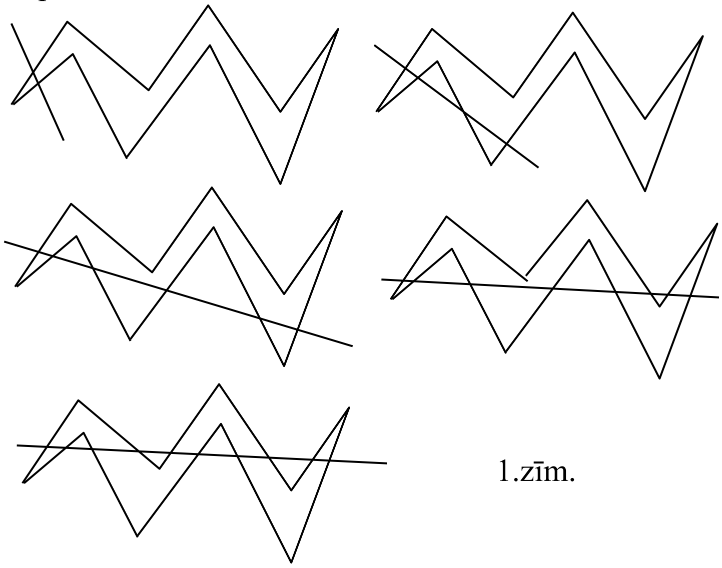
"Profesora Cipariņa klubs" 1987./88. m.g.

1. nodarbības atrisinājumi

1.1. Acīmredzami, ka taisne, krustojot desmitstūri, to sadala vismaz 2 daļās. Ievērojot to, ka taisne desmitstūri var krustot ne vairāk kā desmit punktos, tad var rasties ne vairāk 10:2=5 jauni nogriežņi, kuri var radīt jaunas daļas. Tātad lielākais daļu skaits ir 1+5=6. 1. zīm. parādīts, kā taisne var sadalīt desmitstūri 2, 3, 4, 5 un 6 daļās.



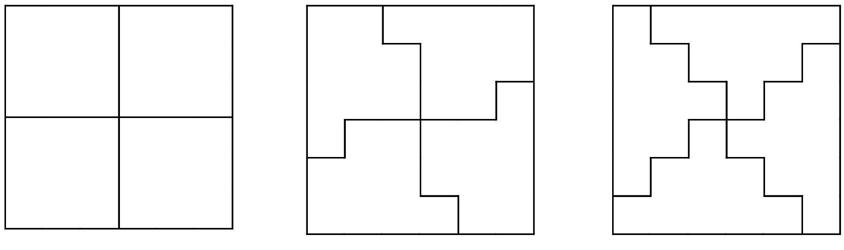
1.zīm.

1.2. Lai skaitlis dalītos ar 12, tam jādalās gan ar 3, gan ar 4.

Izmantojot dalāmības pazīmi ar 3 un ievērojot uzdevuma prasības, secinām, ka meklējamam skaitlim jāsatur vismaz 3 vieninieki. Savukārt, lai skaitlis dalītos ar 4, tā pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim arī jādalās ar 4. Vienīgā iespēja, kā mūsu uzdevumā apmierināt šo prasību – pēdējie divi cipari ir 00.

Ievērojot visu iepriekšējo, secinām, ka mazākais naturālais skaitlis, kas sastāv no 0 un 1 un dalās ar 12, ir 11100.

1.3. Lūk, daži atrisinājumi! (Skat. 2. zīm.)



2. zīm.

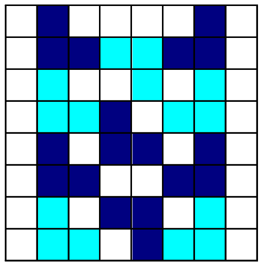
1.4. Starp jebkuriem trijiem naturāliem skaitļiem a, b un c ir vai nu a) vismaz divi pāra skaitļi, vai arī b) vismaz divi nepāra skaitļi.

a) Pieņemsim, ka aun b ir pāra skaitļi. Tad reizinājumā (a+3b)(b+3c)(c+3a) reizinātājs (a+3b) ir pāra skaitlis, līdz ar to arī viss reizinājums ir pāra skaitlis un tas nevar būt vienāds ar 1987.

b) Pieņemsim, ka aun b ir nepāra skaitļi. Tad (a+3b)(b+3c)(c+3a) reizinātājs (a+3b) atkal ir pāra skaitlis, līdz ar to viss reizinājums ir pāra skaitlis.

Tātad nevar atrast tādus naturālus skaitļus a, b un c, lai izpildītos vienādība (a+3b)(b+3c)(c+3a)=1987.

1.5. Atrisinājumu skat. 3.zīm.

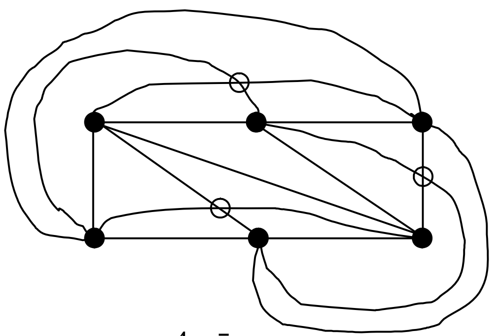


3. zīm.

1.6. Apskatīsim, kurš vai kuri no saskaitāmo 123, 456, 789 vienu cipariem 3, 6, 9 būtu jāizvieto ar 0, lai saskaitot visus trīs skaitļus, summā būtu pieci vieni. Vienīgā iespēja ir 3 vietā rakstīt 0: tad 6+9=15.
Lai summas desmitos iegūtu 8, mums jānoskaidro, kurus desmitu ciparu summa beidzas ar ciparu 7. Redzam, ka vienīgā iespēja ir 2+5=7, tātad cipars 8 ir jāaizstāj ar 0.
Un visbeidzot, kuru simtu ciparu summa ir 11, iespēja, atkal, ir tikai viena: 4+7=11, tātad ciparu 1 ir jāaizstāj ar 0. Līdz ar to vienīgā 20+456+709=1185 ir vienīgā iespēja.

1.7. No 1. zīm. dotās tabulas iegūt 2. zīm. doto tabulu var sekojošā veidā: pirmās rindiņas skaitļiem 9 reizes pieskaita pa vieniniekam, no pirmās kolonnas skaitļiem 9 reizes atņemam pa vieniniekam, 2. rindiņas skaitļiem 6 reizes skaitām klāt 1, no otrās kolonnas skaitļiem, attiecīgi, 6 reizes atņemam pa vieniniekam. Visbeidzot trešās rindiņas skaitļus 3 reizes palielinām par 1, bet 3. kolonnas skaitļus – 3 reizes samazinām par 1.
Pierādīsim, ka 3. zīm. tabulu iegūt nav iespējams. Ievērosim, ka, pieskaitot visām vienas rindas rūtiņām 1, vai atņemot no visām vienas kolonnas rūtiņām 1, visu tabulā ierakstīto skaitļu summa mainās par 4. Tātad, vairakkārt izdarot atļautos pārveidojumus ar doto tabulu, jauniegūtās tabulas skaitļu summa no sākotnējās tabulas skaitļu summas varētu atšķirties tikai par skaitļa 4 daudzkārtni. Bet 1. zīm. tabulas skaitļu summa no 3. zīm. tabulas skaitļu summas atšķiras par 3.

1.8. Atrisinājumu skat. 4. zīm. Šeit aizkrāsotie aplīši apzīmē pilsētas, līnijas, kas tos savieno – ceļus, bet ar neaizkrāsotajiem aplīšiem apzīmēti ceļu krustojumi.

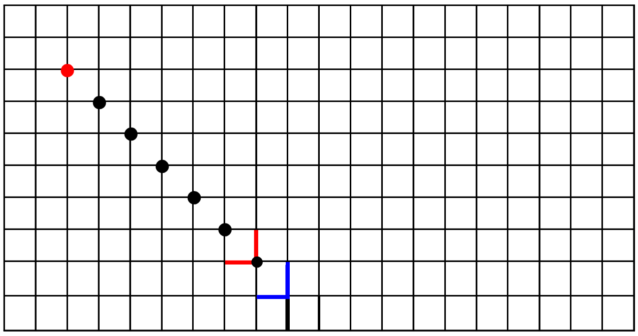


4. zīm.

1.9. Bērni stāv sekojošā secībā (iekavās norādīts, cik konfekšu ir katram bērnam): Aivars (4), Juris (10), Jānis (8), Valdis (6), Andris (7).

1.10. Ja ciparu virknīte drīkst sākties ar nulli, tad pavisam ir $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ dažādas trīs ciparu virknītes, tātad, ja Nezinītis iegādāsies 1001 biļeti pēc kārtas, to vidū noteikti būs divas laimīgas biļetes.

1.11. Pareizi spēlējot, uzvar 1. spēlētājs, viņa stratēģija ir sākt griešanu punktā A un censties nokļūt ar punktiem atzīmētajās rūtiņu virsotnēs (skat. 5. zīm.).



5. zīm.

Ja otrs spēlētājs nevēlas zaudēt, tad viņam obligāti jāizdara grieziens pa kādu no zilajām līnijām, taču, lai kuru no šiem griezumiem būtu izvēlējies otrais spēlētājs, pirmais noteikti spēs izdarīt griezumu līdz tuvākajam punktam. Ar savu otro gājienu otrajam spēlētājam jāgriež pa kādu no sarkanajām līnijām un atkal, neatkarīgi no viņa izvēles, pirmais spēlētājs spēs izdarīt griezumu līdz tuvākajam punktam, tātad šis spēlētājs spēs nokļūt līdz sarkanajam punktam, skaidrs, ka pēc šī griezuma, neatkarīgi no otrā spēlētāja gājiena, pirmais spēlētājs uzvarēs.

1.12. Apzīmēsim Sprīdītim piederošo dilleru skaitu ar x, bet dalleru skaitu ar y, un pavērosim, kā, Sprīdītim ceļojot, mainās starpība x-y.

Iedomāsimies, ka Sprīdītis aizbrauc uz Dilliju, kur m dillerus samaina pret 10m dalleriem. Tātad šajā brīdī Sprīdītim ir x-m dilleri un y+10m dalleri. Tagad starpība ir x-m-y-10m=x-y-11m. Tātad sākotnējā starpība x-y ir mainījusies par skaitļa 11 daudzkārtni. Sprīdītim braucot uz Dalliju, notiks tas pats, starpība izmainīsies par 11 daudzkārtni.

Šo maiņu rezultātā starpībai starp Sprīdītim piederošo dilleru un dalleru skaitu vajadzētu kļūt 0)vienāds dilleru un dalleru skaits). Šādu darbošanos apraksta vienādojums 1+11k-11m=0 kur k, m – naturāli skaitļi. No šejienes iegūstam, ka $k-m=\frac{1}{11}$, skaidrs, ka šāda vienādība nav iespējama, tātad, lai arī kā Sprīdītis nebraukātu no Dillijas uz Dalliju, viņam nekad nebūs vienāds dilleru un dallerru skaits.

2. nodarbības atrisinājumi

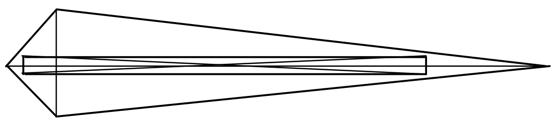
2.1. Teikums "k "olminūtes" nepieciešamas, lai novārītu n olas" nozīmēs, ka mums nepieciešamas k minūtes laika, lai novārītu n olas, izmantojot katliņu, kurā vienlaicīgi var vārīties tieši viena ola. Šajā gadījumā nepieciešamais "olminūšu" skaits ir $4 \cdot 3+7 \cdot 5=47$ "olminūtes". Tā kā katliņā vienlaicīgi var vārīties ne vairāk kā 3 olas, tad īsākais laika sprīdis, lai novārītu visas olas, kā prasīts uzdevumā, ir 16 minūtes. Izmantojot tabulu (skat. 6. zīm.), parādīsim, ka Vita tiešām var izpildīt uzdevuma prasību 16 minūtēs. Mīksti novārāmās olas apzīmēsim ar cipariem 1, 2, 3, 4; cieti novārāmās – ar **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**.

Laiks	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
1. vieta katliņā	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	
2. vieta katliņā	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	1	1	1	2	2	2
3. vieta katliņā	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	3	3	3	4	4	4

6. zīm.

2.2. Nē, nebūs. Tā kā katra nākamā virknes locekļa priekšpēdējo ciparu nosaka iepriekšējā pēdējie divi cipari, tad rakstīsim virknē tikai tos. Virkne izskatīsies šādi:
27; 81; 43; 29; 87; 61; 83; 49; 47; 41; 23; 69; 07; 21; 63; 89; 67; 01; 03; 09; **27**
Tā kā katra nākamā virknes locekļa iegūšanai aizvien tiek izmantota viena un tā pati darbība, tad, skaidrs, ka pēc 27 atkal sekos 81, tad 43 utt. Skaidri redzams, ka uzrakstīto virknes locekļu vidū nav tāda, kam priekšpēdējais cipars būtu nepāra.

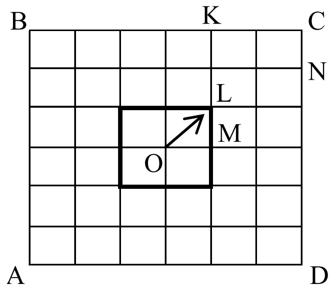
2.3. Uzdevuma prasībām atbilstoši četrstūri attēloti 7. zīm. To raksturīgākā īpašība: tie ir ļoti gari un šauri. Līdz ar to gandrīz visu ārējā četrstūra diagonāļu summu sastāda viena garā diagonāle. Īsā diagonāle veido ļoti nenozīmīgu summas daļu.



7. zīm.

Savukārt iekšējā četrstūra taisnstūra abas diagonāles ir gandrīz tikpat garas kā ārējā četrstūra garākā diagonāle. Līdz ar to iekšējā četrstūra diagonāļu summa ir lielāka nekā ārējā četrstūra diagonāļu summa.

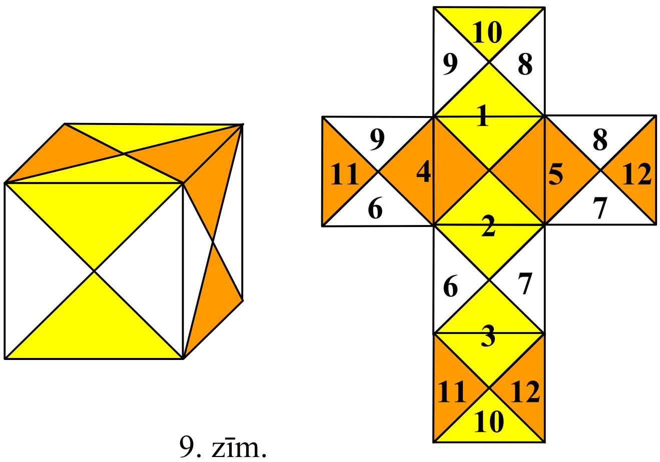
2.4. Jānis var aizbēgt no Andra. Domās sadalīsim baseina virsmu 6x6 vienādos kvadrātiņos (skat. 8. zīm.). Jānis peld kvadrāta centrā O, bet Andris stāv punktā A. Lai kur Andris skrietu, Jānis peld uz punktu L. Tā kā $AB=3(OM+ML)>3OL$, tad Jānis punktā L nokļūs ātrāk nekā Andris nokļūs punktā B vai D. Ja Andris atrodas pie malas AB, tad Jānis peld uz K un nokļūs tur pirms Andra, jo $3LK<BC+CK$. Attiecīgi, ja Andris ir pie malas AD, Jānis peld uz N. Nokļuvis uz sauszemes, Jānis no Andra aizbēgs.



8. zīm.

2.5. Tā kā ir desmit atšķirīgas matu un, attiecīgi, acu krāsas, tad Ziedu pilsētā varētu atrast 10·10=100 cilvēkus, kam matu vai acu krāsa nesakrīt, tātad, ja Nezinītim ir 100 draugu, tad šādu apgalvojumu izteikt nevar.
Iedomāsimies, ka Ziedu pilsētā ir 100 mājiņas, katrā no tām mīt cilvēki ar vienādu matu un acu krāsu. Ja Nezinītim ir 101 draugs, tad noteikti atradīsies mājiņa, kurā būs vismaz 2 iemītnieki.

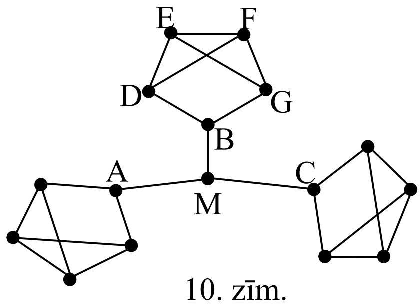
2.6. Kā to izdarīt, skat. 9. zīm.



9. zīm.

2.7. Pieņemsim, ka uzvar tas, kurš iegūst skaitli k. Izanalizēsim, kas notiek, ja k ir nepāra skaitlis, k=2n+1, un mēs savā iepriekšējā gājienā nosaucam n. Tad lielākais skaitlis, kādu var nosaukt pretinieks, ir 2n-1, t.i., ar šo gājienu viņš nevar uzvarēt.
Bet varbūt viņš var panākt, lai mēs ar savu nākošo gājienu vēl neuzvarētu? Nē, nevar. Pat ja viņš skaitli n palielina tikai par 1, jau tad viņa iegūtais skaitlis ir n+1 un mēs palielinot to par n, varam iegūt k=2n+1.
Līdzīgi, ja k ir pāra skaitlis, k=2n, tad, nosaucot n, mēs panāksim savu uzvaru.
Ņemot vērā visu iepriekš secināto, uzvaroša stratēģija ir sekojoša:
$3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 62 \to 124 \to 248 \to 496 \to 993 \to 1987$.
Redzam, ka gadījumā, ja pirmais spēlētājs nosauc skaitli 3 (starp citu, tā ir viņa vienīgā iespēja), tad neatkarīgi no tā, ko nosauc otrais spēlētājs, pirmais var iegūt skaitli 7 utt., līdz pat 1987, līdz uzvarai.

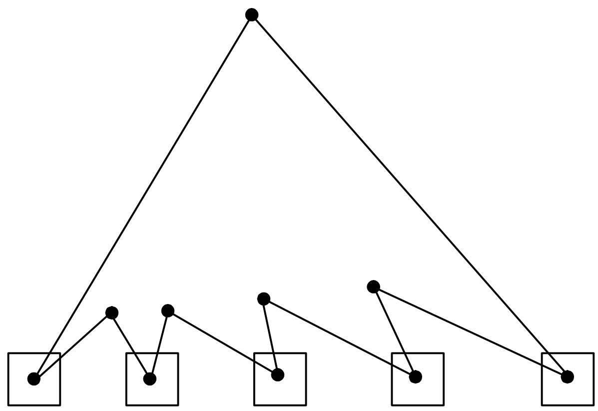
2.8. Ne vienmēr. Piemēram, skolēni var draudzēties tā, kā tas ir parādīts 10. zīm. Punkti apzīmē skolēnus, bet līnijas – draudzību to starpā (ja A draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar A).



10. zīm.

Skolēnam M ir jāsēž vai nu ar A, vai ar B, vai ar C. Pieņemsim, ka M sēž vienā solā ar A. Tad skolēnus no grupas B, D, E, F, G var sēdināt solos tikai kopā ar šīs pašas grupas skolēniem, bet nepāra skaitu skolēnu nav iespējams sasēdināt solos pa pāriem.

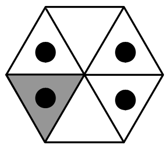
2.9. 11. zīm. parādīts uzdevuma nosacījumiem atbilstos ezers. Pieci ciemi, no katra no kuriem nevar redzēt nevienu citu ciemu, atzīmēti ar kvadrātiņiem.



11. zīm.

2.10. **Atbilde:** 128 vieninieki. Iesakām lasītājam tabulā skaitļus aizvietot ar to atlikumiem, kas rodas, dalot ar 2.

2.11. Pieņemsim, ka melnā krāsā nokrāsots kāds no mazajiem trijstūrīšiem, kas nav stūra trijstūrītis. Apskatīsim kādu no regulārajiem sešstūriem, kurā ietilpst melnais trijstūrītis (skat. 12. zīm.). Paskaitīsim kā var mainīties melno trijstūrīšu skaits starp četriem ar punktiņiem atzīmētajiem trijstūrīšiem krāsošanas procesā.



12. zīm.

Ja abi trijstūrīši, kuru krāsu mainīsim uz pretējo, ir balti, tad pēc krāsas maiņas četros apskatāmajos trijstūrīšos melno trijstūrīšu skaits **palielināsies par 2**. Ja tie ir melni, tad melno trijstūrīšu skaits **samazināsies par 2**. Bet, ja viens ir balts, otrs – melns, tad melno trijstūrīšu skaits **nemainās**. Tātad, lai kā arī mēs nepārkrāsotu trijstūrīšus, to skaits starp minētajiem četriem trijstūrīšiem var mainīties tikai par pāra skaitli, taču sākumā mums bija nepāra skaits melno trijstūrīšu –1.

2.12. Sanumurēsim grozus. Ar g_i apzīmēsim i-tajā grozā esošo ābolu skaitu, pie tam grozus sanumurēsim tā, lai $g_1 \geq g_2 \geq \ldots \geq g_n$. Pieņemsim pretējo. Tādā gadījumā $g_1 \leq 99$, citādi varētu panākt, ka vienā grozā ir tieši 100 ābolu. $g_2 \leq 49$, pretējā gadījumā katrā no groziem g_1 un g_2 ir vismaz 50 ābolu un, izmantojot tieši šos 50 ābolus no katra groza, bet pārējos apēdot, varam panākt, ka 1. un 2. grozā katrā ir tieši 100 āboli. Analoģisku spriedumu ceļā iegūstam sekojošu nevienādību virkni:

$g_1 \leq 99$, $g_2 \leq 49$, $g_3 \leq 33$, $g_4 \leq 24$, $g_5 \leq 19$, $g_6 \leq 16$, $g_7 \leq 14$, $g_8 \leq 12$, $g_9 \leq 11$, $g_{10} \leq 9$, $g_{11} \leq 9$, $g_{12} \leq 8$, $g_{13} \leq 7$, $g_{14} \leq 7$, $g_4 \leq 24$, $g_{15} \leq 6$, $g_{16} \leq 6$, $g_{17} \leq 5$, $g_{18} \leq 5$, $g_{19} \leq 5$, $g_{20} \leq 4$, …, $g_{24} \leq 4$, $g_{25} \leq 3$, …, $g_{33} \leq 3$, $g_{34} \leq 2$, …, $g_{49} \leq 2$, $g_{50} \leq 1$, …, $g_{99} \leq 1$.

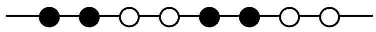
Vairāk nekā 99 grozi nevar būt, jo tad, piemēram, atstājot 100 grozos pa vienam ābolam katrā, būs izpildīta uzdevuma prasība.

Lai mūsu pieņēmums būtu spēkā, visos grozos kopā nedrīkst būt vairāk nekā 473 ābolu. Bet uzdevumā dots, ka tajos atrodas 2000 ābolu. Tātad pieņēmums ir bijis aplams.

3. nodarbības atrisinājumi

3.1. Jā, piemēram, taisnstūra paralēlskaldnis ar izmēriem $100\text{cm}\times100\text{cm}\times\dfrac{1}{100000000}$ cm. Tā virsmas laukums ir 20 000cm^2>6000 cm^2. Savukārt tilpums ir $\dfrac{1}{10000}$ cm^3< $\dfrac{1}{1000}$ cm^3.

3.2. To, ka 9 punktu gadījumā to izdarīt nav iespējams, var pierādīt, piemēram, veicot gadījumu pārlasi. Gadījumā, kad ir 8 punkti, to izdarīt var (skat. 13. zīm.)



13. zīm.

3.3. Vienosimies, ka neuzskatīsim par numuru kombināciju 00-00.
Vispirms apskatīsim tos automašīnu numurus, kuriem pirmie divi cipari nesakrīt ar pēdējiem diviem. Šādu nu numuru skaits ir pāra skaitlis, jo tos var sagrupēt pa pāriem, piemēram, numuram 18-22 piekārtojot numuru 22-18 utt. Tātad visus šāda tipa numurus var sakārtot divās vienāda garuma kolonnās, kur vienā rindiņā atrodas pārī

esošie numuri. Gadījumā, ja viens no pāra numuriem ir laimīgs, tad arī otrs ir tāds. Tātad šeit ir **pāra skaits** laimīgo numuru.
Tagad apskatīsim arī pārējos numurus. Skaidrs, ka visi šie numuri ir laimīgi un to skaits sakrīt ar atšķirīgo divciparu skaitļu skaitu. Tas ir **99**.
Tātad starp visiem apskatāmajiem automašīnu numuriem ir nepāra skaits laimīgi numuru.

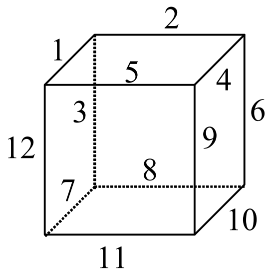
3.4. Skaitli 1988 nevar izsacīt kā 1987 naturālu skaitļu vienpadsmito pakāpju summu, jo gadījumā, ja visi 1987 naturālie skaitļi ir vieninieki, tad to summa ir mazāka par 1988. Bet atliek parādīties kaut vienam divniekam, lai šo 1987 skaitļu vienpadsmito pakāpju summa pārsniegtu 1988, jo jau 2^{11}=2084>1988.
Ja atļauts izmantot arī veselos negatīvos skaitļus, tad uzdevuma prasība ir izpildāma:

$$1988=\underbrace{2^{11}}_{2048}+\underbrace{(-1)^{11}+(-1)^{11}+\ldots+(-1)^{11}}_{1023\cdot(-1)^{11}}+\underbrace{1^{11}+\ldots1^{11}}_{963\cdot1}$$

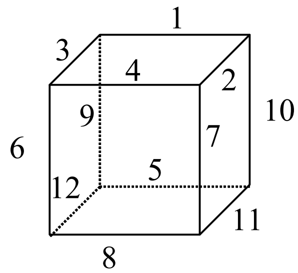
3.5. Apzīmēsim minētās summas ar s_i, kur $1\le i\le8$ (summu skaits ir vienāds ar kuba virsotņu skaitu). Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, eksistē tādi skaitļi a_i, ka $s_i=x\cdot a_i$. Ievērosim, ka katrai šķautnei ir tieši divi galapunkti, tātad tā ietilpst tieši divās summās, tas nozīmē, ka visu summu summa S ir izsakāma sekojošā veidā

$$S=s_1+s_2+\ldots+s_8=x(a_1+a_2+\ldots+a_8)=2\cdot(1+2+3+\ldots+11+12)=12\cdot13=2\cdot2\cdot3\cdot13$$

Tātad skaitlis x ir kāds no skaitļiem 1, 2, 3, 13, kā arī tas var būt jebkurš šo skaitļu reizinājums, kas nepārsniedz 13. (Mazākais no reizinājumiem, kas lielāks par 13 ir 26, bet visas summas dalās ar 26, tad S ir vismaz 26·8=208>12·13.) Tātad x pieder kopai A={1; 2; 3; 4; 6; 12; 13}. 14. zīm. attēlots kubs, kuram x=1; 2; 3; 6, bet 15. zīm. – kubs, kuram x ir 13.



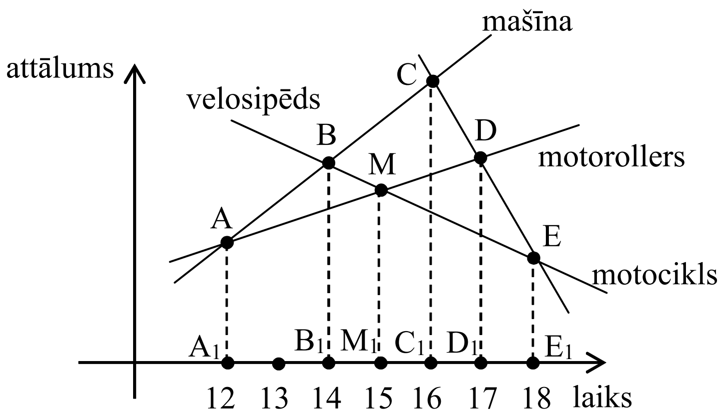
14. zīm.



15. zīm.

To, ka x nevar būt ne 4, ne 12, piedāvājam lasītājam pierādīt pašam (pietiek pierādīt, ka x nevar būt 4).

3.6. Atrisināsim šo uzdevumu grafiski. Izmantojot uzdevumā doto, uzzīmēsim braucēju kustības grafiku koordinātu plaknē (16. zīm.).



16. zīm.

Punkti A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, M_1 ir attiecīgi satikšanās punktu A, B, C,, D, E un M projekcijas uz abscisu ass. Mūsu uzdevums ir noskaidrot punkta M_1 precīzo atrašanās vietu.

Apskatīsim trijstūri ACE. No vienādībām $A_1B_1=B_1C_1$ un $C_1D_1=D_1E_1$ pēc Talesa teorēmas seko, ka AB=BC un CD=DE. Tātad AD un EB ir trijstūra ACE mediānas. Kā zināms, mediānu krustpunkts dala mediānas attiecībā 2:1, skaitot no virsotnes. Apskatīsim mediānu AD. Tātad AM:MD=2:1. Pēc Talesa teorēmas$A_1M_1:M_1D_1=2:1$.

Acīmredzami, ka M_1 koordināta ir $15\frac{1}{3}$. Tātad motorollera un velosipēda kustības grafiki krustojas punktā, kuram atbilst laiks plkst. **15.20.** Tā kā mašīna panāca motorolleru, bet satika velosipēdu, tad motorollers un velosipēds brauca pretējos virzienos, tātad tie satikās.

3.7. Novērtēsim starpību starp naturālu skaitli $\overline{a_0a_1a_2...a_n}$ un tā ciparu reizinājumu $a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$:

$$\overline{a_0a_1a_2...a_n} - a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \geq a_0 \cdot 10^n + \overline{a_0a_1a_2...a_n} - a_0 \cdot 9^n =$$

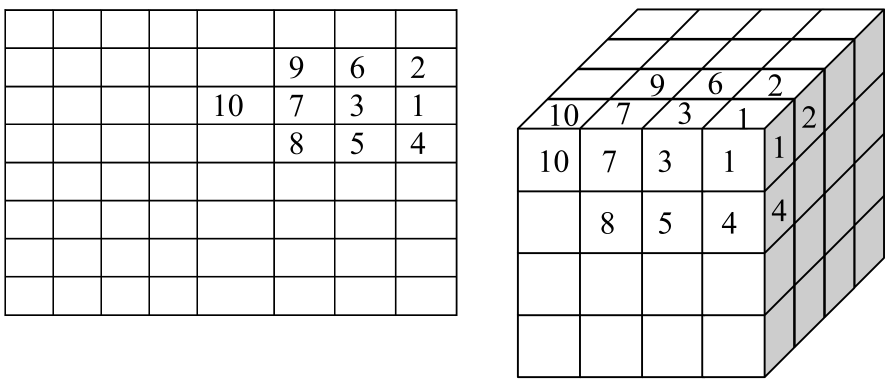
$$= a_0 \cdot (10^n - 9^n) + \overline{a_0a_1a_2...a_n} \geq a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Acīmredzami, ka vienādības var pastāvēt tikai tad, ja n=1, jo $a_0 \neq 0$. Līdz ar to mums jānoskaidro, kādām a_0 un a_1 vērtībām pastāv vienādība

$$\overline{a_0 a_1} - a_0 \cdot a_1 = a_0 + a_1$$
$$10a_0 + a_1 - a_0 \cdot a_1 = a_0 + a_1$$
$$a_0(9 - a_1) = 0 \text{ jeb } a_1 = 9$$

Pārbaude rāda, ka katrs no skaitļiem 19; 29; 39; …; 99 apmierina uzdevuma prasības.

3.8. Ievērosim, ka kuba stūrī nevar nonākt šaha galdiņa iekšējie kubiņi, jo katram no tiem ir četri kaimiņi, bet kuba stūrī kaimiņu skaits – tikai trīs. Kuba stūrī nevar atrasties arī kubiņš no galdiņa malas (bet ne stūra), piemēram kubiņš ar numuru 1 (skat. 17. zīm.)

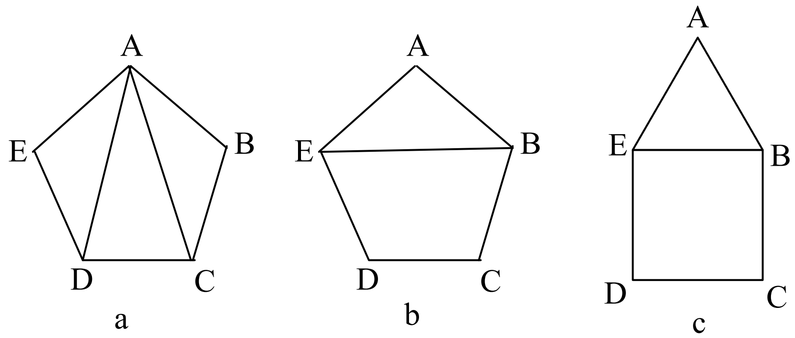


17. zīm.

Skaidrs, ka tā kaimiņi var būt tikai kubiņi ar numuriem 2, 3 un 4. Tādā gadījumā arī kubiņu ar numuriem 5, 6, 7, 9 un 10 izvietojums ir viennozīmīgi noteikts. Uz šaha galdiņa 10. kubiņam ir vēl 3 kaimiņi, taču lielajā kubā var izvietot tikai 2. Paliek tikai viena iespēja, kuba stūrī ir jānovieto kubiņš no šaha galdiņa stūra. No tā, ka kubam ir 8 stūri, bet šaha galdiņam tikai 4, seko, ka aizpildīt lielo kubu prasītajā veidā nav iespējams.

3.9. Pieņemsim, ka garajā virknē (kur parādās visas apskatāmās virknītes garumā 4) sākumā uzrakstīta kaut kāda 4 burtu virknīte k_1. Lai tālāk garajā virknē parādītos kāda cita 4 burtu virknīte, pie k_1 jāpieraksta vismaz viens burts (tātad garajā virknē – vismaz 5 burti), lai garajā virknē parādītos vēl kāda cita (trešā) 4 burtu virknīte, tajā jāpieraksta klāt vēl vismaz viens burts (tātad garajā virknē – vismaz 6 burti), ..., lai garajā virknē parādītos vēl kāda cita (sešpadsmitā) 4 burtu virknīte, tajā jāpieraksta klāt vēl vismaz viens burts (tātad garajā virknē – vismaz 19 burti).
Lūk, šādas 19 burtu virknītes piemērs: aaaabaabbababbbbaaa.

3.10. Pieņemsim, ka ir vairāk kā viena diagonāle, kas vienāda ar piecstūra malu. Ir jāšķiro divi principiāli atšķirīgi varianti (zīmējumos diagonāles, kuras ir tikpat garas kā piecstūra malas, iezīmētas ar nepārtrauktu līniju).
1. gadījums. Abām vienādajām diagonālēm ir kopīga virsotne A. (skat. 18. a zīm.). Tad trijstūri EAD, DAC un CAB ir regulāri un virsotnē A vajadzētu būt izstieptam leņķim, kas nav iespējams ($\angle EAB = \angle EAD + \angle DAC + \angle CAB = 60° + 60° + 60° = 180°$).



18. zīm.

2. gadījums. Abām vienādajām diagonālēm nav kopīgu virsotņu (skat. 118. b zīm.). Tad trijstūri DEA un EAB ir regulāri. Līdz ar to $\angle EAF = \angle EAB = 60°$, kas nav iespējams.

Viegli konstruēt piecstūri, kura viena diagonāle ir vienāda ar tā malu (skat. 118. c zīm.). Šeit ABCE – kvadrāts, bet ABC – regulārs trijstūris.

3.11. Ja daļas skaitītājs un saucējs ir pozitīvi skaitļi, tad, saucējam palielinoties daļas vērtība samazinās. Tāpēc mūsu apskatāmā summa pārsniegs 4 ar mazāko saskaitāmo skaitu tādā gadījumā, ja kā saskaitāmos izmantosim pirmajiem naturālajiem skaitļiem apgrieztos lielumus, t.i., $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ utt. Tāpēc jāpēta summas

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}.$$

Varat paši pārliecināties, ka $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{30}=3{,}9949...$, bet $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{30}+\frac{1}{31}=4{,}0272...$.

Tātad mazākais saskaitāmo skaits, ar kuru var pārsniegt 4, ir 31.

3.12. Apzīmēsim, lauciņus, kā parādīts 19. zīm. Viegli redzēt, ka pēc gājieniem $1 \Rightarrow 6$, $6 \Rightarrow 7$, $11 \Rightarrow 6$, $6 \Rightarrow 1$, $3 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 11$, $10 \Rightarrow 9$, $9 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 3$, $2 \Rightarrow 9$, $9 \Rightarrow 10$, $7 \Rightarrow 6$, $12 \Rightarrow 7$, $7 \Rightarrow 2$, $6 \Rightarrow 7$, $7 \Rightarrow 12$ zirdziņi ir apmainījušies vietām.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

19. zīm.

Pārbaudot visas iespējas, var iegūt, ka izmantojot 7 gājienus vienas krāsas zirdziņu pārvietošanai, nevar panākt to, ka tie ir izvietojušies prasītajā veidā.

4. nodarbības atrisinājumi

4.1. Ja $\overline{abc}$ trīsciparu skaitlis, tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem ir jābūt spēkā vienādībai

$$100a+10b+c=12(a+b+c)$$
$$88a=2b+11c$$

Tā kā 88a un 11c dalās ar 11, tad arī 2b ir jādalās ar 11, tas ir iespējams tikai tad, ja b=0, jo a, b un c cipari. Iegūstam sekojošu vienādību

$$88a=11c$$
$$8a=c$$

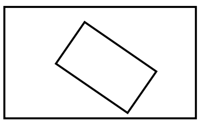
Šāda sakarība iespējama tikai tad, ja a=1 un c=8. Tas nozīmē, ka ir tikai viens tāds trīsciparu skaitlis, kurš ir 12 reizes lielāks par savu ciparu summu, tas ir skaitlis $108=12\cdot(1+0+8)$

4.2. Apzīmēsim $1987\frac{7}{13}=a$. Tad mūsu apskatāmo izteiksmi var uzrakstīt kā

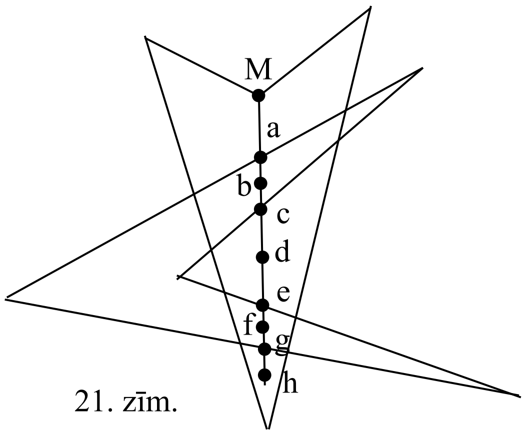
$$(a+1)(a+2)-a(a+3)=a^2+3a+2-a^2-3a=2,$$

ko arī vajadzēja aprēķināt.

4.3. Ar diviem četrstūriem sadalīt plakni tikai divās daļās nav iespējams. Lai iegūtu jebkuru daļu skaitu no 3 līdz 10, 20. zīm. iekšējā četrstūra virsotnes pa vienai pārbīda uz ārējā četrstūra malām un tālāk – nedaudz ārpus tā.



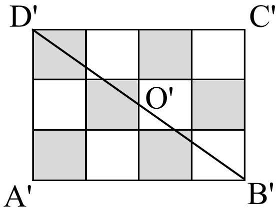
20. zīm.



21. zīm.

Ja punktu M (21. zīm.) pakāpeniski pārvieto pozīcijās a, b, c, d, e, f, g, h, citu virsotņu stāvokli nemainot, tad iegūstam 11, 12, …, 18 daļas. Veicot gadījumu pārlasi, iegūstam, ka 18 ir lielākais iespējamais daļu skaits.

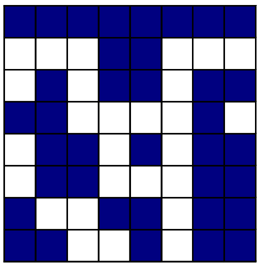
4.4. Ievērosim, ka dotajā taisnstūrī 19×88 rūtiņas situācija ir analoģiska 22. zīm. attēlotajām taisnstūrim $A_1B_1C_1D_1$ (3×4 rūtiņas). Abi šie taisnstūri ir simetriski attiecībā pret punktu O_1 3×4 rūtiņu taisnstūra gadījumā un pret punktu O, kurš atrodas uz 45. vertikāles vidu starp 10. un 11. horizontāli dotajā taisnstūrī. Šajā simetrijā katram melnajam punktam atbilst balts punkts, bet katram baltajam – melns punkts. No šādiem apsvērumiem arī seko apgalvojums, ka taisnstūra diagonāles to nogriežņu garumu summa, kas iet pa melnajām rūtiņām, ir vienāda ar to nogriežņu garumu summu, kas iet pa baltajām rūtiņām.



22. zīm.

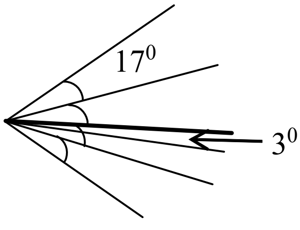
4.5. Apzīmēsim a=$\overline{cdef}$ un b=$\overline{ghij}$ (daži pirmie cipari var būt arī 0). Skaidrs, ka izvēlēties c un g tā, lai to summa būtu 1, var tikai 2 veidos. Izvēlēties ciparus d un h, lai to summa būtu 9, var 10 veidos. Bet ciparu pāri e un i, lai to summa būtu 8, var izvēlēties 9 veidos. Arī pāri f un j var izvēlēties 9 veidos.
Katra no iespējām izvēlēties pirmos ciparus var kombinēties ar katru no iespējām izvēlēties otros, trešos un ceturtos ciparus. Līdz ar to skaits, cik veidos var izvēlēties skaitļu a un b tā, lai a+b=1988 un, saskaitot a un b nevienā šķirā nerodas pārnesums, ir $2\cdot10\cdot9\cdot9=1620$.

4.6. 23. zīm. parādīts kā uzdevuma prasību var apmierināt, izmantojot tikai divas krāsas. Skaidrs, ka vismaz divas krāsas ir vajadzīgas.

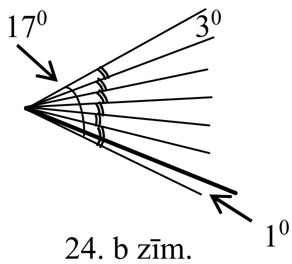


23. zīm.

4.7. Atzīmēsim 17^0 lielus leņķus pa apli. Pilnā riņķī 17^0 liels leņķis ieiet 21 pilnu reizi, neaizpildīts paliek vēl 3^0 (skat. 24. a zīm.). Tātad mēs protam atlikt arī 3^0. Ievērojot to, ka $6\cdot3^0-17^0=1^0$, varam konstruēt arī 1^0 lielu leņķi (skat. 24. b zīm.).



24. a zīm.



24. b zīm.

4.8. Pieņemsim, ka kvadrāta centrs – punkts O ir melns (otrs gadījums ir analoģisks) un aplūkosim visus tos punktus, kas atrodas uz riņķa līnijas ar centru punktā O un rādiusu 1 cm. Ja uz šīs riņķa līnijas ir kāds melns punkts A, tad punktu pāris O un A ir meklētais. Pretējā gadījumā visi riņķa līnijas punkti ir balti un starp tiem ir bezgalīgi daudz punktu pāru, kas apmierina uzdevuma prasību.

4.9. Pieņemsim, ka skaitļa mazākais cipars ir a, bet pa kreisi no tā ir b. Lai skaitlis būtu pēc iespējas lielāks, ir nepieciešams, lai b≥a. Ņemot vērā uzdevuma nosacījumus, uzrakstīsim nākošo šķiru ciparus

[4b-3a+6] [3b-2a+3] [2b-a+1] [b] [a]

Nākošajam ciparam pa kreisi vajadzētu būt vismaz 5b-4a+10, bet no tā, ka b≥a seko, ka 5b-4a>0 un 5b-4a+10>10, tā kā lielākais cipars ir 9, tad pa kreisi no a ir ne vairāk kā 5 cipari. Aprēķini parāda, ka 4b-3a+6 sasniedz savu lielāko iespējamo vērtību 9, tad un tikai tad, ja a=b=3. Tas nozīmē, ka 3b-2a+3=6, bet 2b-a+1=4. Līdzīgi analizējot ciparu iespējamās vērtības pa labi no a, iegūstam, ka tur var atrasties ne vairāk kā 3 cipari, tie ir 4, 6 un 9.

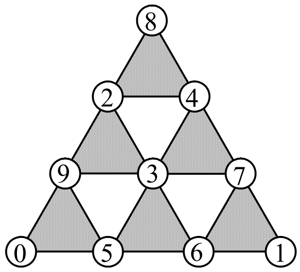
Meklētais skaitlis ir 96433469.

4.10. Pieņemsim, ka 1 kap. monētas ir skaitā x_1, 2 kap. monētas skaitā x_2, 5 kap. monētas skaitā x_3, 10 kap. monētas skaitā x_4, 20 kap. monētas skaitā x_5, 50 kap. monētas skaitā x_6, 1 rbļ. monētas skaitā x_7. Tādā gadījumā apgalvojumu "A kapeikas var samaksāt ar B monētām" apraksta sekojoša sistēma

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = B \\ 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_3 + 20x_5 + 50x_6 + 100x_7 = A \end{cases} \qquad (1)$$

Lai samaksātu B rubļus ar A monētām 1 kap. monētas jāņem skaitā $100x_7$, 2 kap. monētas – skaitā $50x_6$, 5 kap. monētas – skaitā $20x_5$, 10 kap. monētas skaitā $10x_4$, 20 kap. monētas – skaitā $5x_3$, 50 kap. monētas – skaitā $2x_2$, 1 rbļ. monētas – skaitā x_1.

4.11. Vienu atrisinājumu skat. 25. zīm. Katra iesvītrotā trijstūra virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir 87.



25. zīm.

4.12. Sadalīsim kartītes 3 grupās, pirmajā liksim tās, uz kurām rakstītie skaitļi ir lielāki nekā 2 (sauksim tās par lielām), otrā – tās, uz kurām rakstīts 2, bet trešā grupa saturēs kartītes, uz kurām rakstīts vieninieks. Ja lielo kartīšu un divnieka kartīšu skaits sakrīt, tad jāņem ir visas lielās kartītes. Ja lielo kartīšu ir mazāk nekā divnieka kartīšu, tad ņemam visas lielās kartītes un pa vienai pievienojam divnieka kartītes, līdz iegūstam 10 vai 9. Ja iegūtā summa ir 9, tad eksistē vismaz viena vieninieka kartīte, ņemam to un lieta darīta. Ja divnieka kartīšu ir mazāk nekā lielo kartīšu, tad ņemam pa vienai lielajai kartītei, kamēr sasniedzam lielāko iespējamo vērtību, kas nepārsniedz 10, tad pievienojam vajadzīgo vieninieka kartīšu daudzumu.