"Profesora Cipariņa klubs" 1986./87. m.g.

1. nodarbība

1.1. Klasē ir 30 skolēni. Viņi norunāja cits citu apciemot. Viens skolēns vienā dienā var izdarīt vairākus apciemojumus. Katrs skolēns katru dienu var apciemot citus (un tad šajā dienā pie viņa neviens nenāk) vai arī sēdēt mājās (un tad citi var apciemot viņu).
Pierādīt, ka 10 dienās visi skolēni var apciemot cits citu.
Pierādīt, ka ar 4 dienām nepietiek, lai katrs skolēns apciemotu ikvienu citu.

1.2. Uz taisnes atzīmēti divi punkti A un B. Bez tam uz šīs taisnes atzīmēti vēl citi 45 punkti, no kuriem neviens neatrodas starp A un B. Vai var gadīties, ka attālumu summa no šiem 45 punktiem līdz A vienāda ar attālumu summu no šiem 45 punktiem līdz B?

1.3. Dota tabula, kas sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai šajā tabulā var ierakstīt skaitļus, starp kuriem neviens nav nulle, tā, lai katra kvadrāta stūra rūtiņās, kas sastāv no 2×2. 3×3 vai 4×4 rūtiņām, ierakstīto četru skaitļu summa būtu nulle?

1.4. Andris uzrakstījis uz tāfeles vienu otram blakus divus skaitļus 1 un 1. Jānis sāk rakstīt uz tāfeles nākamos skaitļus 2, 3, 7, 22, … pēc šāda likuma: katru nākamo skaitli iegūst, abu iepriekšējo reizinājumam pieskaitot 1. Andris apsolīja Jānim savu divriteni, tikko Jānis iegūs skaitli, kas dalās ar 4. Vai Jānim ir cerības saņemt dāvanu?

1.5. Cik starp veseliem skaitļiem no 1 līdz 1000 ir tādu, kuru ciparu summa ir divas reizes lielāka par nākamā veselā skaitļa ciparu summu?

1.6. Kvadrāts ar izmēriem 100×100 rūtiņas sastādīts no domino kauliņiem: katra kauliņa izmēri ir 1×2 rūtiņas. Pierādīt, ka noteikti kaut kur blakus atrodas divi kauliņi, kas kopā veido kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas.

2. nodarbība

2.1. Atrast kaut vienu tādu septiņciparu skaitli, kas dalās ar katru savu ciparu un kam visi cipari ir dažādi.
Vai eksistē kāds astoņciparu skaitlis ar tādu īpašību?

2.2. Vai uz galda virsmas var novietot vairākas pieckapeikas tā, lai katra no tām pieskartos tieši trim citām? (Pieckapeikas nedrīkst novietot "uz malas", tām jābūt vai nu ar cipariem, vai ar ģerboņiem uz augšu.)

2.3. Pa apli uzrakstīti 55 skaitļi. Katrs skaitlis ir vienāds ar abu blakus uzrakstīto skaitļu summu.
Pierādīt, ka visi uzrakstītie skaitļi ir nulles.

2.4. Smaragda pilsētā lieto divas naudas vienības: vērdiņus un dālderus, turklāt viens dālderis satur 100 vērdiņus. Šajā pilsētā pārdod divu veidu kūkas: krēgus un terberus. mazā Ella, ieradusies pilsētā, nopirka vienu krēgu, bet Putnubiedēklis – vienu terberu. Vēlāk draugi uzzināja, ka 175 krēgi maksā dārgāk nekā 125 terberi, bet lētāk nekā 126 terberi.
Lauvam ir viens dālderis. Viņš grib nopirkt trīs krēgus un vienu terberu. Pierādīt, ka Lauvam nepietiek naudas, lai to izdarītu.

2.5. kaudzē ir 25 akmeņi. Ar vienu gājienu šo kaudzi sadala divās kaudzēs. Pēc tam ar nākamo gājienu vienu no abām atkal sadala divās kaudzēs utt. Tā turpina tik ilgi, kamēr paliek 25 kaudzes pa 1 akmenim katrā.

Katrā dalīšanas reizē pieraksta abu jaunizveidoto kaudžu akmeņu skaitu reizinājumu. Pierādīt, ka neatkarīgi no tā, kā notiek dalīšana, tās beigās visu pierakstīto reizinājumu summa būs 300.

2.6. Princese Zeltīte, lai nebūtu jāiet pie Sprīdīša par sievu, izdomājusi viņam šādu uzdevumu. Vispirms Sprīdītim no galvaspilsētas jādodas uz to princeses valsts pilsētu, kas atrodas vistālāk no galvaspilsētas (apzīmēsim šo pilsētu ar A). Tālāk Sprīdītim no pilsētas A jādodas uz to pilsētu, kas atrodas vistālāk no A (apzīmēsim šo pilsētu ar B), utt., kamēr viņš atgriežas galvaspilsētā.
Pierādīt: ja B nav galvaspilsēta, tad Sprīdītis galvaspilsētā nekad neatgriezīsies.

3. nodarbība

3.1. Vai var uzzīmēt 1986-stūri, kuram 993 malas ir savstarpēji paralēlas? Bet vai var uzzīmēt 1986-stūri, kuram būtu 994 malas, kas visas savstarpēji paralēlas?

3.2. Kādā matemātikas pulciņā piedalās 8 skolēni. Pulciņa vadītājs katru reizi atnes sev līdzi šokolādes tāfelīti, kas sastāv no 2×8 kvadrātiņiem, un nodarbības beigās sadala tāfelīti bērniem tā, ka katrs dabū gabalu ar izmēriem 1×2 kvadrātiņi (nevis divus atsevišķus kvadrātiņus!). katrā nākamajā nodarbībā vadītājs cenšas salauzt tāfelīti 8 gabalos tā, kā iepriekš tā vēl nav lauzta. Cik nodarbībās viņš to varēs izdarīt?

3.3. Trusītis nolēma nodrošināt visus savus radus un draugus ar zābakiem un sāka vākt zābakus visur, kur pagadās. Kādu dienu viņš nolēma, ka vākts pietiekami, un sāka tos šķirot. Izrādījās, ka savācis 150 kreisās kājas zābaku un 150 labās kājas zābaku, turklāt 100 no tiem ir violeti, 100 – dzelteni un 100 – oranži.
Pierādīt, ka Trusītis no saviem savāktajiem zābakiem noteikti var izveidot vismaz 50 pāru tā, ka ikkatrā pārī ietilpst vienas krāsas zābaki, turklāt viens –labās un viens – kreisās kājas zābaks.

3.4. Uz matemātikas olimpiādi atbrauca skolēnu komandas no 4 valstīm. Jaunizveidotajā parkā katrai komandai jāiestāda pa kokam. Vai to var izdarīt tā, lai pēc tam, kad koki izaugs, būtu iespējams tos no dažādām vietām redzēt jebkurā secībā? Vai to varētu izdarīt, ja būtu 10 komandas?

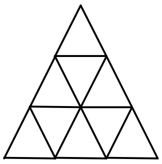
3.5. Komandā ir 4 sportisti ar numuriem no 1 līdz 9. Uz rīta rosmi visi nostājušies šādā secībā: 7; 8; 9; 4; 5; 6; 1; 2; 3.
Treneris var izvēlēties dažus pēc kārtas stāvošus sportistus (vienalga, cik) un likt viņiem nostāties pretējā secībā.
Pierādīt, ka ar 3 šādiem rīkojumiem var panākt, lai sportisti stāvētu numuru pieaugošā kārtībā.

3.6. Uz šaha galdiņa novietotas 44 dāmas. Pierādīt, ka ikkatra no tām apdraud vismaz vienu citu.

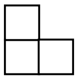
4. nodarbība

4.1. Jānis iedomājies divus divciparu skaitļus x un y. Skaitlis x ir divas reizes lielāks nekā skaitlis y. viens no y cipariem ir skaitļa x ciparu starpība, bet otrs – x ciparu summa. Kādus skaitļus iedomājies Jānis?

4.2. Ierakstīt 12. zīm. redzamajā figūrā katrā mazajā trijstūrītī no 1 līdz 9 (katrā citu) tā, lai katrā trijstūrītī, kas sastāv no 4 mazajiem trijstūrīšiem, ciparu summa būtu viena un tā pati.



12.zīm.



13. zīm.

4.3. Vai var izgriezt no papīra 2 tādus taisnstūrus, ka ne ar vienu no tiem nevar pārsegt otru? Bet vai var izgriezt 10 tādus taisnstūrus, ka ne ar vienu no tiem nevar pārsegt nevienu citu?

4.4. Kvadrāts sadalīts 5×5 vienādās rūtiņās. Viena no tām izgriezta. Vai atlikumu var sagriezt astoņos stūrīšos, kādi parādīt 13. zīm.? (Stūrīši drīkst būt novietoti arī citādi.)

4.5. Ap zvaigzni Tirru riņķo 1987 planētas. Visi attālumi starp tām ir dažādi. Uz katras planētas dzīvo viens astronoms. Katrs astronoms novēro tikai savai planētai vistuvāko planētu.
Pierādīt, ka noteikti ir tāda planēta, kuru nenovēro neviens astronoms.

4.6. Tuksneša platums ir 160 km. Tā malā atrodas automašīna, kurā vienlaikus var iepildīt degvielu 100 km veikšanai, kā arī tvertne ar degvielu, kuras pietiek, lai veiktu 400 km lielu attālumu. Kā ar šo mašīnu var šķērsot tuksnesi? Atļauts tuksnesī ierīkot degvielas noliktavas. Pārvadāt mašīnā citu degvielu, izņemot to, kas tajā iepildīta, nedrīkst.

5. nodarbība

5.1. Skaitlis A sastāv no 1987 vieniniekiem. Tas dalās ar skaitli B, kas arī sastāv no vieniniekiem. Kāds var būt B?

5.2. Kvadrāts sastāv no 9×9 rūtiņām. Tajā iekrāso dažas rūtiņas tā, lai katrai neiekrāsotajai rūtiņai būtu kopīga mala vai kopīga virsotne ar kādu jau iekrāsotu rūtiņu. Kādu mazāko rūtiņu skaitu var iekrāsot, lai to panāktu? Kāda būtu atbilde, ja kvadrāta izmēri būtu 8×8 rūtiņas?

5.3. Vecgada vakarā katrs no septiņiem rūķīšiem iegriezās pie Sniegbaltītes, kādu laiku paciemojās un aizgāja. Ir zināms, ka jebkuri divi no rūķīšiem kādu brīdi bija pie Sniegbaltītes reizē. Pierādīt, ka bija tāds brīdis, kad visi 7 rūķīši reizē bija pie Sniegbaltītes.

5.4. Šokolāde sastāv no 6×10 kvadrātiņiem, kurus citu no cita atdala padziļinājums. Šokolādi var lauzt pa šiem padziļinājumiem, turklāt katru lauzumu izdara no laužamā gabala vienas malas līdz otrai. Andris salauž šokolādi divās daļās. Pēc tam Jānis vienu no šim abām daļām salauž divās daļās. Tad Andris vienu no trim daļām, kas radušās, salauž divās daļās utt. Spēle beidzas tajā brīdī, kad no kārtējās laušanas radies viens atsevišķs kvadrātiņš. Tas, kas izdarījis šo laušanu, ir uzvarējis. Kas uzvar, pareizi spēlējot, – Jānis vai Andris?

5.5. Apskata veselus pozitīvus skaitļus no 1 līdz 7. Izveido visus iespējamos šo skaitļu reizinājumus ar 2, ar 3, ar 4, ar 5, ar 6 un ar 7 reizinātājiem (katrā reizinājumā visi reizinātāji ir dažādi). Atrast visu izveidoto reizinājumu summu.
Paskaidrojums. Līdzīgā uzdevumā, kurā būtu doti skaitļi no 1 līdz 4, būtu jāaprēķina summa

$$1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+2\cdot3+2\cdot4+3\cdot4+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot4+1\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4+1\cdot2\cdot3\cdot4.$$

5.6. Apskata rūtiņu papīra lapu; tās izmēru var izvēlēties pēc patikas. Lai nokrāsotu vienu rūtiņu, jāpatērē 1g krāsas.
Uzzīmēt sešstūri, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu stūros un kuru var nokrāsot ar 2g krāsas.

Vai var uzzīmēt 1987-stūri, kuram visas virsotnes atrodas rūtiņu stūros un kuru var nokrāsot ar 1000g krāsas?
Vai var uzzīmēt 10-stūri, kuram visas virsotnes atrodas rūtiņu stūros un kuru var nokrāsot ar 3g krāsas?

6. nodarbība

6.1. Kvadrāts sastāv no 1987×1987 rūtiņām. Vidējā rūtiņa ir melna, pārējās – baltas. Skolotāja palūdza matemātikas pulciņa dalībniekus aprēķināt, cik ir tādu taisnstūru, kam malas iet pa rūtiņu līnijām un kas nesatur melno rūtiņu.
Uz brīdi izgājis no klases, Andris atgriezies uz tāfeles ieraudzīja Mārtiņa uzrakstītās atbildes trīs pēdējos ciparus (pirmie bija nodzēsti): …271.
"Tavā risinājumā ir kļūda!" Andris paziņoja. Kā viņš to zināja?

6.2. Vai kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas var pārklāt ar 18 domino kauliņiem (katrs kauliņš pārklāj tieši divas rūtiņas) tā, lai 13 kauliņi atrastos horizontāli, bet 5 – vertikāli?

6.3. Atrast mazāko veselo pozitīvo skaitli n, kuru tieši 25 veidos var izteikt kā $n=6a+5b$, kur a un b – jebkuri pozitīvi veseli skaitļi.

6.4. Vai kvadrātā ar izmēriem 5×5 rūtiņas var daļu no tām iekrāsot tā, lai katrai rūtiņai būtu iekrāsots nepāra skaits kaimiņu? Divas rūtiņas sauc par kaimiņiem, ja tām ir kopīga mala.

6.5. Naturālajā skaitlī x pārlika ciparus citā kārtībā un ieguva skaitli y. Ir zināms, ka $x+y=10\ 000\ 000\ 000$. Vai x noteikti dalās ar 5?

6.6. Dotas 100 pēc ārējā izskata vienādas monētas, kurām visām ir atšķirīgas masas, un sviras svari bez atsvariem.
Pierādīt, ka ar 148 svēršanu palīdzību var atrast gan pašu smagāko, gan pašu vieglāko monētu.

7. nodarbība

7.1. Vai taisnstūri ar izmēriem 9×13 var sagriezt tā, lai izveidotos divi kvadrāti ar izmēriem 3×3, viens kvadrāts ar izmēriem 2×2, viens kvadrāts ar izmēriem 6×6, viens kvadrāts ar izmēriem 7×7 un viens – ar izmēriem 2×5?

7.2. Skaitli 1987 dalot ar a, atlikumā ieguva 9. Kāds var būt a?

7.3. Punkti A_1, A_2, …, A_{10} izvietoti uz riņķa līnijas šādā kārtībā un sadala to10 vienādās daļās. Novilktas 10 taisnes: caur A_1 un A_2, caur A_2 un A_3, …, caur A_9 un A_{10}, caur A_{10} un A_1. Cik daļās šīs taisnes sadala plakni? Kāda būtu atbilde, ja sākumā būtu izvietoti 1987 punkti?

7.4. Jānis saskaitīja, cik ir tādu sešciparu skaitļu, kam divu pirmo ciparu summa vienāda ar divu pēdējo ciparu summu. Pierādīt: ka Jānis nekļūdījās, tad rezultātam jādalās ar 100.

7.5. Katrā plaknes punktā dzīvo pa vienam rūķītim. Visi rūķīši ir no 4 dzimtām: votivapas, šillišallas, pukas un sverres. Turklāt ir vismaz pa vienam rūķītim no katras dzimtas.
Pierādīt, ka plaknē var novilkt tādi taisni, uz kuras dzīvo vismaz triju dažādu dzimtu rūķīši.

7.6. Garzobju karaļvalsts un Lielaušu karaļvalsts šahisti norunāja rīkot sacensības. No katras karaļvalsts sacensībās jāpiedalās četriem šahistiem, uz katram jāspēlē ar visiem četriem pretinieku komandas pārstāvjiem. Turklāt sacensībām jābeidzas 4 dienās un katru dienu katrs šahists drīkst spēlēt tikai vienu partiju.

Vai var saplānot partijas tā, lai katrs no astoņiem šahistiem divas partijas spēlētu ar baltajām, bet divas – ar melnajām figūrām?
Vai līdzīgu uzdevumu var atrisināt, ja katrā komandā būtu pa 6 šahistiem?