“Profesora Cipariņa klubs” 1988./89. m.g.

1. nodarbības atrisinājumi

1.1. Pēc viena gājiena gan uz tāfeles uzrakstīto skaitļu skaits, gan to summa $S=9+11+13+15+17+19=84$ pamazinās par 1, neatkarīgi no tā, ar kuriem skaitļiem darbības tiek izpildīta.
Tātad pēc 1. gājiena uz tāfeles būs palikuši 5 skaitļi, un to summa būs 83, pēc 2. gājiena – 4 skaitļi, kuru summa ir 82, pēc 3. gājiena – 3 skaitļi, to summa ir 81, pēc 4. gājiena – 2 skaitļi, kuru summa ir 80, pēc 5. gājiena būs palicis viens skaitlis – 79. Tātad pēdējais skaitlis, kurš paliks uz tāfeles, būs 79, pie tam tas notiks pēc 5 gājieniem.

1.2. Iedomāsimies, ka zēni darbojās ar sešiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Ja a_1 ir pāra skaitlis, tad a_4 ir nepāra, a_5 – pāra, a_6 – nepāra, tātad Andra iegūtais rezultāts $a_4+a_5+a_6$ ir pāra skaitlis.
Ja a_1 ir nepāra skaitlis, tad a_2 ir pāra, bet a_3 – nepāra. Tātad Jāņa iegūtā summa $a_1+a_2+a_3$ ir pāra skaitlis.
Tātad, sareizinot Andra un Jāņa iegūtos rezultātus, Pēterim bija jāiegūst pāra skaitlis. Nepāra skaitlis 111 111 111 varēja rasties tikai tad, ja kāds no zēniem bija kļūdījies darbību izpildē.

1.3. Lai iegūtu tabulu A 4 reizes izpildām gājienu ar augšējo kreiso 2x2 rūtiņas lielo kvadrātu, piecus – ar augšējo labo, 7 – ar apakšējo labo, bet 6 – ar apakšējo kreiso 2x2 rūtiņas lielo kvadrātu. Tā kā B tabulas stūra rūtiņās ierakstītie skaitļi sakrīt ar A tabulas attiecīgajiem skaitļiem, tad gājienu skaitam ar katru atbilstošo kvadrātu jāpaliek tādam pašam, un tā kā no saskaitīšanas kārtības summa nemainās, tad varam secināt, ka tabulu B ar šādiem gājieniem iegūt nevar.

1.4. To var izpildīt, piemēram, šādi:

51; 1; 52; 2; 53; 3; …; 98; 48; 99; 49; 100; 50.

1.5. Pirmo no 19 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem apzīmēsim ar a. Līdz ar to uzdevuma prasība pārfrāzējama šādi:
Vai var atrast tādu naturālu skaitli a, lai summa

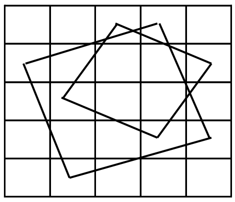
$$S=a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+18)$$

dalītos ar 88?
Viegli redzēt, ka

$$S=19a+(1+2+\ldots+18)=19a+171=19(a+9).$$

Tātad S dalīsies ar 88, ja a+9 dalīsies ar 88, tas nozīmē, ka a var būt, piemēram, 79, t.i., naturālo skaitļu no 79 līdz 97 summa dalīsies ar 88.

1.6. Veicot gadījumu pārlasi un neaizmirstot, sarkano virsotņu kvadrāta malas var arī nebūt paralēlas lielā kvadrāta malām (skat. 1. zīm.), iegūstam, ka pavisam var atzīmēt 50 kvadrātus.



1. zīm.

1.7. Skaidrs, ka apgalvojumu, ka skaitlis atrodas trešajā tabulas rindā, var pierakstīt ar sekojošu nevienādību palīdzību:

$$\mathbf{2B<20}\le 3B.$$

Tātad B<10 un tā kā B ir naturāls skaitlis, tad B≤9.
Līdzīgi apgalvojumam, ka 41 atrodas piektajā rindā, atbilst nevienādības

$$4B<\mathbf{41\le 5B}$$

Tātad B≥8,5 jeb **B≥9**. Varam secināt, ka B var būt tikai viena vērtība, t.i., B=9.
Nevienādības

$$(A-1)B<103\le AB$$

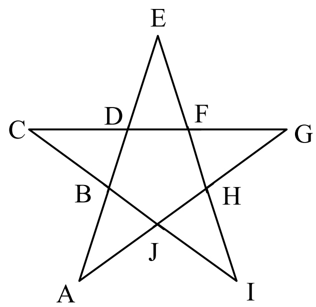
izsaka to, ka 103 atrodas pēdējā, A-tajā rindā. Ievietojot B=9, no šīs nevienādības kreisās un labās puses attiecīgi iegūstam $A<12\frac{4}{9}$ un $A\ge 11\frac{4}{9}$, tā kā A ir naturāls skaitlis, tad A vērtība var būt tikai 12. Tātad dotajā tabulā ir 12 rindas un 9 kolonnas.

1.8. Pieņemsim, ka var atrast divus tādus veselus skaitļus a un b, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. No tā, ka viens no abiem skaitļiem, piemēram, a, dalās ar abu skaitļu summu, seko, ka $|a|\ge|a+b|$. No tā, ka otrs skaitlis − b − dalās ar abu skaitļu starpību, seko, ka $|b|\ge|a-b|$. Abām nevienādībām ir jāizpildās vienlaicīgi. Bet ievērosim, ka gadījumā, ja abi skaitļi aun b ir ar vienādām zīmēm, tad nav spēkā 1. nevienādība; ja turpretī skaitļi a un b ir ar pretējām zīmēm, tad nav spēkā 2. nevienādība. Tātad tādu skaitļu, kas apmierinātu uzdevuma prasības, **nav**.

1.9. Pieņemsim, ka nevienādības

$$CB>CD,\ DE>EF,\ FG>GH,\ HI>IJ,\ AJ>AB \quad (1)$$

visas vienlaicīgi ir spēkā. Apzīmēsim ar ∠B, ∠D, ∠F, ∠H, ∠J zīmējumā radušos trijstūrīšu leņķus pie iekšējā piecstūra malām. Izmantojot dotās nevienādības (1) un faktu, ka trijstūrī pret tā visgarāko malu atrodas vislielākais leņķis, varam rakstīt



2. zīm.

$$\angle D>\angle B,\ \angle F>\angle D,\ \angle H>\angle F,\ \angle J>\angle H,\ \angle B>\angle J \text{ jeb}$$

$$\boldsymbol{\angle B<}\angle D<\angle F<\angle H<\angle J<\boldsymbol{\angle B}.$$

Tā kā ∠B<∠B nav iespējams, tad mūsu sākotnējais pieņēmums ir bijis aplams.

1.10. Apzīmēsim meiteņu skaitu ar m, zēnu skaitu ar z, bet draudzību skaitu starp zēniem un meitenēm ar d. Tā kā katra meitene draudzējas tieši ar 5 zēniem, tad d=5m; tā kā katrs zēns draudzējas tieši ar 5 meitenēm, tad d=5z. Tātad 5m=5z un m=z, kas arī bija jāpierāda.

1.11. Vispirms parādīsim, ka katru naturālu skaitli var pārveidot par 1. Skaidrs, ka pakāpeniski nosvītrojot skaitlim pēdējo, priekšpēdējo, …, trešo, otro ciparu, to var pārveidot par viencipara skaitli. Ja tas ir 1, tad tālāki pārveidojumi nav vajadzīgi. Apskatīsim citas iespējas, kad sākotnējā skaitļa pirmais cipars ir 2; 3; …; 9.

$2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 1$

$3 \to 6 \to 12 \to 1$

$4 \to 8 \to 16 \to 1$

$5 \to 10 \to 1$

$6 \to 12 \to 1$

$7 \to 87 \to 1$

$8 \to 16 \to 1$

$9 \to 18 \to 1$

Lai uzdevums būtu atrisināts, pietiek parādīt, ka 1 var pārveidot par jebkuru naturālu skaitli, kas nepārsniedz 100. Tad m par n pārveido šādi: vispirms m pārveido par 1, tad 1 pārveido par n.

Apskatīsim šādus jaunus pārveidojumus α un β:

α: pierakstīt skaitlim galā patvaļīgu ciparu

β: izdalīt skaitli ar 2, ja tas ir pāra skaitlis.

Ievērosim, ka, ja ar pārveidojumu α skaitlim m galā pieraksta ciparu c, tad m pārveidojas par skaitli 1m+c. Mums pietiek pierādīt, ka katru skaitli m, kas nepārsniedz 100, ar pārveidojumiem α un β var pārveidot par 1. Tas būs pierādīts, ja mēs pratīsim pierādīt, ka **katru** naturālu skaitli m, kas nepārsniedz 100, ar pārveidojumiem α un β var pārveidot par skaitli, kas mazāks par m. Turpmāk ar m, n, k utt. apzīmēti tikai veseli pozitīvi skaitļi vai 0.

Ja m − naturāls pāra skaitlis, tad m=2k, k>0, tad skaitlim m=2k varam pielietot pārveidojumu β un iegūt skaitli k<m. Pierakstīsim to šādi: $2k \xrightarrow{\beta} k$.

Cipara c pierakstīšanu skaitļa galā (pārveidojuma α lietošanu) pierakstīsim šādi: $m \xrightarrow{\alpha} m1$.

Atliek apskatīt gadījumu, kad m ir nepāra skaitlis. Šķirosim 4 gadījumus:

1) Skaitlis m, dalot ar 8, dod atlikumu 1, t. i., m=8k+1.

$m=8k+1 \xrightarrow{6} 80k+16 \xrightarrow{\beta} 40k+8 \xrightarrow{\beta} 20k+4 \xrightarrow{\beta} 10k+2 \xrightarrow{\beta} 5k+1$. Ja k>0, tad 5k+1<8k+1, kas arī bija nepieciešams. Ja k=0, tad sākotnējais skaitlis bija 1 un tālāki pārveidojumi nebija nepieciešami.

2) Atlikums, dalot ar 8, ir 3: m=8k+3.

$m=8k+3 \xrightarrow{2} 80k+32 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} 5k+2<m$

3) m=8k+5, šķirosim apakšgadījumus:

a) k=4s, s≥0., tad m=32s+5 un

$m=32s+5 \xrightarrow{1} 320k+51 \xrightarrow{2} 3200k+512 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} 25s+4<m$.

b) k=4k+1,

$m=32s+13 \xrightarrow{6} 320+136 \xrightarrow{\beta} 160+68 \xrightarrow{\beta} 80s+34 \xrightarrow{\beta} 40s+17 \xrightarrow{6} 400s+$
$176 \xrightarrow{\beta} 200+88 \xrightarrow{\beta} 100s+44 \xrightarrow{\beta} 50s+22 \xrightarrow{\beta} 25s+11<m.$
c) k=4s+2,
$m=32s+21 \xrightarrow{7} 320s+217 \xrightarrow{6} 3200s+2176 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} 25s+17<m.$
d)k=4s+3,
$m=32s+29 \xrightarrow{4} 320s+294 \xrightarrow{4} 3200s+2944 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} 25s+23<m.$
4)m=8k+7, atkal šķirosim gadījumus:
a) k=4s,
$m=32s+7 \xrightarrow{6} 320s+76 \xrightarrow{8} 3200s+768 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} 25s+6<m.$
b) k=4s+1,
$m=32s+15 \xrightarrow{2} 320s+152 \xrightarrow{\beta} 160s+76 \xrightarrow{8} 1600s+768\ldots \xrightarrow{\beta} 25s+12<m.$
c) k=4s+2,
$m=32s+23 \xrightarrow{0} 320s+230 \xrightarrow{4} 3200s+2304 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} 25s+18<m.$
d) k=4s+3, m=32s+31, tā kā m≤100, mums jāapskata tikai gadījumi, kad s=2, s=1, s=0, t. i., skaitļi m=95, m=63, m=31.
$95 \to 952 \to 9523 \to 47616 \to$
$23808 \to 11904 \to 5952 \to 2976 \to 8788 \to 744 \to 372 \to 186 \to 93<95$
$63 \to 634 \to 6348 \to 63488 \to 31744 \to 15872 \to 7936 \to 3968 \to 1984 \to 992 \to 4$
$96 \to 248 \to 124 \to 62<63.$
$31 \to 312 \to 156 \to 78 \to 39 \to 392 \to 196 \to 98 \to 49 \to 492 \to 246 \to 123 \to 1232$
$\to 616 \to 302 \to 154 \to 77$
Skaitlis 77 izsakāms kā 7=3282+13. saskaņā ar 3) b) punkta rezultātiem tas pārveidojams par 25·2+11=61.
赁龍$\to 612 \to 306 \to 153.$
Skaitlis 153 izsakāms kā 153=8819+1. saskaņā ar 1) punkta rezultātiem tas pārveidojams par 5·19+1=96
$96 \to 48 \to 24<31.$
Visi varianti apskatīti, uzdevums atrisināts.

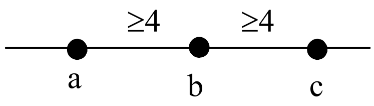
1.12. Lai atrastu, cik starp skaitļiem 2 līdz 1000000 ir k-to pakāpju, pietiek atrast tādu skaitli x, ka x^k≤1000000 bet $(x+1)^k$>1000000. Izmantojot šo faktu, atrodam, ka šajās robežās ir 999 skaitļu kvadrāti, 99 kubi, 87 piektās pakāpes, 6 septītās pakāpes, 2 vienpadsmitās pakāpes, 1 trīspadsmitā pakāpe, 1 septiņpadsmitā pakāpe un 1 deviņpadsmitā pakāpe. Bet jau 2^{20}>1000000, tātad lielāku pakāpju šajā intervālā nav. Skaitļu ceturtās, astotās un sešpadsmitās pakāpes ir uzskaitītas jau pie kvadrātiem, attiecīgi skaitļu devītās pakāpes ir uzskaitītas jau pie kubiem. Atliek ievērot, ka, piemēram, skaitļu sestās pakāpes ir ieskaitītas gan pie kvadrātiem, gan kubiem, šajās robežās ir 9 skaitļu sestās pakāpes (starp tām ir arī 2 divpadsmitās pakāpes), tātad pavisam ir nevis 999+99=1098 skaitļu kvadrāti vai kubi, bet ne vairāk kā 1098-9=1089 šādi skaitļi. Līdzīgi spriežot arī par skaitļu desmitajām (to ir 2), četrpadsmitajām (viena) un piecpadsmitajām pakāpēm (viena), iegūstam, ka no 2 līdz 1000000 esošo pakāpju skaits ir 999+99+87+6+2+1+1+1-9-2-1-1=1110. Tā kā skaitli viens varam uzskatīt par vieninieka kaut kādu pakāpi, tad meklējamo skaitļu skaits ir 1000000-1110-1=998889.

2. nodarbības atrisinājumi

2.1. Izrakstīsim rindā visus naturālos skaitļus; izveidosim vēl otru rindu katram skaitlim apakšā ierakstot atlikumu, kas rodas šo skaitli dalot ar seši (skat. 3. zīm.). Redzam, ka starp katrām sešām pēc kārtas ņemtām rūtiņām ir tieši viena, kurā ierakstīta 0. Varam izdarīt divus secinājumus

1) pirmajā virknē noteikti varēs atrast sešu doto skaitļu virknīti;

2) būs tieši viens skaitlis, zem kura būs ierakstīta nulle, tātad šis skaitlis dalīsies ar 6.



3. zīm.

Izveidojot trešo virkni (šoreiz tā veidojas no atlikumiem, kas rodas dalot skaitli ar 4) redzam, ka starp katrām sešām pēc kārtas ņemtām vērtībām ir vai nu viena, vai divas nulles. Tātad ar 4 var dalīties 1 (1, 2, 3, **4**, 5, 6) vai 2 (**4**, 5, 6, 7, **8**, 9) skaitļi, citu iespēju nav.

2.2. Vienas kastes atvēršanu nosauksim par vienu gājienu. Ar 8 gājieniem vienmēr pietiek, lai noskaidrotu, kurās kastēs ir grāmatas. Ja izdarītajos 8 gājienos (atvērtas visas kastes, izņemot vienu) atrastas visas trīs kastes ar grāmatām, tad uzdevuma prasība ir izpildīta. Pretējā gadījumā noteikti ir atvērtas divas kastes ar grāmatām, tātad trešā kaste ir vienīgā vēl neatvērtā.

Ar 7 gājieniem nepietiek, piemēram, atverot 1. līdz 7. kasti, noskaidrojam, ka grāmatas ir 1. un 2., lai noskaidrotu, kurā no atlikušajām kastēm ir grāmatas, vismaz viena no tām ir jāatver.

2.3. Ievērosim, ka lai arī kā mēs dotajā izteiksmē neieliktu iekavas, skaitlis 1 vienmēr atradīsies skaitītājā, skaitlis 2 – saucējā.

a) Daļas vērtība ir lielākā iespējamā, ja skaitītājs ir iespējami liels, bet saucējs – iespējami mazs. Dotajā izteiksmē stingri noteikts, ka divnieks ir saucējā, tātad lielākā vērtība ir

$$1:(((((((2:3):4):5):6):7):8):9)=\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2}$$

b) Savukārt daļas vērtība ir mazākā iespējamā, ja skaitītājs ir iespējami mazs, bet saucējs – iespējami liels:

$$((((((((1:2):3): 4):5:):6):7):8):9)=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}$$

2.4. Atradīsim taisni t ar īpašību: uz taisnēm, kuras ir paralēlas t, atrodas ne vairāk kā viens dotais punkts p_i, $i\in\{1;\ 2;\ ...;\ 3977\}$. Tā kā virzienus taisnei var izvēlēties bezgalīgi daudzos veidos, bet punktu skaits ir galīgs, tad tādu taisni vienmēr varēs atrast.

Tālāk novilksim tādu taisni $t_0||t$, ka visi punkti p_i atrodas no t_0 pa labi un bīdīsim šo taisni pa labi. pienāks brīdis, kad punkts p_1 atradīsies uz šīs taisnes, turpinot bīdīšanu tas paliks pa kreisi. Kaut kad bīdīšanas procesā noteikti iestājies brīdis, kad vienā pusē no t_0 būs tieši 1988 punkti, bet otrā – 1989 punkti.

2.5. Pieņemsim, ka var atrast tādus naturālus skaitļus A un n, ka

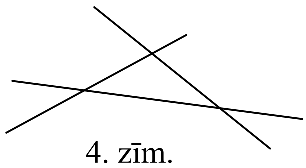
$A^2+12=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$ (1)

Pārbaude parāda, ka neder n vērtības 1; 2; 3; 4; 5. Tāpēc $n\geq6$, tādā gadījumā $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$ dalās ar 9, jo satur reizinātājus 3 un 6. Tā kā

$A^2=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n-12$

tad A^2 dalās ar 3, jo vienādojuma labā puse dalās ar 3, bet nedalās ar 9, jo $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$ dalās ar 9, bet 12 – nē. Taču tā nevar būt. Iegūtā pretruna parāda, ka pieņēmums ir bijis aplams. Tātad tādu skaitļu A un n nav.

2.6. Ja starp 3 taisnēm nav paralēlu un tās neiet caur vienu punktu, tad jebkurā gadījumā šīs taisnes veido trijstūri (skat. 4. zīm.)



4. zīm.

Nav grūti saskaitīt, ka no 6 taisnēm var izvēlēties 20 dažādus "taišņu trijniekus". Tāpēc neatkarīgi no tā, kā šīs 6 taisnes novilktas, ja vien tās apmierina sākumā aprakstītās prasības, tad tās veido tieši 20 trijstūrus.

2.7. sadalīsim šaha galdiņu deviņos apgabalos, kā parādīts 5. zīm..

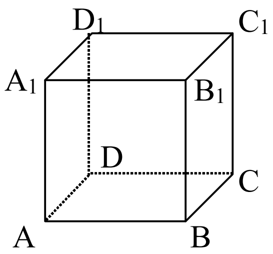
	x			x			x
	x			x			x
	x			x			x

5. zīm.

Katrā no šiem deviņiem apgabaliem jābūt atzīmētai vismaz vienai rūtiņai. Citādi katrā laukumiņā ir "sliktā" rūtiņa, kuras dēļ netiks izpildīta uzdevuma prasība (b).

To, ka 9 atzīmētas rūtiņas ir arī pietiekams skaits, parāda tas pats . zīm. (Uzskatām, ka slikto rūtiņu vietās ir izdarītas atzīmes.)

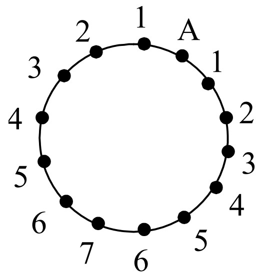
2.8. Pieņemsim, ka kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (6. zīm.) apmierina uzdevuma prasības. Lai 14 uz kuba uzrakstīto skaitļu summa būtu 0, septiņiem no tiem jābūt "+1" un septiņiem "-1". Tātad visu šo skaitļu reizinājums R=-1.



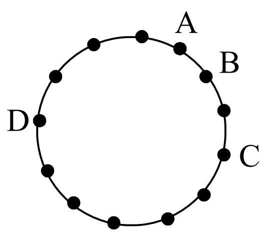
6. zīm.

Ievērosim, ka skaitlis a_1, kas ierakstīts virsotnē A_1, reizinājumā R kā reizinātājs parādās tieši četrās vietās: kā skaitlis, kurš ierakstīts 1) virsotnē A_1; 2) uz skaldnes AA_1B_1B; 3) uz skaldnes A_1ADD_1; 4) uz skaldnes $A_1B_1C_1D_1$. Tas pats sakāms par visās citās virsotnēs ierakstītajiem skaitļiem. Tātad reizinājumā R katrs no astoņiem virsotnēs ierakstītajiem skaitļiem parādās ceturtajā pakāpē, tātad R=1 un mūsu pieņēmums ir bijis aplams.

2.9. Attēlosim zobratu kā riņķa līniju, bet tā zobus – kā punktus uz šīs riņķa līnijas. Teiksim, ka attālums starp zobiem A un B ir 5, ja mazākais no riņķa līnijas lokiem, kas izveidojas starp šiem punktiem, sastāv no 5 mazajiem lokiem. Skaidrs, ka var būt tikai7 atšķirīgi attālumi (skat. 7. zīm.)



7. zīm.



8. zīm.

Novīlējot 4 zobratu pārus (caurumu vietas apzīmēsim ar A, B, C, D), starp caurumiem rodas 6 attālumi: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Tātad zobrats ir jāpagriež tā, lai novīlētā zoba vieta A pārbīdītos pulksteņa rādītāja virzienā (vai arī pretējā virzienā) par septīto attālumu.

13 zobu zobratos, izgriežot 4 zobus, kā parādīts 8. zīm., mēs zobratus nevarēsim salikt prasītajā veidā. Šī apgalvojuma patiesību viegli pārbaudīt, tieši griežot zobratu par visiem iespējamiem attālumiem.

2.10. Sauksim maisiņu par piepildītu, ja tajā būs ieliktas grāmatas, kuru masa sasniedz vai pārsniedz 2 kg, bet nepārsniedz 3 kg (tādu maisiņu izveidot var, jo neviena grāmata nesver vairāk par 1 kg). Četros piepildītos maisiņos būs grāmatas, kas kopā sver vismaz 8 kg. Tāpēc atlikušās grāmatas noteikti nesver vairāk par 2 kg un tās var aiznest ar pēdējo – piekto maisiņu. Ar četriem maisiņiem Andrim varētu arī nepietikt. Ja viņam būtu 13 grāmatas, katra no kurām sver 10/13 kg, tad vienā maisiņā varēs nest ne vairāk par 3 grāmatām, līdz ar to 13-4·3=1 grāmatai pietrūkst vietas. Tātad 5 ir mazākais nepieciešamo maisiņu skaits.

2.11. Jā. Tāds ir, piemēram skaitlis n=$\underbrace{10000100001000010...0100001}_{2000\ \text{vieninieku}}$

Pieņemsim, ka M dalās ar n. Tad M=n·k, kur k – naturāls skaitlis. ja k≤99999, tad skaitļa n·k decimālais pieraksts 2000 reizes satur skaitļa k pierakstu (atsevišķās ciparu grupas var būt atdalītas ar vienu vai vairākām nullēm). Ja k=100000, tad n·k ir tieši 2000 ciparu, kas atšķiras no nulles. Ja k>100000, ievērosim, ka n ir 9996-ciparu skaitlis, bet j ir vismaz 6-ciparu skaitlis, tātad skaitlim n·k ir vismaz 9996+6-1=10001 cipari.

Nosvītrosim skaitlim n·k pirmo ciparu un pieskaitīsim to ciparam, kas skaitlī n·k atradās 10001-ajā vietā. Viegli saprast, ka pēc šo operāciju veikšanas, skaitļa nenulles ciparu skaits vai nu paliks nemainīgs, vai palielināsies par 1, jo saskaitīšanā varēja rasties pārnesumi. Apzīmējot skaitļa n·k ciparu skaitu ar a, bet tā pirmo ciparu ar c, iegūstam, ka skaitlis n·k ir pamazinājies par

$$c\cdot(10^{a-1}-10^{a-10001})=c\cdot 10^{a-10001}\cdot\underbrace{99999...99}_{10000\ \text{devīevītnu}}=c\cdot 10^{a-10001}\cdot 99999n,$$

tas ir, par skaitli, kas dalās ar n. Tātad jauniegūtais skaitlis vēl aizvien dalās ar n. Turpinot ciparu skaita samazināšanu aprakstītajā veidā, agri vai vēlu nonāksim pie skaitļa $n\cdot k_1\leq 100000$. Skaitlī $n\cdot k_1$ ir vismaz 2000 nenulles ciparu, tātad arī skaitlī n·k to bija vismaz tikpat daudz.

2.12. Divnieka pakāpes var beigties ar cipariem 2, 4, 6, 8. Tā kā ciparu summai ir jābūt 4, tad abas pēdējās iespējas atkrīt. Ja pēdējais cipars ir 4, tas ir arī vienīgais cipars skaitļa pierakstā, atliek izpētīt gadījumu, kad pēdējais cipars ir 2. Skaitļa priekšpēdējais cipars var pieņemt tikai trīs vērtības 0, 1 vai 2. Katra gadījuma analīze parāda, ka neviens no skaitļiem, kas beidzas ar cipariem "02", "12" un "22" un kura ciparu summa ir 4, nevar būt divnieka pakāpe. Tas nozīmē, ka ir tikai viens skaitlis ar minēto īpašību – divnieka kvadrāts.

3. nodarbības atrisinājumi

3.1. Nē, nevar. Apzīmēsim nezināmos skaitļus ar burtiem (skat. 9. zīm.).

1	a	b	c	d	e	f	g	h	2

9. zīm.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem 1+a+b=a+b+c, tātad c=1. Līdzīgi iegūstam, ka f=1. Bet, ejot no otra gala, redzam, ka 2+g+h=g+h+f, tātad f=2, rodas pretruna.

3.2. Visu naturālo skaitļi no 1 līdz 9 ieskaitot reizinājums ir 1·2·3·4·5·6·7·8·9=362 880.

Iedomāsimies, ka šie skaitļi sadalīti grupās pa 3 un katrai grupai atrasts tajā ieejošo skaitļu reizinājums: apzīmēsim šos reizinājumus ar A, B un C.

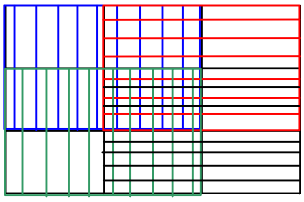
Tā kā reizinājumā AB·C katrs no skaitļiem 1; 2; …, 9 ietilpst tieši vienu reizi, tad A·B·C=362 880.

Pieņemsim, ka lielākais no skaitļiem A, B un C nepārsniedz 71. Tad arī pārējie nepārsniedz 71 un A·B·C≤71·71·71=357 911. Bet tā nevar būt, jo 362 880>357 991. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un lielākais no skaitļiem A, B un C nevar būt mazāks par 72.

Sekojošais piemērs parāda, ka tas var būt 72:

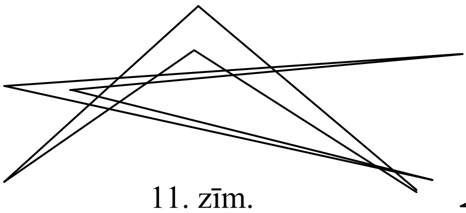
A=9·8·1=72
B=6·4·3=72
C=2·5·7=70.
Tātad lielākā reizinājuma mazākā iespējamā vērtība ir 72.

3.3. Vislielākais attālums starp mazā kvadrāta diviem punktiem ir tā diagonāle – $2\sqrt{2}$ cm<3 cm. Tātad divas lielā kvadrāta virsotnes ar vienu mazo kvadrātu pārklāt nevar, tas nozīmē, ka ir nepieciešami vismaz 4 mazie kvadrāti. To, ka ar tādu skaitu pietiek, var redzēt 10. zīm.

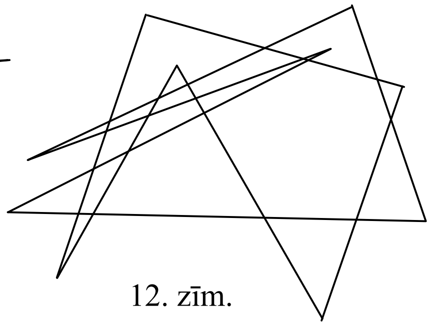


10. zīm.

3.4. Lielākais krustpunktu skaits, krustojoties diviem četrstūriem, radīsies, ja viens četrstūra katra mala krustos visas otra četrstūra malas. Tā rezultātā radīsies 4x4=16 krustpunkti. Kā šādus četrstūrus var konstruēt, parādīts 11. zīm.



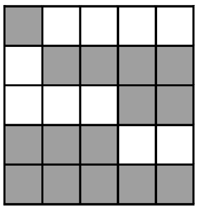
11. zīm.



12. zīm.

Gadījumā ar diviem piecstūriem var pierādīt, ka lielākais krustpunktu skaits ir 18. Kā to iegūt skat. 12. zīm.

3.5. Visas trīs prasības ir apmierinātas 5x5 rūtiņu kvadrātā, kurš attēlots 13. zīm.



13. zīm.

Pieņemsim, ka mēs arī 6x6 rūtiņu kvadrātā esam atzīmējuši dažas rūtiņas tā, ka visas trīs uzdevuma prasības ir apmierinātas. Tā kā mazākais rūtiņu skaits, kuras drīkst atzīmēt, ir 1, bet lielākais – 6 un tā kā katrā no 6 rindām jābūt atzīmētam citam rūtiņu skaitam, tad skaidrs, ka kopējais atzīmēto rūtiņu skaits, skaitot pa rindām, būs

1+2+3+4+5+6=21. Skaitot atzīmētās rūtiņas pa kolonnām, iegūsim skaitļa 6 daudzkārtni, bet 21 ar 6 nedalās bez atlikuma, tātad mūsu pieņēmums ir bijis aplams.

3.6. Apskatīsim patvaļīgas 4 rūtiņas, kas veido kvadrātu ar izmēriem 2×2, tajās ierakstītos skaitļus apzīmēsim, kā parādīts 14. zīm.

a	b
d	c

14. zīm.

Pēc uzdevuma nosacījumiem a+b+c, b+c+d, c+d+a ir pāra skaitļi. Tātad arī summa

$$(a+b+c)+(b+c+d)+(c+d+a)=2(a+b+c+d)+c$$

ir pāra skaitlis. Tā kā 2(a+b+c+d) ir pāra skaitlis, tad arī c ir pāra. Līdzīgi pierāda, a, b, un d ir pāra skaitļi. Tā kā katru 5×5 kvadrāta rūtiņu var iekļaut kādā 2×2 kvadrātā, tad visās 5×5 kvadrāta rūtiņas ir ierakstīti pāra skaitļi.

3.7. Pieņemsim, ka katrs skolēns darbojas ne vairāk kā divos pulciņos. ja skolēnus un pulciņus attēlotu ar punktiem, bet skolēna dalību kādā no pulciņiem attēlotu ar bultiņu, tad n skolēnu gadījumā būtu novilktas ne vairāk kā 2n bultiņas. Tā kā ir 5 pulciņi, tad atrastos tāds, uz kuru būtu novilktas ne vairāk kā $\frac{2}{5}$n bultiņas, jeb mazāk kā puse, esam ieguvuši pretrunu ar uzdevuma nosacījumiem, tātad noteikti var atrast skolēnu A, kas darbojas vismaz 3 pulciņos (pieņemsim, ka tie ir P_1, P_2, P_3). Tā katrā pulciņā darbojas vairāk kā puse skolēnu, tad acīmredzami, ka atradīsies tāds skolēns B, kas darbojas pulciņos P_4 un P_3, pretējā gadījumā pulciņos P_4 un P_5 darbojas vairāk skolēnu nekā ir klasē. Esam pierādījuši, ka eksistē tādi divi skolēni A un B, katrs no kuriem piedalās vismaz vienā no pulciņiem.

3.8. Apzīmēsim dotos skaitļus ar a_1, a_2, …, a_{14}, bet to summu ar A. No dotā seko, ka eksistē tādi veseli skaitļi A_1, $1 \le i \le 14$, ka

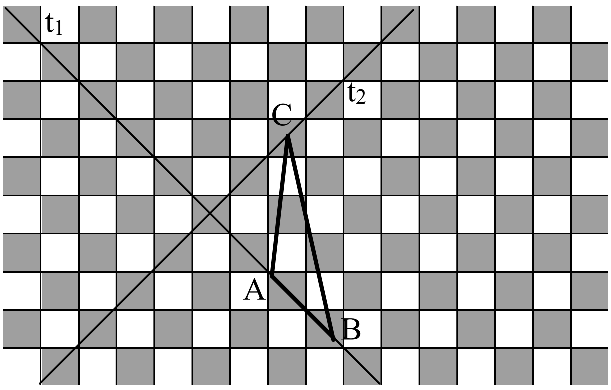
$$a_2+a_3+a_4\ldots a_{14}=3A_1$$
$$a_1+a_3+a_4\ldots a_{14}=3A_2$$
$$a_1+a_2+a_4\ldots a_{14}=3A_3$$
$$\ldots$$
$$a_1+a_2+a_3\ldots a_{13}=3A_{14}$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūsim $13(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{14})=13A=3(A_1+A_2+\ldots+A_{14})$, tā kā 13 ir pirmskaitlis, tad A dalās ar 3. Ievērojot to, ka $A=3A_i+a_i$, secinām, ka arī a_i dalās ar 3. Izdalīsim visus a_i ar 3 (pieņemsim, ka tiek iegūti skaitļi b_1, b_2, …, b_{14}) un aplūkosim tās trīs grupas G_1, G_2, G_3, kurās varēja sadalīt pirmos trīspadsmit skaitļus saskaņā ar uzdevuma prasībām. Skaitli b_{14} neaiztiksim, bet ar pārējiem rīkosimies tā: liksim vienā grupā b_1 b_2, b_3 utt., ja attiecīgi skaitļi a_1, a_2, a_3 utt. bija vienā grupā. Arī šoreiz skaitļi būs sadalīti trīs grupās ar vienādām summām. Līdzīgi kā iepriekš, pierādām, ka katrs no skaitļiem b_1 dalās ar 3. Izdalām tos, dalām grupās, pierādām, ka katrs no jauniegūtajiem skaitļiem dalās ar 3 utt. Skaidrs, ka šis process nekad nebeigsies. Tā kā nav tādu veselu skaitļu, izņemot nulli, kurus bezgalīgi dalot ar 3, visu laiku dalījumā rastos vesels skaitlis, tad uzdevumā dotā īpašība var būt spēkā tikai tad, ja $a_1=a_2=\ldots=a_{14}=0$.

3.9. Salikts skaitlis satur vismaz divus pirmreizinātājus. Ja mazākais no tiem būtu 11 vai vairāk, tad pats skaitlis nebūtu mazāks par $11\cdot11=121>120$. Tā nevar būt. Tātad katra skaitļa mazākais pirmreizinātājs nepārsniedz 10.
Ir tikai 4 pirmskaitļi, kas nepārsniedz 10: tie ir 2; 3; 5; 7. Tā kā doti 5 salikti skaitļi, tad vismaz diviem no tiem būs viens un tas pats mazākais pirmreizinātājs; tātad to lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks par 1.

3.10. Apskatīsim summu $a+b+c=1989$ un pieņemsim, ka starp a, b, c lielākais ir c. Skaidrs, ka skaitļa c lielākā vērtība ir $c=1989-(1+2)=1986$. Tā kā $1989:3=633$,tad skaitļa c vērtība nevar kļūt mazāka par 664, jo kādam no skaitļiem ir jābūt lielākam par katru no atlikušajiem. Tātad lielākais no skaitļiem var pieņemt vērtības no 664 līdz 1986.
Acīmredzami, ka vidējā skaitļa mazākā iespējamā vērtība ir 2. Tā kā $b<c$, tad $2b<b+c\leq1988$ jeb $b<994$, tā kā b ir vesels skaitlis, tad $b\leq993$. Tātad vidējais skaitlis var pieņemt vērtības no 2 līdz 993.

3.11. Novilksim divas savstarpēji perpendikulāras taisnes t_1 un t_2, tā, lai tās iet pa melno rūtiņu diagonālēm. Novietosim vienu no trijstūra ABC malām (piemēram, malu AB) uz taisnes t_1 (skat. 15. zīm.)



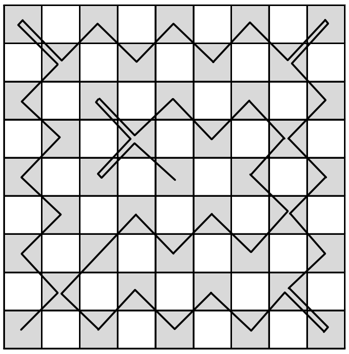
15. zīm.

Līdz ar to virsotnes AB atradīsies melnajos kvadrātiņos. Lai panāktu to, ka arī virsotne C ir melnajā kvadrātiņā, slīdināsim trijstūri ABC pa taisni t_1 taisnes t_2 virzienā. Acīmredzami, ka pienāks brīdis, kad virsotne C atradīsies uz taisnes t_2, šajā momentā visas trīs trijstūra virsotnes būs melnajos kvadrātiņos.

3.12. Apzīmēsim melnās rūtiņas tā, kā parādīts 16. zīm. Ja sākotnējā rūtiņa ir A, tad vēlreiz rūtiņā A figūriņa nonāks tikai pēc diviem gājieniem. Tā kā ar burtu A ir atzīmētas 25 rūtiņas, tad to apstaigāšanai ir nepieciešami vismaz $2\cdot(25-1)=48$ gājieni, ja kustība tiks uzsākta rūtiņā B, tad A rūtiņu apstaigāšanai būs nepieciešami vismaz $1+48=49$ gājieni. Tātad mazākais gājienu skaits ir 48 (skat. 17. zīm.)

A		A		A		A		A
	B		B		B		B	
A		A		A		A		A
	B		B		B		B	
A		A		A		A		A
	B		B		B		B	
A		A		A		A		A
	B		B		B		B	
A		A		A		A		A

16. zīm.



17. zīm.

4. nodarbības atrisinājumi

4.1. Virknē 4; 0; 8; 1; 7; 2; 6; 3; 5; 9 no jebkuriem trim pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem var izvēlēties divus, kuru summa ir 8.

4.2. Izveidosim "mērlenti", kur ar punktiem būs atzīmēti veseli centimetri, pieaugšanas virziens – no kreisās uz labo. Apzīmējot zēnus ar B, D, E un A, iegūstam, ka pavasarī bija 18. a zīm. attēlotā situācija. Zinot, ka rudenī Andris izrādījās garāks par Bruno, varam palidināt savu mērlenti ar jaunām atzīmēm (skat. 18. b zīim.).

PAVASARIS E D B A

● ● ● ● ● ●

18. a zīm.

PAVASARIS E D B A

● ● ● ● ● ● … ● ● ● ● ●

RUDENS B A

18. b zīm.

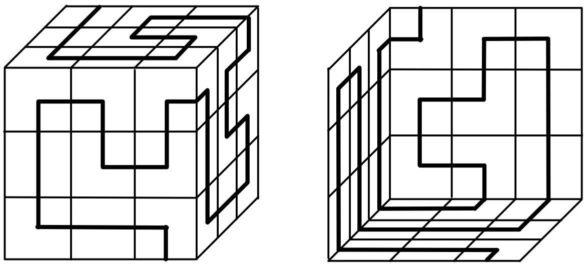
Kādam no zēniem rudenī ir jābūt garākam par Bruno un īsākam par Andri. Ja tas ir Didzis, tad Egils noteikti ir visgarākais, pretējā gadījumā gan Egils, gan Andris būs paaugušies par vienādu skaitu centimetru. Ja tas ir Egils, tad šoreiz Didzim ir jābūt visgarākajam, pretējā gadījumā par vienādu skaitu centimetru būs paaugušies Didzis un Bruno. Esam izskatījuši visus gadījumus un redzam, ka rudenī visīsākais bija Bruno.

4.3. Taisni, kas pulksteņa ciparnīcā savieno atzīmēs pl. 12.00 un pl. 6.00, sauksim par galveno asi. Ja patvaļīgā laika momentā T laikā starp 3.00 un 21.00 rādītāji veido 120^0 lielu leņķi, tad abi rādītāji nevar vienlaicīgi atrasties uz galvenās ass. Attēlosim rādītājus simetriski pret galveno asi, tad jauniegūtais rādītāju stāvoklis atbildīs laika momentam T' starp 3.00 un 21.00 (pie tam $T' \neq T$) un arī momentā T' rādītāji veidos 120^0 lielu leņķi.

4.4. Ievērosim, ka 888 888:7=126984, bet 444 444:7=63492, tātad jautājuma zīmes vietā nepieciešams tāds cipars, lai arī skaitlis 88?44 dalītos ar 7. Pārbaudot visas iespējas, iegūstam, ka der cipari 1 un 8.

4.5. Skaidrs, ka tieši divi no šiem 6 reizinājumiem dalīsies ar 5 – tieši viena rindiņa un kolonna satur ciparu 5. Tātad, ja uzdevuma nosacījumi būtu izpildāmi, katram no atlikušajiem 4 reizinājumiem būtu jādalās ar 9. Ja 6 un 3 ietilpst vienā reizinājumā (piemēram, abi ir vienā rindiņā), tad katrā kolonnā, kas satur kādu no šiem skaitļiem, ir jābūt vēl vienam skaitlim, kas dalās ar 3, taču mūsu rīcībā ir tikai viens skaitlis, tātad šāds gadījums nav iespējams. Ja skaitļi 6 un 3 nav ne vienā rindiņā, ne vienā kolonnā, arī šajā gadījumā ir nepieciešami divi skaitļi, kas dalās ar 3 – tie jāieraksta attiecīgo kolonnu un rindiņu krustojumos. Tāpat kā iepriekšējā gadījumā secinām, ka šāds gadījums nav iespējams. Tātad ierakstīt skaitļus prasītajā veidā nevar.

4.6. 19. zīm. parādīta uzdevuma nosacījumus apmierinoša līnija. 19. a zīm. par ādītas trīs kuba redzamās skaldnes, 19. b zīm. – trīs neredzamās, skatoties uz tām it kā no iekšienes.



a b

19. zīm.

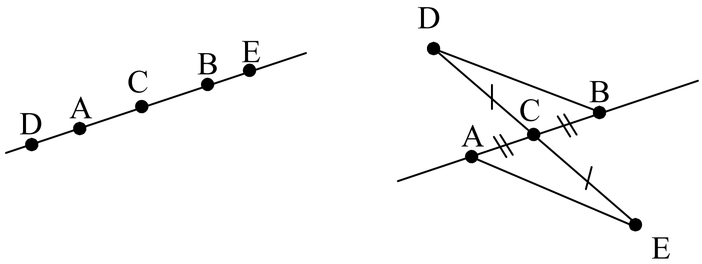
4.7. Jā, var. Piemēram, der sekojoša kārtība:

99; 2; 97; 4; 95; 6; …; 5; 96; 3; 98; 1,

kur nepāra vietās dilstošā secībā ierakstīti nepāra skaitļi, bet pāra vietās augošā secībā – pāra skaitļi.

4.8. Visas šaha galdiņa rūtiņas ir sadalāmas pāros: vienā pārī ietilpst rūtiņas, kas ir simetriskas viena otrai attiecībā pret galdiņa centru. Ja pirmais spēlētājs aizvien izvēlēsies rūtiņu, kas ietilpst vienā pārī ar rūtiņu, kas satur figūriņu, tad viņš uzvarēs. Tā kā otrais spēlētājs ar savu kārtējo gājienu var tikai "ieiet" jaunā rūtiņu pārī, tad pirmais spēlētājs, izvēloties otru attiecīgā pāra rūtiņu, vienmēr varēs izdarīt gājienu. Atlicis pamatot, ka pirmais spēlētājs pārvietos figūriņu par lielāku attālumu nekā otrais spēlētājs. Pieņemsim, ka pirmais spēlētājs ar savu pēdējo gājienu ir pārvietojis figūriņu no lauciņa A viduspunkta uz lauciņa B viduspunktu, bet otrais spēlētājs to pārvieto uz lauciņa D viduspunktu. Ir iespējami divi gadījumi.

1) Punkts D atrodas uz taisnes AB, bet ne starp punktiem A un B, pretējā gadījumā viņš būs zaudējis (skat. 20. a zīm.). Pirmajam spēlētājam, saskaņā ar savu stratēģiju figūriņa jāpārvieto uz punktam D simetrisko punktu E. Acīmredzami, ka DE>DB.



(a) (b)

20. zīm

2) Punkts D neatrodas uz taisnes AB (skat. 20. b zīm.). Pieņemsim, ka DB>DE, tādā gadījumā vienlaicīgi izpildās nevienādības AB<BD un DE<DB jeb CB<0,5DB un CD<0,5DB, taču tad trijstūrim DCB neizpildās trijstūra nevienādība, tā nevar būt, tātad pieņēmums ir bijis aplams un DE>DB, k.b.j.

4.9. Skat., piemēram, 21. zīm.

*				*			
*	*						
	*	*					
		*	*				
			*	*			
					*		
						*	
							*

21. zīm.

4.10. Pieņemsim, ka mums ir 8 konteineri ar masu 0,5+2ε t un 1 konteiners ar masu 0,5-ε, kur 0<ε, tāpēc konteineru kopējā masa ir lielāka par 4,5 t. Jau 8 vieglāko konteineru masa pārsniedz 4 t, bet divu vieglāko konteineru masa pārsniedz 1 t, tas nozīmē, ka ar vienu "lielo" un vienu "mazo" mašīnu nevar aizvest vairāk par 8 konteineriem, no tā, savukārt seko, ka nekādu masu, kas pārsniedz 4,5 t, nevar garantēti aizvest prasītajā veidā.

Pieņemsim, ka masa m apmierina sakarību 4 t<m≤4,5 t. Sāksim ievietot "lielajā" mašīnā konteinerus, līdz to masa S būs ne lielāka kā 4 t, bet cenšoties pievienot vēl kādu no atlikušajiem konteineriem ar masu y, iegūstam S+y>4. Visu pārējo konteineru masu apzīmēsim ar x tonnām. Tātad

$$S+y+x=m\leq 4{,}5 \text{ t.}$$

Pastāv divas iespējas:

a) S≥3,5. Tad x+y1. Varam aizvest S tonnas ar "lielo", bet y+x ar "mazo mašīnu.

b) S<3,5. Tā kā S+y>4 un S+y+x≤4,5, tad x≤0,5. Tāpēc masu S+x var aizvest ar "lielo", bet masu y – ar "mazo" mašīnu. Esam pierādījuši, ka masu 4,5 t var aizvest neatkarīgi no tās sadalījuma pa konteineriem, bet masu, kas lielāka par 4,5 t – ne vienmēr, tāpēc lielākā kopējā kravas masa, kuru noteikti var aizvest, ir 4,5 t.

4.11. Sadalīsim visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100 sekojošās 7 grupās:

{1}
{2; 3}
{4; 5; 6;}
{7; 8; 9; 10; 11; 12; 13}
{14; 15; 16; …; 25}
{26; 27; 28; …; 50}
{51; 52; 53; …; 100}.

Tā kā katrā grupā (kurā ir vairāk nekā viens skaitlis) lielākā skaitļa attiecība pret mazāko ir mazāka par 2, tad neviens skaitlis nedalās ar citu savas grupas skaitli.

Mazāk kā 7 grupas nevar būt, jo aplūkojot septiņus skaitļus 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64, kļūst skaidrs, ka katram no tiem vajag savu grupu.

4.12. Viena no iespējām, kā ierakstīt skaitļus saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, parādīta 22. zīm. Tabulas ārpusē pierakstītas attiecīgo kolonnu (rindiņu) skaitļu summas.

1	1	1	-1	1	-1	1	-1	2
0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	1	-1	4
-1	-1	0	-1	1	-1	1	-1	-3
1	1	1	1	1	1	1	-1	6
-1	-1	-1	-1	0	-1	1	-1	-5
1	1	1	1	1	1	1	1	8
-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	-7
1	0	3	-2	5	-4	7	-6	

22. zīm.

Var pierādīt, ka kvadrātveida tabulā, kas sastāv no pāra skaita rūtiņu var ierakstīt skaitļus 1, 0 un -1 prasītajā veidā, bet tabulai, kas sastāv no nepāra skaita rūtiņu, – nevar.