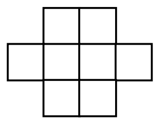
"Profesora Cipariņa klubs" 1985./86. m.g.

1. nodarbība

1.1. Ar cipariem 1, 9, 8, 6 (var būt citā secībā), izmantojot aritmētisko darbību zīmes, iekavas un citus vispārpieņemtus matemātiskus simbolus, izteikt visus veselos pozitīvos skaitļus no 1 līdz pēc iespējas lielākam skaitlim. Katrs cipars jālieto tieši vienu reizi. Nevienu skaitli nedrīkst izlaist. Piemēram, 98+6-1=103, $6+\sqrt{9}-8:1=1$.

1.2. Kādu vislielāko skaitu 5. zīm. attēloto figūriņu var izgriezt no kvadrāta, kura izmēri ir a) 10×10, b) 11×11, c) 12×12 rūtiņas?



5. zīm.

1.3. Dotas 9 kartītes, uz kurām uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 9 (katrs tieši uz vienas kartītes). Trīs kartītes nokrāsoja zilas, trīs – zaļas, trīs – sarkanas. Pierādīt, ka noteikti var izvēlēties trīs kartītes dažādās krāsās tā, ka uz vienas izraudzītās kartītes uzrakstītais skaitlis vienāds ar to abu skaitļu summu, kas uzrakstīti uz abām pārējām izraudzītajām kartītēm.

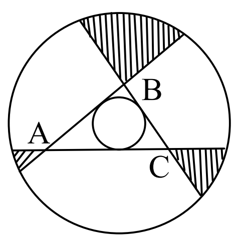
1.4. Apskatīt visus deviņciparu skaitļus, kuru pierakstā izmatoti tikai cipari 1 un 2. Skaitli sauc par labu, ja tā pēdējās piecās šķirās ir vairāk vieninieku nekā pirmajās četrās, un par sliktu pretējā gadījumā. Kādu skaitļu ir vairāk – labu vai sliktu?

1.5. Ierakstīt 6. zīm. attēlotajās rūtiņās dažādus ciparus, starp kuriem nav nulles, tā, lai iegūtās vienādības būtu pareizas.

$$\square\,\square : \square = \square + \square = \square \times \square = \square - \square$$

6. zīm.

1.6. Dotas divas koncentriskas riņķa līnijas. Iekšējai riņķa līnijai novilktas trīs pieskares, kas krustojas tā, kā parādīts 7. zīm. Pierādīt, ka starpība, kuru iegūst, no iesvītroto laukumu summas atņemot trijstūra ABC laukumu, nav atkarīga no tā, kā novilktas trīs pieskares.



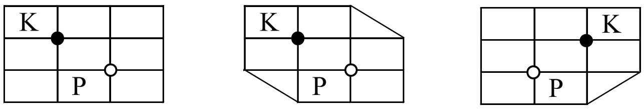
7. zīm.

1.7. Dota skaitļu virkne (x_i), kuras pirmais loceklis $x_1=\frac{1}{2}$, bet katru nākamo izrēķina no iepriekšējā pēc šādas formulas : $x_{i+1}=x_i^2+x_i$. Piemēram, x_2 var izrēķināt šādi:

$x_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$. Atrast summas $S=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+...+\frac{1}{x_{100}+1}$ veselo daļu, ja x_1, x_2, …, x_{100} ir iepriekš aprakstītās virknes attiecīgie locekļi.

1.8. Astoņas volejbola komandas spēlē katra ar katru vienu spēli. (Volejbola spēlē neizšķirts rezultāts **nevar būt**.) Pierādīt, ka pēc visu spēļu izspēlēšanas var izvēlēties 4 komandas un apzīmēt tās ar burtiem A, B, C un D tā, lai komanda A būtu uzvarējusi gan B, Gan C, gan D, komanda B uzvarējusi komandas C un D un komanda C uzvarējusi komandu D.

1.9. Kaķis un pele var pārvietoties tikai pa režģa līnijām. Par režģa virsotnēm sauksim režģa rūtiņu virsotnes. Kaķis un pele savā kārtējā gājienā var pāriet uz tādu režģa virsotni, kura ir tieši savienota ar to virsotni, kurā dzīvnieks pašreiz atrodas. Gājienus izdara pārmaiņus – vispirms kaķis, pēc tam pele, tad kaķis, tad atkal pele un tā tālāk. Kuros no . zīm. attēlotajiem režģiem kaķis noķers peli un kuros – ne, ja sākumā pele atrodas virsotnē P, bet kaķis – virsotnē K?



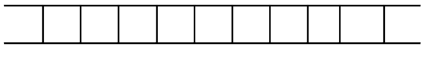
8. zīm.

1.10. Kādā spēlē ir 20 dažādas figūras. Tās var izvietoties uz 30×30 rūtiņu liela spēles galdiņa. Katra figūra var novietoties jebkurā rūtiņā, bet vienā rūtiņā vienlaikus nevar atrasties vairāk kā viena figūra. Ir zināms, ka
a) katra figūra jebkurā pozīcijā apdraud ne vairāk kā 20 laucinus,
b) ja kādu figūru pārbīda uz citu laucinu, šīs figūras apdraudēto laucinu kopa arī attiecīgi pārbīdās.
Pierādīt, ka uz 30×30 rūtiņu liela kvadrātiska galdiņa figūras var izvietot tā, ka neviens figūra neapdraud nevienu citu.

2. nodarbība

2.1. Plaknē novilktas 5 dažādas taisnes. Tās sadala plakni daļās. Cik starp šīm daļām, var būt galīgu daļu? Uzrādīt visas iespējas un parādīt, ka citu bez norādītajām nav.

2.2. Velēnu vecīša josta sastāv no kvadrātiņiem. Tā ir bezgalīga uz abām pusēm (skat. 9. zīm.). Katrā kvadrātiņā ierakstīts vesels skaitlis. Cik dažādu skaitļu var būt uz Velēnu vecīša jostas, ja zināms, ka katrā kvadrātiņā ierakstītais skaitlis vienāds ar abos tam blakus esošajos kvadrātiņos ierakstīto skaitļu summu?



9. zīm.

2.3. Sūnu mežā dzīvo 64 rūķīši. Kādu dienu pie viņiem atnāca labā feja un katram iedeva krūzīti ar jaunības eliksīru. Tomēr feja ļoti steidzās un eliksīru sadalīja nevienmērīgi: vienam vairāk, citam mazāk. Rūķīšu rīcībā ir brīnumtrauks, kuru

var izmantot šādi: divi rūķīši salej kopā savu eliksīru, un pēc tam katrs no brīnumtrauka paņem pusi tajā esošā eliksīra.
Vai rūķīši var panākt, lai visiem būtu vienāds daudzums eliksīra?

2.4. Vai uz šaha galdiņa var izvietot 4 torņus un 4 laidņus tā, lai neviena figūra neapdraudētu nevienu lauciņu, uz kura atrodas kāda cita?

2.5. Dots izliekts četrstūris ABCD un punkts M tā iekšpusē. Pierādīt, ka MA+MB+MC+MD<AB+AC+AD+BC+BD+CD.

2.6. Izveidoti vairāki naturāli skaitļi, kas kopā satur visus ciparus no 1 līdz 9, katru tieši vienu reizi. Pierādīt, ka šo skaitļu summa dalās ar 9.

2.7. Atrast divus pēc kārtas sekojošus veselus skaitļus, starp kuriem atrodas izteiksmes $\sqrt{42}+\sqrt{43}$ vērtība.

2.8. Pierādīt, ka no 10 pēc kārtas ņemtiem veseliem pozitīviem skaitļiem ir ne vairāk kā 5 pirmskaitļi. Vai 5 no šiem skaitļiem var būt pirmskaitļi?

2.9. Izliekts 10-stūris pilnīgi jāpārklāj ar trijstūriem, kas neiziet ārpus 10-stūra. paši trijstūri savā starpā var pārklāties. Noteikt,
a) kā to izdarīt ar 8 trijstūru palīdzību,
b) kāds ir mazākais trijstūru skaits, ar kuru to var izdarīt.

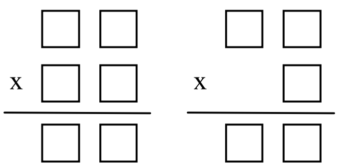
2.10. Dota taisne l un punkts M uz tās. Dots tikai lineāls, kam abas malas paralēlas, un zīmulis. Kā konstruēt perpendikulu pret taisni l punktā M.

3. nodarbība

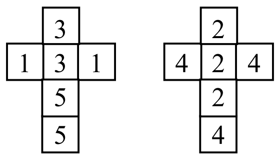
3.1. Vai kubu var sagriezt a) 27 mazākos kubos, b) 20 mazākos kubos, c) 92 mazākos kubos?

3.2. Dotas vairākas kartītes. Uz katras no tām uzrakstīts skaitlis 1986.
Jānis paņēma dažas kartītes, sagrieza katru no tām 4 gabalos tā, ka uz katra gabala palika tieši viens cipars, un visus iegūtos gabalus salika rindā tā, ka izveidojās jauna skaitļa pieraksts. Izrādījās, ka šis skaitlis dalās ar 11.
Kāds bija mazākais kartīšu skaits, kuras Jānim jāsagriež, lai tā varētu notikt?

3.3. Kvadrātiņos (10. zīm.) ierakstīt ciparus tā, lai iegūtu pareizi izpildītus reizināšanas piemērus. Jābūt izmantotiem visiem cipariem no 0 līdz 9 ieskaitot.



10. zīm.



11. zīm.

3.4. Vai taisnstūri ar izmēriem a) 5×6 rūtiņas, b) 5×5 rūtiņas var apstaigāt ar šaha zirdziņu tā, lai katrā lauciņā nonāktu tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgrieztos tur, kur bija sākumā?

3.5. Jānis un Andris reizē met divus kubiskus spēļu kauliņus, kuru virsmu izklājumi parādīti 11. zīm.: Jānis – pirmo, Andris – otro. Pieņemt, ka viņi to dara daudzas reizes. Kā jums šķiet, kādā daļā gadījumu lielāks cipars uzkritīs Jānim un Kādā – Andrim? Vispirms iegūt atbildi spriedumu ceļā, pēc tam pagatavot šādus kauliņus un veikt eksperimentu.

3.6. Kāds ir lielākais daļu skaits, kurās riņķi var sadalīt a) 3 taisnes, b) 4 taisnes?