "6" ir jāatmet kā nederīgas.

Starpība nevar būt vienāda ar "5", jo tādā gadījumā ciparu 5 nāktos iesaistīt gan reizinājuma (1×**5**), gan dalījuma veidošanā (1**5**:3; 2**5**:**5**; 3**5**:7; 4**5**:9).

Kā iegūt vērtību "7" redzams piemērā

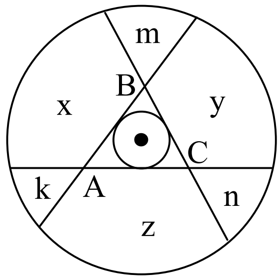
$$56:8=3+4=1\times7=9-2$$

Vērtību "8" iegūt nevar, jo starpību tādā gadījumā var uzrakstīt tikai vienā veidā 9-1, līdz ar to arī reizinājumu un summu var uzrakstīt tikai kā 2×4 un 3+5, taču no cipariem 6, 7 un 8 izveidot dalījumu ar vērtību "8" nav iespējams.

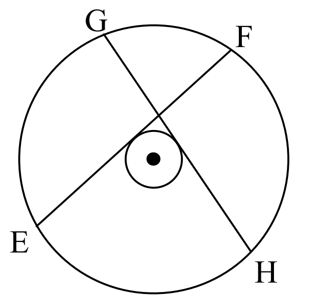
Tā kā 9 ir lielākais cipars un mazākais cipars, ko drīkstam izmantot ir 1, tad arī vērtība "9" nav iegūstama.

Tātad šim uzdevumam eksistē tikai viens atrisinājums.

1.6. Apzīmēsim trijstūra ABC laukumu ar L, visa riņķa laukumu ar Q, bet tā pārējo daļu laukumus tā, kā parādīts 63. zīm.



63. zīm.



64. zīm.

Iedomāsimies divas patvaļīgas lielās riņķa līnijas hordas EF un GH, kas pieskaras mazajai riņķa līnijai (64. zīm.). Pagriezīsim segmentu EGF ap riņķa līniju kopējo centru, kamēr horda EF sakritīs ar hordu GH (tā kā riņķa līnijas ir koncentriskas, tas notiks). Šai brīdī pagrieztais segments EGF sakritīs ar segmentu GFH. Tātad to laukumi ir vienādi. Apzīmēsim katras šādas hordas atšķeltā mazākā segmenta laukumu ar L_1. Varam rakstīt vienādības

$x+y+z+m+n+k+L=Q$ (1)

$k+x+m=L_1$ (2)

$m+y+n=L_1$ (3)

$k+z+n=L_1$ (4)

Saskaitot (2), (3), (4) un atņemot no iegūtās summas (1), iegūstam

$$m+n+k-L=3L_1-Q$$

Tā kā Q un L_1 ir konstanti lielumi, kas nav atkarīgi no tā, kādas hordas tiek novilktas, tad arī m+n+k-L nav no tā atkarīgs, ko arī vajadzēja pierādīt.

1.7. Virknes pirmais loceklis ir pozitīvs un katru nākamo locekli iegūst, pieskaitot iepriekšējam pozitīvu skaitli. Tātad virkne ir augoša. izrēķināsim dažus virknes locekļus:

$$x_1=\frac{1}{2};\ x_2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4};\ x_3=\frac{3}{4}+\frac{9}{16}=1\frac{5}{16}$$

Ievērosim, ka virknes trešais loceklis x_3 ir lielāks par 1, tātad arī visi nākošie virknes locekļi būs lielāki par 1.

Pārveidosim vienu summas S saskaitāmo $\dfrac{1}{x_k+1}$ sekojoši:

$$\frac{1}{x_k+1}=\frac{x_k^2}{x_k^2(x_k+1)}=\frac{x_k^2+x_k-x_k}{x_k\cdot x_k(x_k+1)}=\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k\cdot x_{k+1}}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}$$

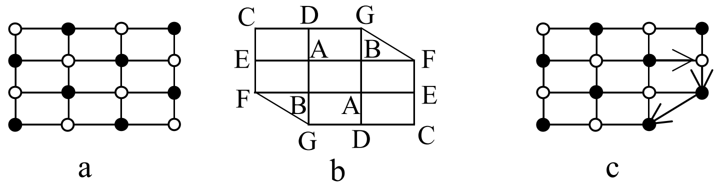
Pārveidosim līdzīgi visus summas saskaitāmos un iegūsim

$$S=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{99}}-\frac{1}{x_{100}}+\frac{1}{x_{100}}-\frac{1}{x_{101}}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{101}}=2-\frac{1}{x_{101}}$$

Tā kā visi virknes locekļi ir pozitīvi un, sākot ar trešo lielāki par 1, tad $x_{101}>1$ un $0<\frac{1}{x_{101}}<1$. Tātad $1<2-\frac{1}{x_{101}}<2$ un summas S veselā daļa ir 1.

1.8. Katrā spēlē ir viens zaudētājs un viens uzvarētājs. Tātad visām komandām kopā visu uzvaru summa ir vienāda ar visu zaudējumu summu. Katra komanda spēlē septiņās spēlēs. Ja ir tāda komanda, kura ir zaudējusi vismaz četrās spēlēs, tad ir arī tāda komanda, kura ir uzvarējusi vismaz četrās spēlēs, apzīmēsim to ar A. Turpmāk apskatīsim spēles tikai starp tām četrām komandām, kuras ir zaudējušas komandai A. Katra no šīm četrām komandām ir izspēlējusi ar katru no pārējām trijām komandām pa vienai spēlei. Starp šīm komandām noteikti atradīsies kāda, kura no trīs nospēlētajām spēlēm ir uzvarējusi divās vai vairāk spēlēs. Apzīmēsim šo komandu ar B un turpmāk interesēsimies tikai par tām divām komandām, kuras tai ir zaudējušas. Skaidrs, ka šo divu komandu savstarpējā spēlē viena ir uzvarējusi otru, apzīmēsim uz varētāju ar C, bet zaudētāju ar D. Tātad komanda C ir uzvarējusi komandu D, komanda B ir uzvarējusi komandas C un D, bet komanda A – komandas B, C un D.

1.9. a) Iekrāsosim režģa krustpunktus tā, kā attēlots 65. a zīm. Sākumā kaķis un pele atrodas vienas krāsas virsotnēs. Viegli saprast, ka pēc katra peles gājiena abas figūras atkal atradīsies vienas krāsas virsotnēs. Tātad kaķis un pele var atrasties vienā virsotnē tikai pēc peles gājiena. Tā kā katra virsotne ir savienota ar vismaz divām citas krāsas virsotnēm, tad pele vienmēr varēs aizbēgt no kaķa.



65. zīm.

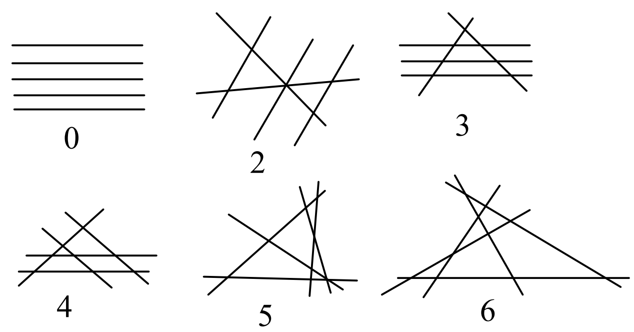
b) Sākumā kaķis un pele atrodas vienādi apzīmētās virsotnēs A. ja kaķis pāriet uz kādu virsotni, tad arī pele var pāriet uz otru tāpat apzīmētu virsotni. Tā kā vienādi apzīmētas virsotnes nav savienotas, tad pēc peles gājiena abi dzīvnieki atrodas vienādi apzīmētās atšķirīgās virsotnēs un kaķis peli noķert nevar.
c) atkal iekrāsosim virsotnes un liksim kaķim izdarīt savus pirmos trīs gājienus tā, kā parādīts 65. c zīm. Ja kaķis vēl nebūs noķēris peli, tad turpmāk pēc katra viņa gājiena abas figūras atradīsies vienādas krāsas virsotnēs. Lasītājs var pārliecināties par to, ka peles izdarītajiem gājieniem, pienāks brīdis, kad kaķis nonāks virsotnē, kurā atrodas pele.

1.10. Noliksim figūru f_1 patvaļīgā lauciņā. Tā "aizņem" ne vairāk kā 21 lauciņu (uz viena lauciņa tā stāv, bet apdraud ne vairāk kā 20). Figūru f_2 nevar novietot nevienā no šiem lauciņiem, turklāt, jāraugās, lai f_2 no sava lauciņa neapdraudētu f_1. Tā kā pārvietojot figūriņu, pārvietojas arī lauciņi, kuras šī figūra apdraud, turklāt, kā jau tika minēts, apdraudēt var ne vairāk kā 20 lauciņus, tad mēģinot ielikt f_2 uz 21, noteikti atradīsies kāds lauciņš, uz kura stāvot figūra f_2 neapdraud figūru f_1. Abas figūras apdraud ne vairāk kā $2\cdot(20+1)$ lauciņus.

Līdzīgi spriežot, iegūstam, ka figūra f_3 var apdraudēt kādu no jau novietotajām figūrām no ne vairāk kā $2{\cdot}20$ lauciņiem. Tātad trīs figūriņu novietošanai nepieciešami $21{\cdot}2+20{\cdot}2+1=2{\cdot}41+1$ lauciņi. Šīs figūriņas aizņems ne vairāk kā $3{\cdot}21$ lauciņu.
Ja uz galdiņa ir izvietos k figūras, tad tās aizņem ne vairāk kā $k{\cdot}21$ lauciņu. Figūra f_{k+1} nedrīkst atrasties nevienā no šiem lauciņiem, turklāt tā kādu no jau novietotajām k figūrām tā varētu apdraudēt no ne vairāk kā $k{\cdot}20$ lauciņiem. Tātad k+1 figūras novietošanai pietiek ar $k{\cdot}21+k{\cdot}20+1=k{\cdot}41+1$ lauciņiem. Tātad 20 figūriņām vajag $19{\cdot}41+1=780$ lauciņus. Tā kā spēles laukums sastāv no $30{\cdot}30=900$ lauciņiem, tad uz tā varēs izvietot 20 figūriņas saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem.

2. nodarbības atrisinājumi

2.1. Analizējot visus iespējamos principiāli atšķirīgos piecu taišņu savstarpējā izvietojuma gadījumus, secinām, ka piecas taisnes plaknē var izveidot 0, 2, 3, 4, 5 vai 6 galīgas daļas (skat. 66. zīm.).



66. zīm.

2.2. Apzīmēsim divus skaitļus, starp kuriem ir viena rūtiņa, ar burtiem a un b, tādā gadījumā minētajā rūtiņā ir jābūt skaitlim a+b (skat. 67. zīm.).

	a	a+b	b	*	**	***

67.zīm.

	a	a+b	b	-a	-a-b	-b	a	a+b	b	

68. zīm.

No dotā secinām, ka (a+b)+*=b jeb *=b-(a+b)=-a, līdzīgi iegūstam, ka nākošajā rūtiņā pa labi ir jābūt skaitlim **=-a-b, bet ***=-a-b-(-a)=-b. Turpinot darboties visai drīz iegūstam šādu ainu, kas redzama 68. zīm. Skaidrs, ka virzoties aizvien tālāk uz labo pusi atkal iegūsim 6 atšķirīgu skaitļu virkni :a; a+b; b; -a; -a-b;-b;. Kreisās puses tukšajās rūtiņās skaitļi būs izvietoti pretējā secībā -b; -a-b; -a; b; a+b; a. Tātad Velēnu vecīša jostā ver būt ne vairāk kā 6 atšķirīgi skaitļi. Piemēram, 3, 1, -2, -3, -1, 2.
Apskatot tos gadījumus, kuros divi vai vairāki no šiem sešiem skaitļiem ir vienādi savā starpā, iegūstam, ka ir iespējami vēl arī šādi gadījumi: uz jostas var būt tikai 1 skaitlis un tā ir 0; trīs atšķirīgi skaitļi, piemēram, -3, 0, 3; četri atšķirīgi skaitļi: -6, -3, 3, 6.

2.3. Pieņemsim, ka 64 rūķīšu vietā ir 8 rūķīši. Sanumurēsim tos ar skaitļiem no 1 līdz 8, neraizējoties par to, vai viņiem visiem ir atšķirīgs eliksīra daudzums, vai nē. Vispirms

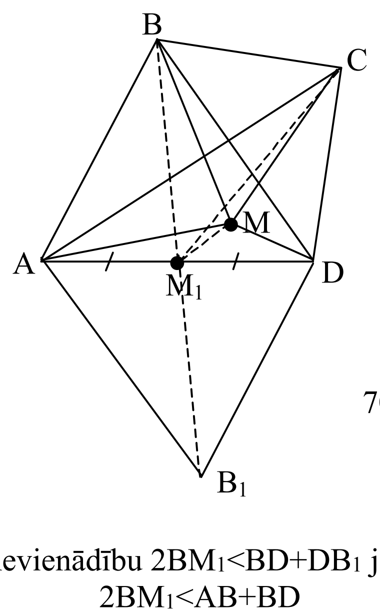
pie burvju trauka dosies pirmais un otrais rūķītis, tad trešais un ceturtais, piektais un sestais, septītais un astotais rūķītis. Tad ikviens pirmā pāra rūķītis katrs ar citu otrā pāra rūķīti dosies pie burvju trauka. Skaidrs, ka tagad visiem četriem rūķīšiem ir vienāds daudzums eliksīra. Līdzīgi rīkojas arī pārējie četri rūķīši. Visbeidzot, katrs pirmā četrinieka rūķītis apvienojas ar vienu otrā četrinieka rūķīti un dodas pie burvju trauka. Pēc šo operāciju veikšanas burvju eliksīrs būs vienādi sadalīts šo astoņu rūķīšu starpā.
Uzdevumā minētos 64 rūķīšus var vispirms sadalīt 8 grupās pa 8 rūķīšiem katrā. Veikt eliksīra pārdali katras grupiņas ietvaros, tad grupiņas apvienot 4 pāros, 2 četriniekos utt.

2.4. Doto uzdevumu – uz šaha galdiņa izvietot 4 torņus un 4 laidņus tā, ka neviena figūra neapdraud nevienu citu – var veikt kaut vai tā (L – laidnis, T – tronis):

L	L						
			T				
		T					
						T	
				T			
L	L						

69. zīm.

2.5. Pieņemsim, ka vistuvāk punktam M atrodas malas AD viduspunkts M_1. Savienosim to ar virsotnēm B un C (skat. 70. a zīm.) Pagarinām BM_1, lai $M_1B_1=BM_1$, tādā gadījumā četrstūris $ABDB_1$ ir paralelograms un $AB=DB_1$.



70. a zīm.

Saskaņā ar trijstūra nevienādību $2BM_1<BD+DB_1$ jeb

$$2BM_1<AB+BD \qquad (1)$$

Līdzīgi iegūst, ka

$$2CM_2<AC+CD. \qquad (2)$$

Ievērosim, ka

$$MA<AM_1+M_1M,\ MB<BM_1+M_1M,\ MC<CM_1+M_1M,\ MD<DM_1+M_1M \quad (3)$$

No nevienādībām (3) iegūstam, ka

$$MA+MB+MC+MD<AM_1+BM_1+CM_1+DM_1+4M_1M$$

Savukārt, no (1) un (2) iegūstam, ka

$$AM_1+DM_1+2(BM_1+CM_1)<AD+AB+BD+AC+CD$$

Tātad, lai pierādītu prasīto, ir jāpierāda, ka $4M_1M<BM_1+CM_1+BC$ (Nu un kā gan lai es to izdaru?)

2.6. Pieņemsim, ka doti cipari no 1 līdz 9, katrs tieši vienu reizi: a, b, c, d, e, f, g, h, i.

Apskatīsim speciālgadījumu, kad summa Σ sastāv no trijiem saskaitāmajiem $\Sigma=\overline{abcd}+\overline{efg}+\overline{hi}$.

Skaiti $\overline{abcd}$ var uzrakstīt sekojošas izteiksmes veidā:

$$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=999a+99b+9c+a+b+c+d.$$

Līdzīgi iegūstam

$$\overline{efg}=99e+9f+e+f+g \text{ un } \overline{hi}=9h+h+i.$$

Tagad pārveidosim summu

$\Sigma=\overline{abcd}+\overline{efg}+\overline{hi}=$

$=999a+99b+9c+99e+9f+9h+a+b+c+d+e+f+g+h+i$ (*)

Tā kā a+b+c+d+e+f+g+h+i=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45, tad izteiksmes (*) vērtība noteikti dalās ar 9, kas arī bija jāpierāda.

Ja saskaitāmie būtu sakombinēti citādi, tad, izdarot līdzīgus spriedumus, mēs atkal iegūtu, ka šī jaunā summa dalās ar 9.

2.7. Ievērosim, ka ir spēkā sekojošas nevienādības:

$$6=\sqrt{36}<\sqrt{42}<\sqrt{43}<\sqrt{49}=7,$$

no šejienes seko

$$6<\sqrt{42}<7$$

$$6<\sqrt{43}<7$$

$$6+6<\sqrt{42}+\sqrt{43}<7+7$$

$$12<\sqrt{42}+\sqrt{43}<14.$$

Esam ierobežojuši izteiksmes vērtību ar skaitļiem 12 un 14, taču tiem pa vidu atrodas vēl viens vesels skaitlis – 13. Aplūkosim sekojošu starpību

$$13^2-(\sqrt{42}+\sqrt{43})^2=169-42-43-2\sqrt{42}\cdot\sqrt{43}=$$

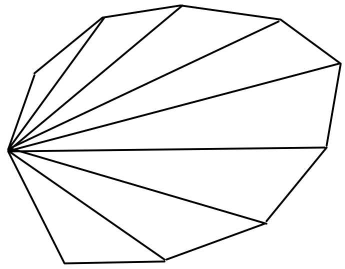
$$=84-2\sqrt{42}\cdot\sqrt{43}=2\cdot 42-2\sqrt{42}\cdot\sqrt{43}<2(42-\sqrt{42}\cdot\sqrt{42})=0,$$

tas nozīmē, ka izteiksmes $13^2-(\sqrt{42}+\sqrt{43})^2$ vērtība ir negatīva, tas var būt tikai tad, ja $13<\sqrt{42}+\sqrt{43}$.

Atbilde: dotās izteiksmes vērtība ir ierobežota ar skaitļiem 13 un 14.

2.8. Ja pirmais no 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem ir 1, tad starp skaitļiem 1, 2, 3, ..., 10 ir četri pirmskaitļi: 2, 3, 5, 7. Ja pirmais no šiem 10 pēc kārtas ņemtajiem skaitļiem ir 2, tad starp 2, 3, ..., 10, 11 ir 5 pirmskaitļi: 2, 3, 5, 7, 11. Ja pirmais no 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem ir lielāks par 2, tad puse no tiem ir pāra skaitļi, bet neviens no pāra skaitļiem, kas lielāki par 2, nav pirmskaitlis. Tātad ne vairāk kā 5 skaitļi var būt pirmskaitļi.

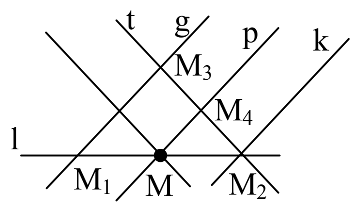
2.9. Ar 8 trijstūriem to var izdarīt, skat. 71. zīm.



71. zīm.

Pierādīsim, ka ar mazāk kā 8 trijstūriem uzdevuma prasība nav izpildāma.
Ja desmitstūris ir izliekts, tad katrs tā iekšējais leņķis ir mazāks par 180°. Tāpēc katru tā iekšējo leņķi var pārklāt vienīgi ar trijstūru iekšējiem leņķiem. Tā kā desmitstūra iekšējo leņķu summa ir 180°(10-2)=180°·8, bet viena trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°, tad pārklāšanā jāizmanto vismaz 8 trijstūri.

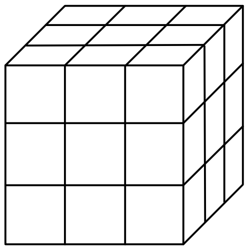
2.10. Caur punktu M novelkam taisni p, tai paralēlas taisnes g, kas krusto taisni l punktā M_1, un k, kas krusto taisni l punktā M_2 (skat. 72. zīm.). Novietojam lineālu tā, lai viena mala ietu caur punktu M, otra – caur punktu M_2, bet lineāla malas neietu pa taisnēm p un k. Caur punktu M_2 novelkam taisni t, tās krustpunktus ar taisnēm g un p apzīmēsim ar M_3 un M_4. Aplūkosim trijstūri MM_2M_4, tas ir vienādsānu, jo tā augstums, kas vilkts pret malu MM_4 ir vienāds ar lineāla augstumu, un arī augstums, kas vilkts pret malu M_2M_4 ir vienāds ar lineāla augstumu, tātad šie augstumi ir vienādi savā starpā, no šejienes seko, ka $MM_4=M_2M_4$. Tā kā $\Delta M_1M_3M_2$ attiecīgās malas ir paralēlas ΔMM_4M_2 attiecīgajām malām, tad šie trijstūri ir līdzīgi. Varam secināt, ka arī $\Delta M_1M_3M_4$ ir vienādsānu ($M_1M_3=M_2M_3$). Tā kā vienādsānu Δ mediāna, kas vilkta pret tā pamatu, ir arī Δ augstums, tad savienojot punktu M_3 ar M, iegūst perpendikulu, kas vilkts pret taisni l punktā M.



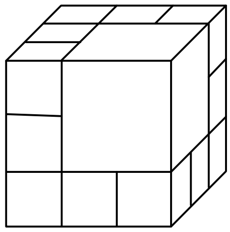
72. zīm.

3. nodarbības atrisinājumi

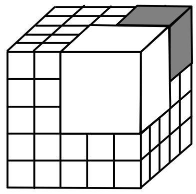
3.1. 73. zīm. parādīts, kā kubu var sadalīt 27 mazākos kubos.



73. zīm.



74. zīm.



75. zīm.

Lai sadalītu kubu 20 kubiņos, sākumā tas vispirms jāsadala 27 un tad 8 kubiņus jāapvieno vienā (skat. 74. zīm.).

Lai sagrieztu kubu 92 mazākos kubos, vispirms sagriezīsim to 125=5·5·5 mazos kubiņos. Pēc tam apvienosim vienā kubā 27=3·3·3 mazos kubiņus, kas atrodas vienā lielā kuba stūrī, un apvienosim vienā kubā 8=2·2·2 mazos kubiņus, kas atrodas lielā kuba citā stūrī. Tā kā neaiztikti paliek 125-27-8=90 mazie kubiņi, tad kopējais kubu skaits ir 90+1+1=92 (skat. 75. zīm.)

3.2. Ja sagriezta tikai viena kartīte, tad var sastādīt 24 dažādus skaitļus:

1689, 1698, 1869, 1896, 1968, 1986, 6189, 6198,
6819, 6891, 6918, 6981, 8169, 8196, 8619, 8691,
8916, 8961, 9168, 9186, 9618, 9681, 9816, 9861.

Nav grūti pārbaudīt, ka neviens no tiem nedalās ar 11. Tātad ar vienas kartītes sagriešanu nepietiek.

Sagriežot 2 kartītes, Jānis var, piemēram, izveidot skaitli 11998866, kas dalās ar 11.

Tātad mazākais iespējamais kartīšu skaits, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir 2.

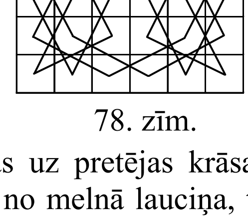
3.3. Piemēram, skat. 76. zīm.

$$\boxed{1}\,\boxed{5} \times \boxed{4} = \boxed{6}\,\boxed{0} \qquad \boxed{2}\,\boxed{9} \times \boxed{3} = \boxed{8}\,\boxed{7}$$

76. zīm.

3.4. Taisnstūrim ar izmēriem 5×5 rūtiņas uzdevuma prasības nav izpildāmas. Tiešām, iekrāsosim tā rūtiņas šaha galdiņa kārtībā (skat. 77. zīm.)

77. zīm.



78. zīm.

Šaha zirdziņš pēc katra gājiena atrodas uz pretējas krāsas lauciņa nekā pirms šī gājiena. Tātad, ja zirdziņš sāk savu ceļu no melnā lauciņa, tad pēc pirmā gājiena tas būs uz baltā, pēc otrā gājiena atkal uz melnā, ..., pēc 24. gājiena uz melnā , bet pēc 25. gājiena uz baltā lauciņa. Lai nonāktu uz katra lauciņa tieši vienu reizi, zirdziņam ir

jāizdara tieši 25 gājieni. Tātad tas ar pēdējo gājienu nevar atgriezties uz sākotnējā lauciņa, jo tas ir melns.
Tieši tāpat izpētām gadījumu, ja zirdziņš sāk savu ceļu no baltā lauciņa.
Taisnstūrim ar izmēriem 5×6 rūtiņas uzdevuma prasības ir izpildāmas, piemēram, tā, kā parādīts 78. zīm.

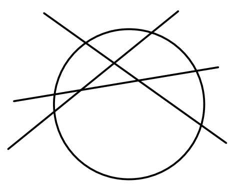
3.5. Sastādām tabulu (skat. 79. zīm.), kas attēlo visas iespējamās situācijas, kuras var rasties metot kauliņus (burti A un J norāda, kurš zēns ir uzvarējis).

A \ J	1	1	3	3	5	5
2	A	A	J	J	J	J
2	A	A	J	J	J	J
2	A	A	J	J	J	J
4	A	A	A	A	J	J
4	A	A	A	A	J	J
4	A	A	A	A	J	J

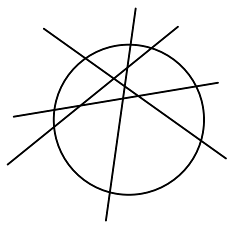
79. zīm.

Ja kauliņi ir pareizas formas, tad katras skaldnes uzkrišanas varbūtība ir $\frac{1}{6}$. Tā kā viena kauliņa mešanas rezultāts neietekmē otra kauliņa mešanas rezultātu, tad visi 36 gadījumi ir vienādi iespējami, bet tas nozīmē, ka izredzes uzmest lielāku skaitli abiem zēniem ir vienādas.

3.6. Tā kā mūs interesē tikai riņķa iekšpuse, tad taišņu vietā aplūkosim hordas. Skaidrs, ka lielākais riņķa daļu skaits, kas iegūstams novelkot 2 hordas, ir 4. Velkot trešo hordu, varam šķērsot augstākais 3 daļas (ja varētu šķērsot visas četras daļas, tad diviem neparalēliem nogriežņiem būtu vairāk nekā 1 kopīgs punkts − aplamība)., tātad pavisam var iegūt 3·2+1=7 daļas (skat. 80. a zīm.). Līdzīgi spriežot, varam secināt, ka ceturtā horda šķērsos augstākais 4 daļas, līdz ar to 4 hordas riņķi sadala ne vairāk kā 4·2+3=11 daļās (skat. 80. b zīm.)



80. a zīm.



80. b zīm.