“Profesora Cipariņa klubs” 1987./88. m.g.

1. nodarbība

1.1. Taisne krusto desmitstūri. Cik daļās tā var šo figūru sadalīt? Atrast visas iespējas un pamatot, kāpēc citu iespēju nav. (Norāde: desmitstūris var būt arī ar "ieliekumu".)

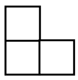
1.2. Atrast mazāko no tiem veseliem pozitīviem skaitļiem, kas dalās ar 12 un savā pierakstā satur tikai ciparus 0 un 1 (varbūt vairākas reizes).

1.3. Kvadrāts sastāv no 6×6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kā to var sagriezt 4 vienādās daļās? Griezumus drīkst izdarīt tikai pa rūtiņu līnijām. Censties atrast iespējami daudz dažādus atrisinājumus.

1.4. Pierādīt, ka nevar atrast tādus veselus pozitīvus skaitļus a, b un cc, lai izpildītos vienādība

$$(a+3b)(b+3c)(c+3a)=1987$$

1.5. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Parādīt, kā no tā izgriezt 11 "stūrīšus" tā, lai no atlikušajiem gabaliem nevienu šādu stūrīti vairs nevarētu izgriezt.



14. zīm.

1.6. Apskats summu 123+456+789. Daži cipari tajā jāaizstāj ar nullēm tā, lai summas vērtība būtu 1185. Kā to var izdarīt?

1.7. Tabulā A ierakstīti skaitļi. Atļauts vai nu pieskaitīt 1 visiem vienas rindiņas skaitļiem, vai atņemt 1 visiem vienas kolonnas skaitļiem.
Kā no tabulas A iegūt tabulu B?

A

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

B

1	5	9	13
2	6	10	11
3	7	11	15
4	8	12	16

C

1	5	9	13
3	6	12	17
2	7	11	16
4	8	10	15

Vai no tabulas A var iegūt tabulu C?

1.8. Karalis grib uzbūvēt 6 cietokšņus un savienot tos ar ceļiem, lai būtu tikai 3 krustojumi un katrā no tiem krustotos 2 ceļi. Kā to var izdarīt? (Katrs cietokšņu pāris jāsavieno ar citu ceļu.)

1.9. Jānim, Andrim, Jurim, Valdim un Aivaram kopā ir 35 konfektes. Viņi nostājušies rindā (kādā kārtībā, nav zināms). Bērniem, kas stāv pa labi no Jāņa, kopā ir 13 konfektes. Bērniem, kas stāv pa labi no Aivara, – 31 konfekte. Bērniem, kas stāv pa labi no Jura, – 21 konfekte. Bērniem, kas stāv pa labi no Valda, – 7 konfektes. Cik konfekšu katram bērnam?

1.10. Autobusa biļetes tiek numurētas ar sešciparu numuriem (tie var sākties arī ar vienu vai vairākām nullēm). Nezinītis uzskata biļeti par laimīgu, ja tās numura triju pirmo ciparu summa ir vienāda ar triju pēdējo ciparu summu. Cik biļešu pēc kārtas jānopērk, lai starp tām noteikti būtu vismaz viena laimīga?

1.11. Dota rūtiņu papīra lapa ar izmēriem 10×20 rūtiņas. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli: ar vienu gājienu (gājienus izdara pēc kārtas) veic griezumu pa līniju, kas savieno divus blakus esošo rūtiņu stūrus (t.i., izdara griezumu pa vienas rūtiņas malu). Pirmais spēlētājs sāk griezt no malas. Katram nākamajam griezumam jāturpina līnija, ko veido iepriekšējie griezumi. Uzvar tas, pēc kura griezuma lapa sadalās divos atsevišķos gabalos. Kas uzvar, pareizi spēlējot, – pirmais vai otrais spēlētājs?

1.12. Divās kaimiņu valstīs – Dillijā un Dallijā – lieto attiecīgi naudas vienības dillerus un dallerus. Dillijā vienu dilleru maina pret 10 dalleriem, bet Dalleru – pret 10 dilleriem. Sprīdītim ir viens dillers, viņš var brīvi braukāt no vienas valsts uz otru un mainīt naudu. pierādīt: ja viņš naudu neiztērēs, nepazaudēs un neaizņemsies, tad viņam nekad nebūs vienāds skaits dilleru un dalleru.

2. nodarbība

2.1. Katliņā vienlaikus var atrasties 3 olas. Vita grib novārīt 4 olas mīksti un 7 olas cieti. Lai novārītu olas mīksti, tām jāvārās 3 minūtes, lai novārītu olas cieti, tām jāvārās 5 minūtes. Kādā īsākajā laika posmā Vita to var izdarīt?

2.2. Apskata skaitļus 27, 81, 243, 729 utt. Katru nākamo skaitli šajā virknē iegūst, iepriekšējo pareizinot ar 3. Vai kāds no šiem skaitļiem būs tāds, kam priekšpēdējais ir nepāra cipars?

2.3. Vai var uzzīmēt divus izliektus četrstūrus tā, ka viens no tiem atrodas otra iekšpusē un iekšējā četrstūra diagonāļu garumu summa lielāka par ārējā četrstūra diagonāļu garumu summu?

2.4. Jānis peld kvadrātveida baseina centrā, bet tā krastā stāv Andris. Andris peldēt neprot, bet pa sauszemi skrien lēnāk nekā Jānis. Jāņa ātrums ūdenī ir trīs reizes mazāks par Andra ātrumu uz sauszemes. Vai Jānis var aizbēgt no Andra?

2.5. Ziedu pilsētā Nezinītim ir 100 draugu. Ir zināms, ka šajā pilsētā cilvēkiem ir 10 dažādas acu krāsas un 10dažādas matu krāsas. Vai noteikti var apgalvot, ka Nezinīša draugu vidū ir divi, kam ir vienāda, gan matu, gan acu krāsa? Bet, ja Nezinītim būtu 101 draugs?

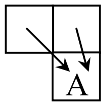
2.6. Vai kuba virsmu var aplīmēt ar 12 papīra kvadrātiem tā, lai tie nekur nepārsegtos un neviens virsmas gabaliņš nepaliktu neaplīmēts?

2.7. Divi spēlētāji pēc kārtas palielina naturālu skaitli. Turklāt palielināšana katru reizi notiek par lielumu, kas mazāks par iepriekšējo vērtību. (Piemēram, skaitli 4 var palielināt par 1, par 2 vai par 3.) Uzvar tas, kurš ar savu gājienu iegūst skaitli 1987. Skaitļa sākotnējā vērtība ir 2. Kurš uzvar, pareizi spēlējot – tas, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu?

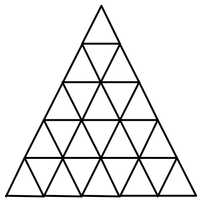
2.8. Klasē ir 16 skolēni. Katram no viņiem šajā klasē ir tieši 3 draugi. Vai šos skolēnus var sasēdināt 8 solos tā, lai katrā solā sēdētu draugi?

2.9. Ezeram ir desmitstūra forma. Tā virsotnēs atrodas ciemi. Ezerā nav salu. Vai var gadīties, ka no pieciem ciemiem nevar redzēt nevienu citu? (No viena ciema var redzēt otru vienīgi tad, ja starp tiem atrodas tikai ūdens.)

2.10. Kvadrāts sastāv no 1988×1988 rūtiņām. Tā kreisajā kolonnā ierakstīti vieninieki, bet augšējā rindiņā – nulles (izņemot augšējās rindiņas pašu kreiso rūtiņu, kur atrodas vieninieks). Pārējās rūtiņas aizpildītas pēc šāda likuma: katrā rūtiņā A ierakstīta to divu skaitļu summa, kas atrodas iepriekšējā rindiņā tieši virs A un vienu vietu pa kreisi no A (15. zīm.). Cik nepārskaitļi ierakstīti apakšējā rindiņā?



15. zīm.



16.zīm.

2.11. Vienādmalu trijstūris ar taisnēm, kas paralēlas tā malām, sadalīts mazos vienādmalu trijstūrīšos (16. zīm.).

Viens no mazajiem trijstūrīšiem nokrāsots melns, citi – balti. Vienlaikus var mainīt krāsu uz pretējo visiem trijstūriem, kurus krusto taisne, kas paralēla kādai no trijstūra malām. Vai vienmēr, atkārtojot šādu pārkārtošanu vairākas reizes, var panākt, lai viss sākotnējais trijstūris būtu balts?

2.12. Vairākos grozos kopā atrodas 2000 ābolu. Atļauts ēst ābolus un aizmest tukšos grozus (bet nedrīkst pārlikt ābolus no viena groza citā). Pierādīt, ka var panākt, lai visos palikušajos grozos ābolu skaits būtu vienāds un pavisam paliktu vismaz 100 ābolu.

3. nodarbība

3.1. Kuba izmēri ir 1 cm×1 cm×1 cm. Vai var atrast tādu taisnstūra paralēlskaldni, kura virsma vismaz 1000 reižu lielāka par kuba virsmu, bet tilpums vismaz 1000 reižu mazāks par kuba tilpumu?

3.2. Uz skaitļu taisnes atzīmēti punkti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tie jānokrāso melnā un baltā krāsā (katrs punkts – vienā krāsā) tā, lai neviens punkts neatrastos tieši vidū starp diviem punktiem, kas nokrāsoti tādā pašā krāsā. Vai to var izdarīt? Bet, ja būtu atzīmēti punkti no 1 līdz 8?

3.3. Automašīnas numuru sauksim par laimīgu, ja pirmo divu ciparu summa vienāda ar pēdējo divu ciparu summu. Vai laimīgu numuru ir pāra vai nepāra skaits? (Numura sēriju neņem vērā.)

3.4. Noskaidrot, vai skaitli 1988 var izsacīt kā 1987 naturālu skaitļu vienpadsmito pakāpju summu (starp tiem drīkst būt arī vienādi). Noskaidrot to pašu, ja atļauts izmantot veselu skaitļu vienpadsmitās pakāpes.

3.5. Kuba šķautnes sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz 12 (katra šķautne ar citu skaitli). Katru tādu triju šķautņu numuru summa, kas iziet no vienas virsotnes, dalās ar x. Kāds var būt x?

3.6. Pa šoseju pastāvīgos virzienos ar pastāvīgiem ātrumiem brauc automašīna, motorollers, velosipēds un motocikls. Mašīna panāca motorolleru plkst. 12.00, satika velosipēdu plkst. 14.00, bet motociklu – **16.00.** Motocikls satika motorolleru plkst. 17.00 un panāca velosipēdu plkst. 18.00.

Vai velosipēds un motorollers satikās vai viens otru panāca? Kurš kuru? Cikos tas notika?

3.7. Ja no naturāla skaitļa atņems tā ciparu reizinājumu, tad iegūs tā ciparu summu. Kas tas ir par skaitli?

3.8. Uz šaha galdiņa ar izmēriem 8×8 novietoti 64 kubiņi ar šķautnes garumu 1. Vai šos kubiņus var sakārtot kubā ar izmēriem 4×4×4 tā, lai tie kubiņi, kas sākumā atradās blakus, atrastos blakus arī tagad? (Saka: kubiņi atrodas blakus, ja tie saskaras ar veselu skaldni.)

3.9. Uzrakstīt iespējami īsu virknīti, kas sastāv no burtiem a un b, tā, lai katru no 16 iespējamām burtu a un b virknēm garumā 4 (aaaa, aaab, …, bbbb) varētu atrast uzrakstītu šajā virknītē.

3.10. Izliektā piecstūrī visas malas ir vienādas. Cik tajā var būt diagonāļu, kas vienādas ar malu?

3.11. Kāds mazākais daudzums dažādiem naturāliem skaitļiem apgriezto skaitļu jāsaskaita, lai summa nepārsniegtu 4?

3.12. Minišaha galdiņš sastāv no 3×4 rūtiņām. Uz tā novietoti 3 balti un 3 melni zirdziņi (17. zīm.).

B_1	B_2	B_3
M_1	M_2	M_3

17. zīm.

Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai melnie zirdziņi atrastos augšējā rindā, bet baltie – apakšējā? Baltie un melnie gājienus izdara patvaļīgā kārtībā, nevienu figūru nedrīkst nosist. Uz viena lauciņa vienlaikus var atrasties tikai viena figūra.

4. nodarbība

4.1. Atrast visus tos trīsciparu skaitļus, kas 12 reizes lielāki par savu ciparu summu.

4.2. Atrast izteiksmes $1988\frac{7}{13}\cdot 1989\frac{7}{13} - 1987\frac{7}{13}\cdot 1990\frac{7}{13}$ vērtību.

4.3. Cik daļās plakni var sadalīt divi četrstūri?

4.4. Taisnstūra izmēri ir 19×88 rūtiņas, kas izkrāsotas melnā un baltā krāsā šaha galdiņa kārtībā. Taisnstūrī novilkta diagonāle. Vai taisnība, ka šīs diagonāles to nogriežņu garumu summa, kas iet pa melnajām rūtiņām, vienāda ar to nogriežņu garumu summu, kas iet pa baltajām rūtiņām?

4.5. Cik dažādos veidos var izvēlēties tādus naturālus skaitļus a un b, ka a+b=1968 un, saskaitot a un b, nevienā šķirā nerodas pārnesums?

4.6. Kādā mazākajā skaitā krāsu var izkrāsot šaha galdiņa lauciņus tā, lai zirdziņš no katra lauciņa aiziet uz vismaz divu dažādu krāsu lauciņiem?

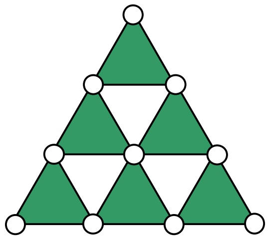
4.7. Dots 17° liela leņķa šablons. Lietojot tikai šo šablonu un zīmuli, konstruēt 1° lielu leņķi.

4.8. Kvadrātu ar izmēriem 3×3 cm nokrāsoja baltu. Pēc tam to apšļakstīja ar melnu krāsu. Pierādīt, ka noteikti varēs atrast divus punktus, kas atrodas 1 cm attālumā viens no otra un nokrāsoti vienādi (vai nu abi balti, vai abi melni).

4.9. Atrast lielāko naturālo skaitli, kam katrs cipars (izņemot pirmo un pēdējo) mazāks par abu tam blakus uzrakstīto ciparu summas pusi.

4.10. Dots neierobežots daudzums 1 kap., 2 kap., 5 kap., 10 kap., 20 kap., 50 kap. un 1 rubļa monētu. Ir zināms, ka A kapeikas var samaksāt ar B monētām. Pierādīt, ka B rubļus var samaksāt ar A monētām.

4.11. Vai aplīšos var ierakstīt ciparus no 0 līdz 9 (katru vienu reizi) tā, lai katra zaļā trijstūra virsotnēs ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati? (18. zīm.)



18. zīm.

4.12. Uz 10 kartītēm uzrakstīti naturāli skaitļi. Neviens no tiem nav lielāks par 10, bet visu uzrakstīto skaitļu summa ir 20. Pierādīt, ka var atrast dažās kartītes, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 10.