“Profesora Cipariņa klubs” 1988./89. m.g.

1. nodarbība

1.1. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 9, 11, 13, 15, 17, 19. Atļauts nodzēst jebkurus divus skaitļus un to vietā uzrakstīt abu summu, no kuras atņemts vieninieks. Šādas darbības turpinām, kamēr uz tāfeles paliek viens pats skaitlis. Kāds tas būs? Vai tas vienmēr būs viens un tas pats? Kāpēc?

1.2. Jānis saskaitīja trīs pēc kārtas sekojošus veselus pozitīvus skaitļus, bet Andris – trīs nākamos pēc kārtas sekojošos veselos pozitīvos skaitļus. Pēteris sareizināja abus iegūtos rezultātus un ieguva skaitli 111 111 111.
Pierādīt, ka vismaz viens no zēniem kļūdījās.

1.3. Tabulā ir 3×3 rūtiņas. Sākumā visās rūtiņās ierakstītas nulles. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties četras rūtiņas, kas veido kvadrātu ar izmēriem 2×2, un tajās esošajiem skaitļiem visiem pieskaitīt pa vieniniekam. Vai var, izpildot daudzus šādus gājienus, iegūt tabulu A vai tabulu B?

A

4	9	5
10	22	12
6	13	7

B

4	9	5
10	18	12
6	13	7

1.4. Vai var izrakstīt rindā naturālus skaitļus no 1 līdz 100, katru vienu reizi, tā, lai katri divi blakus uzrakstītie skaitļi atšķirtos vismaz par 50?

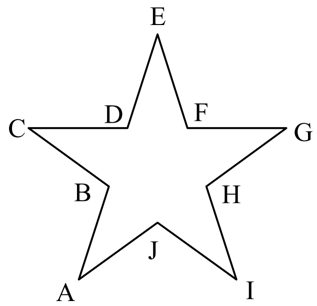
1.5. Vai var atrast 19 pēc kārtas ņemtus skaitļus, kuru summa dalās ar 88?

1.6. Dots kvadrāts, kas sastāv no 5×5 rūtiņām. Tajā ar sarkanu krāsu jāatzīmē četru rūtiņu centri tā, lai četri atzīmētie punkti būtu kāda kvadrāta virsotnes. Cik dažādos veidos to var izdarīt?

1.7. Taisnstūrveida tabulā ir A rindas un B ailes. Tabulas rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz A×B augošā kārtībā pa rindiņām, sākot ar pirmo. Zināms, ka 20 ierakstīts trešajā rindā, 41 – piektajā, bet 103 – pēdējā rindā. Atrast A un B.

1.8. Aivars apgalvo, ka viņš atradis divus veselus skaitļus, no kuriem neviens nav 0 un kuriem piemīt īpašība: viens no šiem skaitļiem dalās ar abu summu, bet otrs – ar starpību. Vai tā var būt?

1.9. Vai var būt, ka piecstaru zvaigznē (1. zīm.) vienlaikus izpildās nevienādības $AB<AJ$, $JI<HI$, $HG<FG$, $FE<DE$, $DC<BC$?



1. zīm.

1.10. Kādā klasē katra meitene draudzējas ar pieciem klasesbiedriem (zēniem), bet katrs zēns – ar piecām klasesbiedrenēm. Pierādīt, ka šajā klasē ir vienāds skaits zēnu un meiteņu.

1.11. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādus pārveidojumus: vai nu pareizināt to ar 2, vai nosvītrot pēdējo ciparu.
Pierādīt, ka ar šo pārveidojumu palīdzību, lietojot tos daudzkārt, katru naturālu skaitli var pārveidot par jebkuru citu. (Tas jāpierāda skaitļiem, kas nepārsniedz 100.)

1.12. Cik starp skaitļiem no 1 līdz 1 000 000 (ieskaitot) ir tādu, kas nav ne vesela skaitļa kvadrāts, ne kubs, ne cita pakāpe, kura augstāka par pirmo?

2. nodarbība

2.1. Rindā izrakstīti 6 pēc kārtas ņemti veseli pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka tieši viens no tiem dalās ar 6. Cik no tiem var dalīties ar 4?

2.2. Deviņās aizvērtās kastēs atrodas 3 grāmatas (katrā kastē ir ne vairāk kā viena grāmata). Kādu mazāko kastu daudzumu pietiek atvērt, lai noteikti uzzinātu, kurās kastēs ir grāmatas?

2.3. Ievietot izteiksmē 1:2:3:4:5:6:7:8:9 iekavas tā, lai tās vērtība kļūtu a) lielākā iespējamā, b) mazākā iespējamā. Risinājumu pamatot.

2.4. Plaknē atzīmēti 3977 punkti. Vai var noteikti novilkt taisni tā, lai vienā pusē no tās atrastos 1988 atzīmētie punkti, bet otrā pusē – 1989 atzīmētie punkti?

2.5. Jānis iedomājās naturālu skaitli A, pareizināja to pašu ar sevi un rezultātam pieskaitīja 12. Andris sareizināja visus veselos skaitļus no 1 līdz n ieskaitot. Abi rezultāti izrādījās vienādi. Atrast A un n!

2.6. Plaknē novilktas 6 taisnes. Starp tām nav paralēlu, un nekādas 3 novilktās taisnes neiet caur vienu punktu. Vai visos gadījumos veidosies viens un tas pats trijstūru skaits? (Jāskaita arī tie trijstūri, kas sastāv no vairākām daļām.)

2.7. Kāds mazākais šaha galdiņa rūtiņu skaits jāatzīmē tā, lai vienlaikus izpildītos divas prasības:
a) nekādām divām atzīmētām rūtiņām nav ne kopīgas malas, ne kopīgas virsotnes,
b) ja atzīmē vēl jebkuru citu rūtiņu, a) prasība neizpildās.

2.8. Katrā kuba virsotnē ierakstīja "+1" vai "-1". Pēc tam katras skaldnes centrā uzrakstīja to četru skaitļu reizinājumu, kas ierakstīti šīs skaldnes stūros.
Vai var gadīties, ka visu 14 uz kuba uzrakstīto skaitļu summa ir 0?

2.9. Doti divi vienādi zobrati, katrs ar 14 zobiem. Tos uzlika vienu uz otra tā, ka zobi sakrīt (abu zobratu projekcija plaknē izskatās kā viens zobrats). Pēc tam novīlēja 4 pārus sakrītošo zobu. Vai taisnība, ka neatkarīgi no tā, kuri zobu pāri novīlēti, abus zobratus varēs uzlikt vienu uz otra tā, lai to projekcija plaknē izskatītos kā viens vesels zobrats?
Kāda būtu atbilde, ja katram zobratam ir 13 zobi?

2.10. Andris zina, ka viņam no skolas vajadzēs atnest mājā vairākas grāmatas, kuras kopā sver 10 kg. Neviena grāmata nesver vairāk par 1 kg. Grāmatu skaitu viņš nezina. Viņam ir vairāki maisiņi. Katrā maisiņā var nest ne vairāk kā 3 kg. Kāds mazākais maisiņu daudzums Andrim Jāpaņem, lai tajos varētu atnest visas grāmatas?

2.11. Naturālu skaitli sauc par vienkāršu, ja tā pierakstā nav citu ciparu kā 0 un 1, turklāt vieninieku skaits nepārsniedz 1988.
Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ar kuru nedalās neviens vienkāršs skaitlis?

2.12. Kādas ir tās divnieku pakāpes, kuru ciparu summa ir 4?

3. nodarbība

3.1. Vai var zvaigznīšu vietā ierakstīt skaitļus tā, lai katru triju blakus uzrakstītu skaitļu summa būtu viena un tā pati?

1 * * * * * * * * 2

3.2. Andris sadalīja skaitļus no 1 līdz 9 trijās grupās pa 3 skaitļiem katrā un aprēķināja katras grupas skaitļu reizinājumu. Kāda vismazākā vērtība var būt vislielākajam no šiem reizinājumiem?

3.3. Kvadrāts ar izmēriem 3 cm×3 cm jāpārklāj ar mazākiem kvadrātiem, kuru izmēri ir 2 cm×2 cm. Kāds ir minimālais mazāko kvadrātu skaits, ar kuru to var izdarīt?

3.4. Plaknē uzzīmēti divi četrstūri. Kāds ir lielākais iespējamais punktu skaits, kuros to malas krustojas? Kāda būtu atbilde, ja četrstūru vietā būtu piecstūri?

3.5. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Dažas rūtiņas jāatzīmē tā, lai vienlaikus būtu apmierinātas šādas trīs īpašības:

a) katrā rindiņā jābūt atzīmētai vismaz vienai rūtiņai;

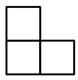
b) rindiņās atzīmēto rūtiņu skaitiem visiem jābūt dažādiem;

c) visās kolonnās jābūt atzīmētam vienam un tam pašam rūtiņu daudzumam.

Kā to izdarīt?

Vai to var izdarīt, ja kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām?

3.6. Kvadrāts sastāv no 5 ×5 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts pa naturālam skaitlim, turklāt tā, ka ikkatrā "stūrītī" (2. zīm.) ierakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis.



2. zīm.

3.7. Klasē darbojas 5 pulciņi. katrā pulciņā piedalās vairāk nekā puse no klases skolēniem. Pierādīt, ka var atrast tādus 2 skolēnus, ka ikkatrā pulciņā piedalās vismaz viens no viņiem.

3.8. Doti 14 veseli skaitļi. Zināms, ka jebkurus 13 no tiem var sadalīt trijās grupās ar vienādām summām. Pierādīt, ka visi skaitļi ir 0.

3.9. Doti 5 salikti skaitļi, kas nepārsniedz 120. Pierādīt, ka vismaz diviem no tiem eksistē kopīgs dalītājs, kas lielāks par 1.

3.10. Dots, ka a, b, c, – dažādi naturāli skaitļi, kuru summa ir 1989. Kādas vērtības var pieņemt lielākais no tiem? Kādas vērtības var pieņemt vidējais no tiem?

3.11. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa un izkrāsota šaha galdiņa kārtībā. Dota trijstūrveida plāksnīte. Pierādīt, ka to var novietot uz lapas tā, ka visas virsotnes atradīsies melnajās rūtiņās (vai vismaz uz melno rūtiņu malām).

3.12. Kvadrāts sastāv no 9×9 rūtiņām, kas šaha galdiņa kārtībā izkrāsotas melnas un baltas. Stūra rūtiņas ir melnas. Figūriņu novieto melnā rūtiņā. Ar vienu gājienu tā var pāriet no rūtiņas A uz kādu rūtiņu, kam ar A ir kopīgs stūris, nevis kopīga mala. Kāds ir mazākais iespējamais gājienu skaits, ar kuriem figūriņa var apstaigāt visas melnās rūtiņas? Ar pēdējo gājienu nav obligāti jāatgriežas sākuma rūtiņā.

4. nodarbība

4.1. Vai var ciparus no 0 līdz 9 izrakstīt rindā (katru vienu reizi) tā, lai no jebkuriem trim pēc kārtas uzrakstītiem cipariem kaut kādu divu summa būtu 8?

4.2. Pavasarī Andris bija par 1 cm garāks nekā Bruno, par 2 cm garāks nekā Didzis un par 3 cm garāks nekā Egils. Vasarā visi paaugās, turklāt par dažādu skaitu centimetru. Kad rudenī zēni nostājās pēc auguma, izrādījās, ka ikkatrs nākamais ir par 1 cm īsāks nekā iepriekšējais, turklāt Andris par 2 cm garāks nekā Bruno. Kurš no zēniem rudenī bija visīsākais?

4.3. Apskata laika posmu no trijiem no rīta līdz deviņiem vakarā un šajā laika posmā atzīmē tos brīžus, kad stundu un minūšu rādītāji savā starpā veido 120° lielu leņķi. Pierādīt, ka šādu brīžu ir pāra skaits.

4.4. Kāds cipars jāievieto jautājuma zīmes vietā skaitlī 888…88?444..44 (gan astoņnieks, gan četrinieks uzrakstīti pa 50 reizēm), lai iegūtais skaitlis dalītos ar 7?

4.5. Dota tabula 3×3 rūtiņas. Vai šajās rūtiņās var ierakstīt ciparus no 1 līdz 9 (katru ciparu tieši vienu reizi) tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos vai nu ar 5, vai ar 9?

4.6. Vai var uz Rubika kuba virsmas uzzīmēt tādu slēgtu lauztu līniju, kas caur katru kvadrātu iet tieši vienu reizi (līnija nedrīkst iet caur kvadrātiņu stūriem)?

4.7. Vai var skaitļus no 1 līdz 99 izrakstīt rindā tādā kārtībā (katru vienu reizi), lai nekādu vairāku pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nedalītos ar 100?

4.8. Kādā šaha galdiņa lauciņā atrodas figūra. Divi spēlētāji pēc kārtas to pārvieto. Turklāt, sākot ar otro gājienu, figūra katru reizi jāpārvieto par lielāku attālumu, nekā tas darīts iepriekšējā gājienā. Kas uzvar spēlējot pareizi, – tas, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu? (Figūru vienmēr novieto tieši lauciņa centrā. Tas, kam pietrūkst gājienu, zaudē.)

4.9. Parādīt, ka tabulā ar izmēriem 8×8 rūtiņas var atzīmēt 13 rūtiņas tā, lai visas atzīmētās rūtiņas nebūtu iespējams izsvītrot, izsvītrojot 4 rindiņas un 4 kolonnas.

4.10. Krava iepakota konteineros. Katra konteinera masa nepārsniedz 1 tonnu. Mūsu rīcībā ir viena mašīna, kuras celtspēja ir 1 tonna, un viena mašīna, kuras celtspēja ir 4 tonnas. Kāda ir lielākā kopējā kravas masa, kuru noteikti var aizvest, ar katru mašīnu veicot 1 reisu?

4.11. Naturālie skaitļi no 1 līdz 100 jāsadala vairākās grupās tā, lai nevienā grupā neviens skaitlis nedalītos ne ar vienu citu šīs grupas skaitli. Kāds ir mazākais iespējamais grupu skaits?

4.12. Dota tabula 8×8 rūtiņas. Pierādīt, ka ikkatrā rūtiņā var ierakstīt vienu no skaitļiem -1; 0; +1 tā, lai visās rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu dažādas. Mēģiniet līdzīgu rezultātu pierādīt tabulām ar citiem izmēriem.