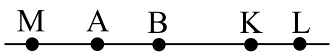
"Profesora Cipariņa klubs" 1986./87. m.g.

1. nodarbības atrisinājumi

1.1. Sanumurēsim skolēnus ar skaitļiem no 1 līdz 30. Pirmajā dienā skolēni ar numuriem 1 ,līdz 15 sēdēs mājās, bet pārējie tos apciemos. Otrajā dienā skolēni mainīsies lomām – tie, kas sēdēja mājās, ies ciemos, bet tie, kas ciemojās, sēdēs mājās. Tālākajā risinājuma gaitā aplūkosim tikai daļu skolēnu, jo atlikušajiem liksim rīkoties līdzīgi. Trešajā dienā 1. līdz 7 skolēns apciemo 8. līdz 15. skolēnu, ceturtajā dienā – otrādi. Piektajā dienā 1. līdz 3. iet ciemos, sestajā dienā ciemoties dodas 4. līdz 7. skolēns utt. Pēc astotās dienas visi skolēni būs sadalīti grupiņās, katrā no kurām būs ne vairāk kā divi skolēni. Ar 2 dienām pietiek, lai katrs no viņiem varētu apciemot otru.
Lai kā skolēnus dalītu divās grupās (viena iet ciemos, otra – sēž mājās), vienā no tām būs vismaz 15 skolēni. Sadalām tos divās grupās, no kurām viena iet ciemos, bet otra uzņem ciemiņus. Skaidrs, ka vienā no grupiņām būs vismaz 8 skolēni. Trešajā dienā atradīsies grupiņa ar vismaz 4 skolēniem tajā, bet ceturtajā – noteikti būs grupiņa, kurā būs 2 skolēni. Šie divi skolēni minēto 4 dienu laikā ir vai nu vienlaicīgi sēdējuši mājās, vai gājuši ciemos, tātad viņi nav varējuši apciemot viens otru, k.b.j3

1.2. Atzīmēsim punktus K, L un M tā kā parādīts 81. zīm.



81. zīm.

Visu punktu attālumu līdz punktam A summa ir MA+2·AB+2·BK+KL, bet līdz punktam B – MA+AB+2·BK+KL, šo divu izteiksmju starpība ir AB (pa labi no B ir par 1 punktu vairāk nekā pa kreisi no A). Atzīmējot aiz punkta L punktu N, iegūsim, ka starpība ir 2AB (pa labi no B ir par 2 punktiem vairāk nekā pa kreisi no A)., tātad – attālumu summu starpība ir vienāda ar attiecīgo punktu daudzumu starpību. Skaidrs, ka 45 punktus nevar atlikt uz šīs taisnes tā, lai pa kreisi no A un pa labi no B atzīmēto punktu skaits būtu vienāds, tas nozīmē, ka attālumu starpība būs vismaz AB, tātad attālumu summa no šiem 45 punktiem līdz punktam A nevar būt vienāda ar attālumu summu no šiem punktiem līdz punktam B.

1.3. Jā, var. Divas iespējas parādītas 82. zīm.

1	-1	1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	1
1	-1	1	-1

1	-1	1	-1
1	-1	1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	1

82. zīm.

1.4. Jānim nav nekādu cerību dāvanu saņemt. Andra uzrakstītie skaitļi 1, 1, 2, 3, 7, 22, dalot tos ar 4, dod atlikumus 1, 1, 2, 3, 3, 2. Varam pierakstīt tos sekojošā veidā:

$$4k+1,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3,\ 4l+2,\ 4m+2,$$

(k, l, m – veseli skaitļi).
Iegūsim nākošos skaitli:

$$(4l+3)(4m+2)+1=4(4lm+2l+3m+1)+3=4n+3.$$

Iegūtais skaitlis, dalot to ar 4, dod atlikumu 3.
Izrēķināsim vēl divus nākamos skaitļus.

$$(4m+2)(4n+3)+1=4(4nm+3m+2n+1)+3=4r+3.$$
$$(4n+3)(4r+3)+1=4(4nr+3n+3r+2)+2=4s+2.$$

Redzam, ka Andra iegūto skaitļu atlikumi veido virkni 1, 1, 2, 3, …, 2, 3, 3, 2, … . Skaidrs, ka atlikumu virkne periodiski atkārtosies:

$$1,\ 1,\ 2,\ \underline{3,\ 3,\ 2},\ \underline{3,\ 3,\ 2},\ \underline{3,\ 3,\ 2},\ \ldots$$

Skaitlis dalās ar 4 tikai tad, ja, to dalot ar 4, iegūst atlikumu 0. Atlikumu virknē nulle neparādīsies. Līdz ar to nekad netiks iegūts skaitlis, kas dalītos ar 4. Tāpēc Jānis divriteni no Andra nekad nesaņems.

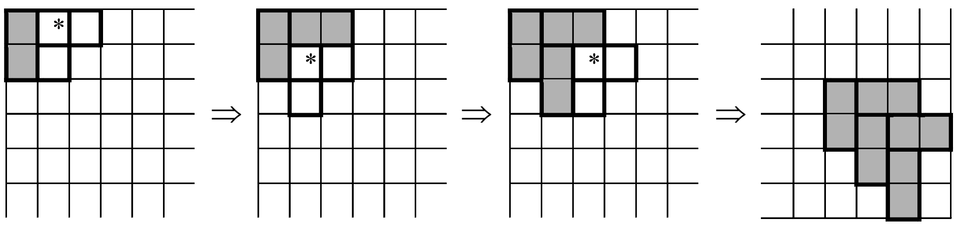
1.5. Uzdevumā minētie nosacījumi izpildās tikai tad, ja skaitļa vienu cipars ir 9. Pretējā gadījumā ciparu summa palielinās līdz ar skaitļa palielināšanos. Skaitli M, kas mazāks par 1000, vispārīgā gadījumā var pierakstīt kā M=$\overline{xyz}$. Aplūkosim 3 gadījumus:

1) M=999, tad M+1=1000. Uzdevuma nosacījumi netiek apmierināti, jo skaitļa M ciparu summa ir 27, bet nākamā skaitļa ciparu summa ir 1.

2) M=$\overline{x99}$, tad M+1=$\overline{(x+1)00}$. No uzdevuma nosacījuma seko, ka x+9+9=2(x+1): x+18=2x+2 un x=16, kas nav cipars.

3) Ja M=$\overline{xy9}$, tad $\overline{x(y+1)0}$. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka x+y+9=2(x+y+1): x+y+9=2x+2y+2 un x+y=7. Šo vienādojumu apmierina šādi ciparu pāri: (0;7), (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1), (7;0). Tādējādi uzdevuma nosacījumus apmierina skaitļi: 79, 169, 259, 349, 439, 529, 619, 709.

1.6. Mēģināsim domino kauliņus nolikt tā, lai nekādi divi no tiem nepārklātu kvadrātu 2×2. Sāksim no kvadrāta kreisā augšējā stūra rūtiņas. To iespējams nosegt 2 veidos, aplūkosim tikai vienu, jo otrs ir analoģisks. Ik pēc viena domino kauliņa nolikšanas, apzīmēsim ar "*" to rūtiņu, kuru gribēsim pārklāt nākamajā reizē (83. a zīm.):



a b c d

83. zīm.

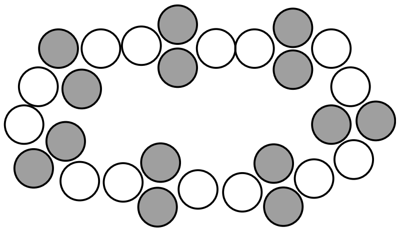
Kā redzams, lai pārklātu apzīmēto rūtiņu, vienmēr ir tikai viena iespēja. Tāpēc visa kvadrāta diagonāle tiks noklāta tādā pašā veidā (83. b, c zīm.). Lai nosegtu kvadrāta apakšējo labā stūra rūtiņu, domino kauliņš jāizvieto brīvajā vietā (83. d zīm.). Līdz ar to apakšējā stūrī divi domino kauliņi veidos kvadrātu 2×2, kas arī bija jāpierāda.

2. nodarbības atrisinājumi

2.1. Piemēram, 9163728.

Viegli saprast, ka skaitļa pierakstā nevar būt ne 0 (ar nulli dalīt nevar), ne 5 (ar 5 dalās skaitļi, kas beidzas ar 0 vai 5 – 0 izmantot nevaram, turpretī skaitlis, kas beidzas ar 5, nedalās ne ar vienu pāra ciparu). Tātad, ja astoņciparu skaitlis ar minēto īpašību eksistētu, tad tā decimālais pieraksts saturētu katru no cipariem 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 un 9. Ievērosim, ka skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9, taču 1+2+3+4+6+7+8+9=40, tātad astoņciparu skaitlis neeksistē.

2.2. Jā, piemēram, 84. zīm. attēlotais gredzens, tas var būt lielāks vai mazāks, atkarībā no monētu skaita.



84. zīm.

2.3. Apzīmēsim skaitļus ar $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{55}$. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 \\ x_2 + x_4 = x_3 \\ x_3 + x_5 = x_4 \\ \ldots \\ x_{54} + x_1 = x_{55} \\ x_{55} + x_2 = x_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Saskaitot 1. un 2. vienādojumu, 2. ar 3., 3. ar 4., 4. ar 5. iegūstam, ka ir tikai 6 atšķirīgi skaitļi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, turklāt $x_1+x_4=0$, $x_2+x_5=0$, $x_3+x_6=0$. Tas nozīmē, ka visu skaitļu summu varam uzrakstīt šādi

$$x_1+x_2+\ldots+x_{55}=(x_1+x_2+\ldots+x_6)\cdot 9+x_1=x_1=-x_4$$

Saskaitot visus sistēmas (1) vienādojumus, iegūstam

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{55}=x_1=-x_4=0$$

Tādā gadījumā no (1) 3. vienādojuma seko, ka $x_3+x_5=0$, no kurienes iegūstam

$$x_2+x_5=x_3+x_6=x_3+x_5=0 \text{ jeb } x_6=x_5=-x_2=-x_3$$

Bet no pēdējā vienādojuma, iegūstam $x_{55}+x_2=x_1 \Rightarrow 0+x_2=0 \Rightarrow x_2=x_3=-x_5=-x_6=0$, ko arī vajadzēja pierādīt.

2.4. Tā kā mazākā naudas vienība Smaragda pilsētā ir vērdiņš, var apgalvot, ka gan 1 krēga cena, gan viena terbera cena ir izsakāma ar veselu skaitu vērdiņu. Apzīmēsim krēga cenu ar k, bet terbera cenu – ar t, tādā gadījumā $125t<175k<126t$ jeb eksistē tāds pozitīvs vesels skaitlis $m<t$, ka $m=175k-125t=25(7k-5t)$. Skaidrs, ka arī starpība $7k-5t$ ir vesels pozitīvs skaitlis.

Ja $7k-5t\geq 2$, tad $7k\geq 2+5t$ jeb $m\geq 25(2+5t-5t)=50$. Tā kā $t>m$, tad $t>50$ un $7k>2+250$ jeb $k>36$. 3 krēgus Lauva nevarēs nopirkt, jo tie maksās vairāk nekā $3\cdot 36=108$ vērdiņus, bet Lauvam ir tikai 100 vērdiņi. Ja $7k-5t=1$, tad $k=(5t+1):7$, $m=25$ un $t>25$. Aplūkojot iespējamās t vērtības, iegūstam, ka mazākā no tām, kas derētu, ir $t=32$ ($k=23$). Šajā gadījumā Lauvas pirkums maksās $3k+t=3\cdot 23+32=101$ vērdiņu, kas pārsniedz Lauvas naudas daudzumu.

2.5. Pieņemsim, ka kaudzē katrs akmens ar katru ir savstarpēji sasiets ar valdziņu. Ja kaudzē ir n akmeņi, tad katram akmenim būs piestiprināti n-1 valdziņi. Ja kaudzi sadala 2 kaudzēs, vienā – m akmeņus, otrā – k akmeņus, tad pārtrūkst tie valdziņi, kas saista vienu kaudzi ar otru, un to skaits būs $m \cdot k$. Katru reizi, dalot kādu no kaudzēm 2 daļās, jāpieraksta kaudzēs atlikušo akmeņu skaita reizinājums. Kā jau redzējām, tas vienāds ar pārtrūkstošo valdziņu skaitu. Tā kā beigās ir kaudzes tikai ar 1 akmeni, tad visi valdziņi ir pārtrūkuši. Līdz ar to pierakstīto reizinājumu summai jāsakrīt ar valdziņu sākotnējo skaitu. Pie katra akmens sākumā bija piestiprināti 24 valdziņu gali. Galu kopējais skaits – $25 \cdot 24=300$. Katram valdziņam ir divi gali, tāpēc sākotnējais valdziņu skaits bija 600:2=300. Tātad neatkarīgi no valdziņu pārtrūkšanas kārtības, to kopējais skaits vienmēr būs 300, tāpēc arī reizinājumu summa vienmēr būs 300.

2.6. Apzīmēsim galvaspilsētu ar G, bet pilsētu, kas atrodas vistālāk no G, ar A. Novilksim riņķa līniju ar rādiusu $R=|GA|$. Visas citas pilsētas atradīsies riņķa iekšpusē. Pieņemsim, ka Sprīdītis dodas pēc kārtas uz pilsētām B_0, B_1, B_2, …, B_s, un no B_s atkal nokļūst galvaspilsētā G ($B_i \neq G$, $i=0, 1, \ldots, s$). Tā kā Sprīdītis visu laiku iet uz vistālāko pilsētu no savas atrašanās vietas, tad izpildās sekojošas nevienādības:

$$R=|GA|<|AB_0|\leq|B_0B_1|\leq|B_1B_2|\leq\ldots\leq|B_{s-1}B_s|\leq|B_sG|$$

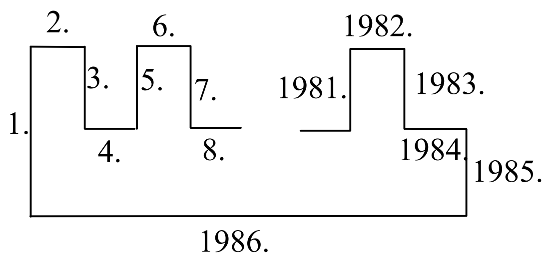
Salīdzinot abus malējos locekļus, iegūstam, ka

$$R=|GA|<|B_sG|$$

Tas ir iespējams tikai tad, ja pilsēta B_s atrodas ārpus mūsu novilktā riņķa, taču tas ir pretrunā ar pilsētas A izvēli, tātad pieņēmums, ka Sprīdītis var atgriezties galvaspilsētā, ir aplams. Līdz ar to uzdevumā prasītais ir pierādīts.

3. nodarbības atrisinājumi

3.1. Parādīsim vienu piemēru, kā uzzīmēt 1986-stūri ar 993 savstarpēji paralēlām malām 9skat. 85. zīm.).



85. zīm.

No 1 līdz 1986 ir 1986:2-993 pāra skaitļi. Tas nozīmē – arī savstarpēji paralēlo malu skaits ir 993.

Pierādīsim, ka 1986-stūri ar 994 savstarpēji paralēlām malām uzzīmēt nevar.

Sanumurēsim 1986-stūra malas pēc kārtas. Mums izveidojušies 933 pāri: 1. un 2. mala, 3. un 4. mala, 5. un 6. mala, ..., 1985. un 1986. mala. Ievērosim, ka 2 blakus malas nevar būt savstarpēji paralēlas, jo tad tās veidotu vienu malu. Pieņemsim, ka mūsu 1986-stūrī ir 994 savstarpēji paralēlas malas. Katra no tām ietilpst kādā pārī. Tā kā pāru skaits ir 993, bet paralēlo malu skaits 994, tad vismaz vienā pārī būs 2 paralēlas malas. Rodas pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir bijis aplams.

3.2. Ar A(n) apzīmēsim to veidu skaitu, kādos var salauzt tāfelīti ar izmēriem 2xn. Pirmo gabaliņu var nolauzt divos principiāli atšķirīgos veidos (skat. 86. zīm.).

86. zīm.

Pirmajā gadījumā būs jālauž tāfelīte ar izmēriem 2x(n-1), otrajā – 2x(n-2). Tā kā katra iespēja salauzt tāfelīti ir ieskaitāma tikai vienā no gadījumiem, tad iegūstam, ka

$$A(n)=A(n-1)+A(n-2)$$

Skaidrs, ka A(1)=1, bet A(2)=2, tātad A(3)=1+2=3, A(4)=2+3=5, A(5)=3+5=8, A(6)=5+8=13, A(7)=8+13=21, A(8)=21+13=34. Vadītāj rīcībā ir 34 nodarbības.

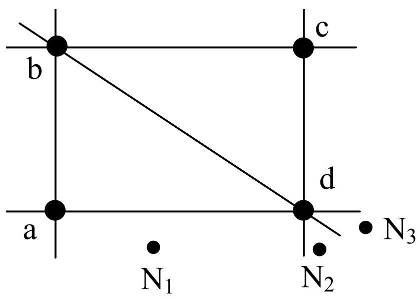
3.3. Skaidrs, ka nevar būt tā, ka labās (kreisās) kājas zābaku visās krāsās ir vairāk par 50. Tāpēc divās krāsās vairāk ir vienas kājas zābaku (pieņemsim, ka tās ir violetā un dzeltenā krāsa un labās kājas zābaki), bet vienā krāsā vairāk ir otras kājas zābaku. Tālāk iegūstam šādu 87. zīm. tabulu:

	Violeti	Dzelteni	Oranži
Labā	50+a	50+b	50-c
Kreisā	50-a	50-b	50+c

87. zīm.

Skaidrs, ka Trusītis var izveidot (50-a)+(50-b)+(50-c)=150-(a+b+c) zābaku pārus. Ja pierādīsim, ka $a+b+c\leq 100$, būsim ieguvuši prasīto. No (50+a)+(50+b)+(50-c)=150 iegūstam, ka a+b=c. Ja būtu spēkā a+b+c>100, tad 2c>100 jeb c>50. Tātad Trusītis būtu savācis negatīvu skaitu oranž zābaku, esam ieguvuši pretrunu, tātad Trusītis noteikti varēs izveidot vajadzīgos 50 zābaku pārus.

3.4. Ievērosim, ka n kokus principā varētu redzēt $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ dažādās secībās. Tātad 4 kokus var redzēt $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ dažādās secībās, bet 10 kokus $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=3\,628\,800$ dažādās secībās. Viegli saprast, ka 88. zīm. attēlotais koku izvietojums apmierina uzdevuma prasības. Punkti N_1, N_2, N_3 ir vērotāja iespējamās atrašanās vietas.



88. zīm.

Caur 10 punktiem var novilkt $10\cdot 9:2=45$ taisnes. Saskaitīsim cik apgabalos tās sadala plakni. Divas taisnes sadala plakni ne vairāk kā 4 apgabalos. Novelkot trešo taisni rodas ne vairāk kā 3 jauni apgabali, pretējā gadījumā 2 neparalēlām taisnēm būs vairāk kā 1 krustpunkts. Novelkot 4. taisni rodas ne vairāk kā 4 jauni apgabali utt. Pavisam būs 4+(3+4+5+…+44+45)=1036 apgabali. No viena punkta novērotājs var saredzēt 20 dažādas koku secības. Viegli saprast, ka pārvietojoties viena apgabala iekšienē, jaunas koku secības novērotājs ieraudzīt nevar. Tātad viņš var ieraudzīt $1038 \cdot 20 = 20\,720 < 3\,628\,800$. Tātad 10 kokus prasītajā veidā iestādīt nevar.

3.5. Prasīto var panākt ar sekojošiem rīkojumiem:

1) 789456123 $\rightarrow$ 789321654
2) 789321654 $\rightarrow$ 123987654
3) 123987654 $\rightarrow$ 123456789

3.6. Ievērosim, ka vienas dāmas apdraudēto lauciņu skaits ir atkarīgs no tās novietojuma. Vismazāk lauciņu dāma apdraud, ja atrodas stūrī vai pie malas (21 lauciņu). Ja dāma atrodas vienā no 4 centra lauciņiem, tā apdraud visvairāk lauciņu – 27.
Pieņemsim, ka eksistē kaut viena dāma D, kura neapdraud citas dāmas. Tas nozīmē, ka pārējās 43 dāmas atrodas uz lauciņiem, ko D neapdraud. Pavisam ir 64 lauciņi. Pat tad, ja dāma D novietota stūrī vai pie malas, pārējām dāmām atvēlēto lauciņu skaits (64-21-1) mazāks par 43. Tāpēc visas atlikušās 43 dāmas nevar izvietot tā, lai tās netiktu apdraudētas.

4. nodarbības atrisinājumi

4.1. Ieviesīsim sekojošus apzīmējumus $x=10x_1+x_2$, $y=10y_1+y_2$, kur x_1, x_2, y_1, y_2 ir cipari, turklāt x_1 un y_1 nav vienādi ar 0. Ja pieņemam, ka $y_1=x_1+x_2$, tad varam sastādīt sekojošu vienādojumu

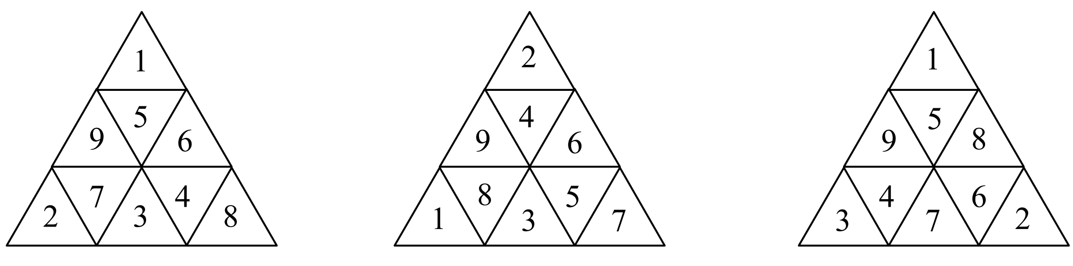
$$10x_1+x_2=2(10y_1+y_2)=20(x_1+x_2)+y_2$$
$$10x_1+19x_2+y_2=0$$

Tā kā x_1, x_2 un y_2 ir cipari, tad šāda vienādība nav iespējama, līdz ar to $y_2=x_1+x_2$.
Pieņemot, ka $y_1=x_1-x_2$ pēc pārveidojumiem iegūstam, ka $12x_1=19x_2$, nav tādu ciparu x_1 un x_2, kas apmierinātu šo vienādību, tātad $y_1=x_2-x_1$.

$$10x_1+x_2=20(x_2-x_1)+2(x_1+x_2)$$
$$21x_2=28x_1$$
$$3x_2=4x_1$$

Tā kā 4 ar 3 nedalās, tad x_1 var būt 3, 6 vai 9. Pārbaudot visas iespējas, iegūstam, ka Jānis bija iedomājies skaitļus 34 un 17.

4.2. Daži iespējamie varianti redzami 89. zīm.

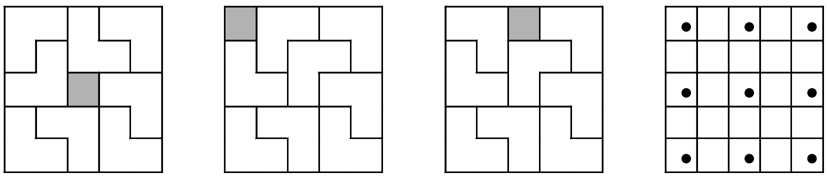


89. zīm.

4.3. Izvēlamies taisnstūrus ar izmēriem 1×1 un $2\times\frac{1}{2}$. Ja viens taisnstūris pārklāj otru, iespējami 2 gadījumi:

1) abi taisnstūri sakrīt,
2) viens pilnīgi ietilps otrā.
Viegli saprast, ka 2. gadījumā tā taisnstūra laukums, kurš pārsedz otru taisnstūri, ir lielāks. Mūsu izvēlētajiem taisnstūriem laukumi ir vienādi, tāpēc, lai varētu ar vienu pārsegt otru, tiem būtu jāsakrīt, bet tā nevar būt, jo malu garumi šiem taisnstūriem ir atšķirīgi.
10 taisnstūru gadījumā, līdzīgi kā iepriekšaprakstītajā situācijā, izvēlamies taisnstūrus ar izmēriem 1×1, $2\times\frac{1}{2}$, $3\times\frac{1}{3}$, $4\times\frac{1}{4}$, $5\times\frac{1}{5}$, $6\times\frac{1}{6}$, $7\times\frac{1}{7}$, $8\times\frac{1}{8}$, $9\times\frac{1}{9}$, $10\times\frac{1}{10}$. Visu taisnstūru laukumi ir vienādi, taču sakrist tie nevar, jo malu garumi ir atšķirīgi.

4.4. Atbilde ir atkarīga no tā, kura rūtiņa ir izgriezta. Stūrīšos kvadrātu iespējams sagriezt tikai 3 gadījumos:
a) ja izgriezta centra rūtiņa,
b) ja izgriezta stūra rūtiņa,
c) ja izgriezta pie malas pieguļošā vidējā rūtiņa.
Minētajiem trim gadījumiem atbilstošās rūtiņas apzīmētas 90. zīm. ar punktu.



90. zīm.
Pārējos gadījumos figūru stūrīšos sagriezt nav iespējams. Principiāli atšķirīgie izgrieztās rūtiņas novietojumi ir attēloti . zīm. Lasītājs pats var pārliecināties, ka nevienu no tiem nav iespējams sagriezt stūrīšos.

4.5. Tā kā visi attālumi ir dažādi, tad noteikti eksistē vismazākais attālums, pieņemsim, ka tas ir starp planētām P_1 un Q_1. Pēc uzdevuma nosacījumiem astronoms no P_1 vēro Q_1,bet astronoms no Q_1 vēro P_1. Ja kādu no šim planētām novērotu vēl kāds astronoms, tad vajadzīgais būtu pierādīts, tāpēc pieņemsim, ka tāda astronoma nav.
Atrodam mazāko attālumu starp atlikušajām 1985 planētām un apzīmējam attiecīgās planētas ar P_2 un Q_2. P_2 astronoms vēros Q_2, bet Q_2 astronoms vēros P_2 utt. Turpinot spriest šādi arī par planētām P_3, Q_3, P_4, Q_4, …, P_{993}, Q_{333}. Paliek viena planēta, kuru nenovēro neviens no iepriekš minēto 1986 planētu astronomiem. Tātad šo planētu nenovēro neviens.

4.6. Rīkosimies sekojoši. Pirmajā reizē uzpildīsim automašīnu ar benzīnu, kas paredzēts 100 km veikšanai. Iebrauksim tuksnesī 20 km, ierīkosim tur degvielas noliktavu ar degvielu, kas paredzēta 60 km veikšanai, un atgriezīsimies atpakaļ.
Otrajā reizē uzpildīsim automašīnu ar benzīnu, kas paredzēts 100 km veikšanai. Iebrauksim tuksnesī 20 km. Paņemsim no turienes degvielu 20 km veikšanai un iebrauksim tuksnesī tālāk vēl 40 km. Ierīkosim otru degvielas noliktavu ar degvielu 20 km veikšanai. Brauksim atpakaļ līdz 1. noliktavai. Paņemsim no turienes degvielu vēl 20 km veikšanai un izbrauksim malā.
Tagad tuksnesī 20 km un 60 km no malas atrodas degviela 20 km veikšanai.

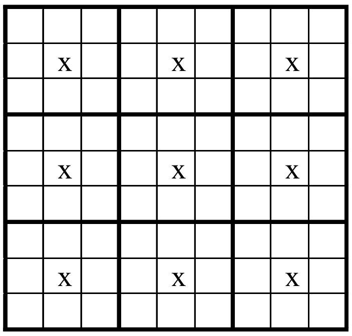
Trešajā reizē atkal uzpildīsim automašīnu ar benzīnu 100 km veikšanai. Iebraucam tuksnesī 40 km, ierīkosim tur trešo noliktavu ar degvielu 20 km veikšanai un brauksim atpakaļ.
Tādējādi pēc 3 reizēm mums tuksnesī ik pa 20 km ir ierīkotas 3 noliktavas, kurās katrā ir benzīns 20 km veikšanai.
Ceturtajā reizē uzpildām mašīnas tvertni pilnu. Braucam līdz 1. noliktavai, iztukšojam to pavisam, un braucam tālāk līdz 3. noliktavai. Kad tā ir iztukšota, braucam līdz 2. noliktavai un iztukšojam to. Šajā brīdī mašīnas tvertne ir pilna ar degvielu, t.i., tā var veikt 100 km. Tā kā 60 km jau ir nobraukti, tad mašīna spēs šķērsot tuksnesi.

5. nodarbības atrisinājumi

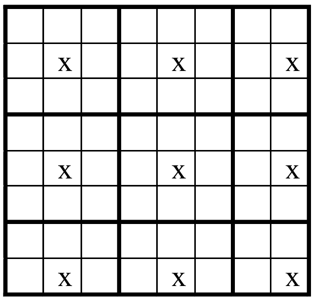
5.1. Parādīsim, ka B=1 vai $B=\underbrace{111...11}_{1987}=A$.

Apzīmējam skaitļa B vieninieku skaitu ar b. Dalīsim skaitli A ar B pēc parastajiem dalīšanas likumiem. Iegūsim ciparu 1, pēc tam b-1 nulles, tad atkal 1, tad atkal b-1 nulles utt. Lai A izdalītos ar B, t.i., A vieninieku skaitam jābūt izsmeltam tādā brīdī, kad dalījumā uzrakstām kārtējo 1. Tādā brīdī no A kreisās puses atšķelts vesels skaits grupu pa b vieniniekiem katrā. Tātad A ciparu skaitam 1987 jādalās ar b. Tā kā 1987 ir pirmskaitlis, tad vienīgās iespējamās b vērtības ir 1 un 1987.

5.2. Sadalīsim kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas 9 kvadrātiņos (91. zīm.). Katrā kvadrātiņā ar krustiņu atzīmētā rūtiņa pieskaras visām atlikušajām kvadrātiņa rūtiņām un nevienai citai. Katrai no šīm rūtiņām ir jābūt vai nu iekrāsotai, vai ir jāpieskaras kādai no iekrāsotajām rūtiņām, tātad iekrāsotām ir jābūt vismaz 9 rūtiņām (katrā kvadrātiņā pa vienai).



91. zīm.



92. zīm.

Aplūkosim kvadrātu 8×8 rūtiņas. Spriežot līdzīgi kā iepriekš par 92. zīm. atzīmētajām rūtiņām, secinām, ka ir jābūt iekrāsotām vismaz 9 rūtiņām.

5.3. Aplūkosim laika asi un atliksim uz tās intervālus $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_7, b_7]$ – laika sprīžus, ko katrs rūķītis pavadījis pie Sniegbaltītes.
Apskatīsim laika sprīdi [a, b], kur a – laika moments, kad atnāca pēdējais rūķītis, b – laika moments, kad aizgāja pirmais rūķītis.
Skaidrs, ka neviena intervāla sākumpunkts neatrodas pēc a saskaņā ar a izvēli. No nosacījuma, ka katri divi rūķīši kādu laika sprīdi pie Sniegbaltītes bija kopā, seko, ka vērības b_1, b_2, …, b_7 ir lielākas par a. Skaidrs, ka b_1, b_2, …, b_7 nav mazākas par b saskaņā ar b izvēli.

Tātad laika intervālā [a, b] visi rūķīši jau bija atnākuši un neviens vēl nebija aizgājis. Tātad šajā laikā viņi visi pie Sniegbaltītes bija kopā.

5.4. Pareizi spēlējot, vienmēr uzvarēs pirmais spēlētājs, tātad Andris.

Andrim jāspēlē sekojoši. Pirmajā gājienā jāsalauž šokolāde divās vienādās daļās. Pēc katra Jāņa lauziena, jāskatās, vai viņš nav nolauzis gabalu, kura platums vai garums ir 1. Ja tā, tad Andris nolauž gabaliņu 1×1 un iz uzvarējis. Ja nē, tad Andris izdara tādu pašu lauzienu kā Jānis, tikai šokolādes otrajā daļā. Ar katru lauzienu šokolādes gabaliņi kļūst mazāki. Tā kā Andris vienmēr atkārto Jāņa gājienu, tad Jānis būs spiests nolauzt gabaliņu, kura platums vai garums ir 1. Bet ar nākošo lauzienu Andris uzvarēs.

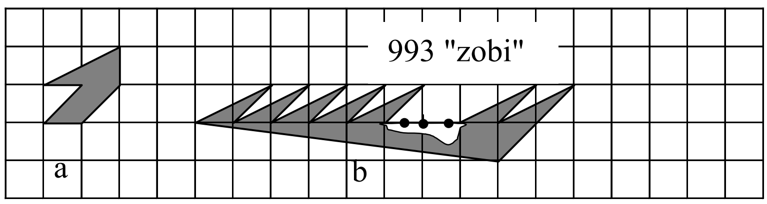
5.5. Viegli pārliecināties, ka skaitļiem $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7$ ir spēkā sekojoša vienādība

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_7+a_1a_2+\ldots+a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7=(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\ldots(a_7+1)-(a_1+\ldots+a_7)-1$$

Tātad dotās izteiksmes vērtība ir

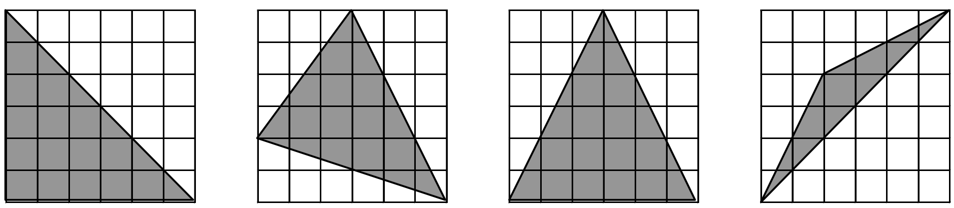
$$(1+1)(2+1)(3+1)(4+1)(5+1)(6+1)(7+1)-(1+2+\ldots+7)-1=40291$$

5.6. Sešstūris attēlots 93. a zīm., bet 1987-stūris – 93. b zīm.



93. zīm.

Patvaļīgu desmitstūri, kura virsotnes ir rūtiņu stūros, var sagriezt trijstūros tā, lai katra trijstūra virsotnes piederētu desmitstūra virsotnēm (izveidosies 8 trijstūri).
Iespējami četri varianti, tie attēloti 94. zīm. Ievērosim, ka katrs trijstūris ir ievietojams kāda lielāka taisnstūra iekšienē. Aprēķini parāda, ka jebkurā no šiem variantiem trijstūra nokrāsošanai nepieciešams vesels skaits gramu krāsas vai vesels skaits gramu un ½ g krāsas. Tā kā desmitstūris ir sadalīts 8 trijstūros, tad tā nokrāsošanai nepieciešami vismaz 8·½=4g krāsas.

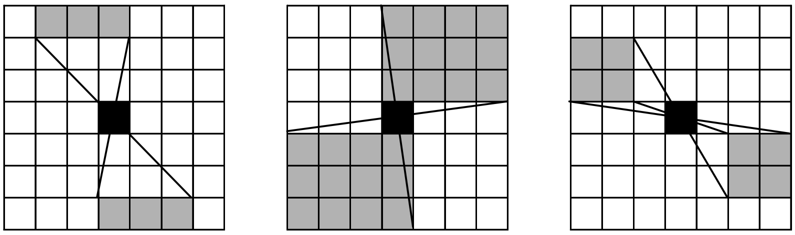


a b c d

94. zīm.

6. nodarbības atrisinājumi

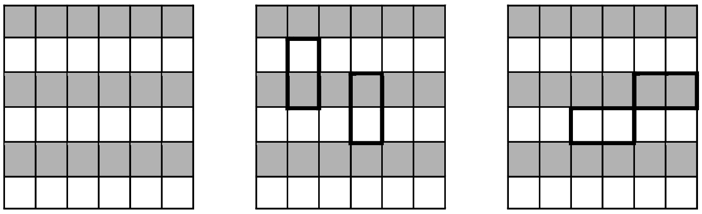
6.1. Katram taisnstūrim atbilst tieši viens pret centra rūtiņu tam simetrisks taisnstūris (skat. 95. zīm.). Tāpēc apskatāmo taisnstūru skaitam jābūt pāra skaitlim. Mārtiņa atbildē pēdējais uzrakstītais cipars bija "1".



95. zīm.

No tā var secināt, ka viņa izrēķinātais skaitlis bija nepāra. Tāpēc Andrim bija viegli ieraudzīt Mārtiņa kļūdu.

6.2. Iekrāsosim kvadrātu ar izmēriem 6×6, kā parādīts 96. zīm.



a b c

96. zīm.

Vispirms izvietosim 5 vertikālos kauliņus. Lai kur mēs katru no viņiem novietotu, vienmēr tiks noklātas divas blakus rindu rūtiņas, tātad viena melna, otra balta (96. b zīm.). Pēc piecu vertikālo kauliņu novietošanas būs noklātas 5 melna un 5 baltas rūtiņas, un atlikušas nenoklātas 13 melnas un 13 baltas rūtiņas. Ar vienu horizontālu kauliņu var noklāt vai nu 2 baltas, vai 2 melnas rūtiņas (96. c zīm.). Tā kā mums pēc vertikālo kauliņu novietošanas ir palikušas nenoklātas nepāra skaits baltu un nepāra skaits melnu rūtiņu, tad, skaidrs, ka tās ar horizontālajiem kauliņiem noklāt nevarēs.

6.3. Lai iegūtu citu iespēju izsacīt n prasītajā formā, skaitlim a jāpieskaita kaut kāds naturāls skaitlis x, bet no skaitļa b jāatņem kaut kāds naturāls skaitlis y. Varam uzrakstīt sekojošu vienādību $n=6a+5b=6(a+x)+5(b-y)$ jeb $6x=5y$. Tā kā 5 un 6 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $x=5m$, $y=6k$, kur m un k ir naturāli skaitļi. Apzīmēsim ar a_0 mazāko a vērtību un ar b_0 lielāko b vērtību, kas parādās izteiksmē $n=6a+5b$. Ja rakstīsim virknē a vērtības, tad redzēsim, ka tā ir augoša, bet tām atbilstošās b vērtības veidos dilstošu virkni. Tā kā b ir jābūt pozitīvam, tad b vērtību virkne ir galīga, turklāt tai jāsatur tieši 25 locekļi. Pati mazākā vērtība, kura drīkst parādīties šajā virknē ir 1, tāpēc $b_0=6\cdot24+1=145$, mazākā pieļaujamā a_0 vērtība ir 1, tāpēc mazākais skaitlis n ar minēto īpašību ir $n=6\cdot1+5\cdot145=731$.

6.4. Nē, nevar. Analizējot stūra rūtiņu blakusrūtiņu iespējamo izkrāsojumu un pēc tam apskatot ar krustiņiem atzīmētās rūtiņas, secinām, ka četras rūtiņas, kas pieskaras kvadrāta centrālajai rūtiņai ir vai nu visas iekrāsotas, vai nē.

	x		x	
	x		x	

97. zīm.

Tāpēc centrālajai rūtiņai iekrāsoto kaimiņu skaits ir 0 vai 4, kas ir pāra skaitlis.

6.5. Jā, x noteikti dalās ar 5. Tā kā x+y veido 11-ciparu skaitli, tad skaitļi x un y nesatur vairāk kā 10 ciparus. Skaitļu x un y pēdējo ciparu summa ir vai nu 0, vai 10. Ja tā ir nulle, tad x beidzas ar 0 un līdz ar to dalās ar 5. Ja tā ir 10, skaitļus x un y var izteikt sekojošā veidā x=$\overline{a_1 a_2 a_3 ... a_{10}}$ un y=$\overline{(9-a_1)(9-a_2)(9-a_3)...(10-a_{10})}$. Tā kā skaitļi x un y atšķiras tikai ar ciparu kārtību, tad abu skaitļu ciparu summas ir vienādas

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10}=9-a_1+9-a_2+9-a_3+\ldots+10-a_{10}$$

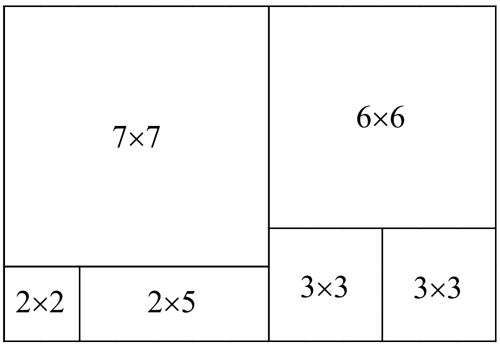
$$2(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10})=91$$

No tā, ka vienādības kreisā puse dalās ar 2, bet labā – nē, secinām, ka skaitļu x un y pēdējo ciparu summa nevar būt 10, tāpēc skaitlis x noteikti dalās ar 5.

6.6. Sadalīsim visas 100 monētas pa pāriem un katru pāri nosvērsim. Veidosim 2 kaudzes: vienā liksim katra pāra vieglāko monētu, bet otrā – smagāko. Tātad pēc 50 svēršanām būs izveidojusies vieglākā kaudze, kurā noteikti atradīsies pati vieglākā monēta, un smagākā kaudze, kurā atradīsies pati smagākā monēta.
Ņemsim 2 smagākās kaudzes monētas un nosvērsim. Vieglāko aizmetīsim prom, bet smagāko atstāsim uz svariem. Liksim uz svariem nākošo monētu no smagākās kaudzes utt. Tā rīkojas līdz brīdim, kamēr smagākajā kaudzē vairs nav nevienas monētas. Tā kā bija jāaizmet 49 monētas, tad ir notikušas vēl 49 svēršanas.
Līdzīgā veidā vieglākajā kaudzē ar 49 svēršanām atradīsim pašu vieglāko monētu.
Kopējais svēršanu skaits, kas bija nepieciešams, ir vienāds ar 50+49+49=148.

7. nodarbības atrisinājumi

7.1. Jā, var. Skat. 98. zīm.

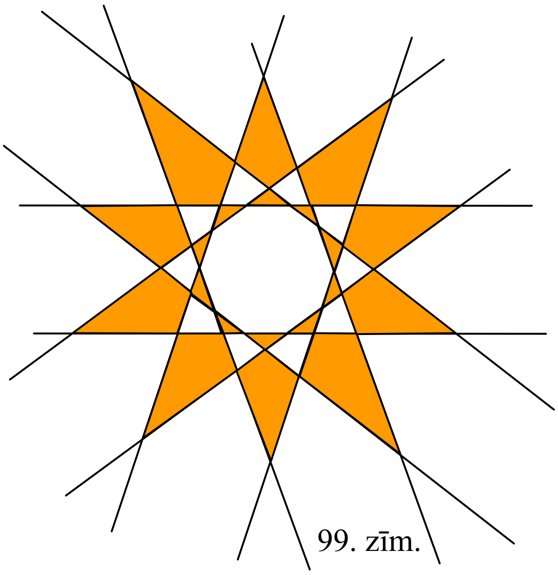


98. zīm.

7.2. Skaitli 1987 dalot ar a, ieguva atlikumu 9. Ja no 1987 šo atlikumu 9 atņem, tad iegūst pirmo par 1987 mazāko skaitli, kas dalās ar a bez atlikuma. Tas ir 1987-9=1978.

Tā kā 1978=2·23·43 un a ir skaitļa 1978 dalītājs, tad tas var būt vieninieks, pirmreizinātājs vai arī jebkura pirmreizinātāju kombinācija: a=1, a=2, a=23, a=43, a=2·23=46, a=2·43=86, a=2·23·43=1978.

7.3. Kā redzams 99. zīm., plakne ir sadalīta 51 apgabalā.

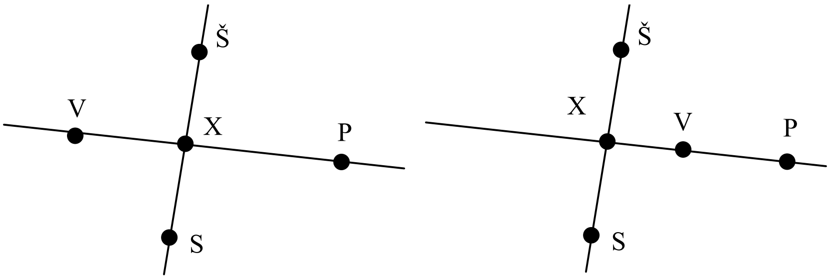


99. zīm.

izmantojot **3.4.** uzdevuma risinājumā lietotās metodes, lasītājs pats var pierādīt, ka n dalījuma punktu gadījumā daļu skaits ir $\frac{n(n+1)}{2}+1$, ja n ir nepāra skaitlis, un $\frac{n^2}{2}+1$, ja n ir pāra skaitlis.

7.4. Pieņemsim, ka mums ir izdevies atrast tādus pirmo, otro, piekto un sesto ciparus, kā prasīts uzdevumā. (Piemēram, 1, 3, 2, 2.) Trešā un ceturtā ciparu vietās var atrasties jebkuri no 10 cipariem, t. i., jebkurš ciparu pāris no 00 līdz 99. Šādu pāru ir 100.
Katram malējo **četru** ciparu aizpildījumam var būt 100 dažādi vidējo ciparu aizpildījumi, tāpēc
Kopējais meklēto skaitļu skaits=malējo ciparu aizpildījumu skaits·100
Tas arī nozīmē, ka meklēto skaitļu skaits dalās ar 100.

7.5. Apskatām 4 rūķīšus: 1 votivapu, 1 šillišallu, 1 puku un 1 sverri, šie četri punkti var atrasties vai nu izliekta, vai ieliekta četrstūra virsotnēs (skat. 100. zīm.)



100. zīm.

Pieņemsim pretējo – uz katras taisnes dzīvo ne vairāk kā divu dažādu dzimtu rūķīši. Punkts X pieder taisnei VP, tātad tajā nedrīkst dzīvot ne šillišalla, ne sverre, punkts X pieder arī taisnei ŠS, tātad tajā nevar dzīvot ne votovapa, ne puka, esam ieguvuši, ka punktā X nedzīvo neviens rūķītis, taču tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, tātad eksistē taisne, uz kuras dzīvo vismaz triju dažādu dzimtu rūķīši.

7.6. Jā, var. Apzīmēsim Garzobju karaļvalsts šahistus ar G_1, G_2, G_3, G_4 un Lielaušu karaļvalsts šahistus ar L_1, L_2, L_3, L_4. Izveidosim sekojošu tabulu (skat. 101. a zīm.).

	G_1	G_2	G_3	G_4
L_1	1	2	3	4
L_2	2	3	4	1
L_3	3	4	1	2
L_4	4	1	2	3

a

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
L_1	1	2	3	4	5	6
L_2	2	3	4	5	6	1
L_3	3	4	5	6	1	2
L_4	4	5	6	1	2	3
L_5	5	6	1	2	3	4
L_6	6	1	2	3	4	5

b

101. zīm.

Tabulas rūtiņās ierakstīti to dienu numuri, kad spēlē atbilstošie Garzobju un Lielaušu šahisti. Piemēram, L_2 ar G_1 spēlē 2. dienā, L_2 ar G_2 – 3. dienā, L_2 ar G_3 – 4. dienā un L_2 ar G_4 – 1. dienā. Lielaušu šahisti pāra dienās spēlē ar melnajiem kauliņiem, bet nepāra – ar baltajiem.

Sešu šahistu gadījumā risinājums ir līdzīgs (skat. 101. b zīm.).