“Profesora Cipariņa klubs” 1989./90. m.g.

1. nodarbība

1.1. Gaismas signāls ielu krustojumā sāk darboties tieši 5.00. Tā darba režīms ir šāds: 30 sekundes deg zaļā gaisma, 5 sekundes – dzeltenā, 30 sekundes – sarkanā, 5 sekundes – dzeltenā, 30 sekundes deg zaļā utt. Jānis pienāca pie krustojuma plkst. 18.st. 19 min. 33 s. Kāda gaisma šajā brīdī dega?

1.2. Dots, ka $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 1155$; a, b, c, d, un e ir dažādi veseli pozitīvi skaitļi. Atrast $a+b+c+d+e$ vērtību.

1.3. Taisnstūra paralēlskaldņa T izmēri ir 3 cm× 4 cm× 5 cm. Cik ir tādu dažādu paralēlskaldņu, kuru garums, platums un augstums ir izsakāms ar veselu skaitu centimetru, tilpums mazāks par T tilpumu, bet virsmas laukums mazāks par T virsmas laukumu?

1.4. Vai veselos pozitīvos skaitļus no 1 līdz 35 var sadalīt divās grupās (katru skaitli iekļaujot vienā grupā) tā, lai vienā grupā iekļauto skaitļu summa būtu par 1989 lielāka nekā otrā grupā iekļauto skaitļu summa? Bet par 19 lielāka? Bet par 2 lielāka?

1.5. Vai var pa apli izrakstīt visus divciparu skaitļus (katru vienu reizi) tā, lai katri divi blakus uzrakstītie skaitļi atšķirtos tikai ar vienu ciparu? Kāda būtu atbilde, ja skaitļus vajadzētu rakstīt nevis pa apli, bet rindā?

1.6. Uz galda atrodas n konfektes. Andris un Juris spēlē šādu spēli: viņi pēc kārtas paņem no galda kaut kādu veselu skaitu konfekšu un apēd. Jāievēro divi nosacījumi:
a) ar pašu pirmo gājienu nedrīkst apēst visas konfektes (tas attiecas tikai uz to spēlētāju, kurš sāk spēli),
b) neviens ar savu gājienu nedrīkst apēst vairāk konfekšu, nekā iepriekšējā gājienā apēdis pretinieks.
Uzvar tas, kas apēd pēdējo konfekti.
Kas uzvar, pareizi spēlējot, – tas, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu? Atbildēt uz šo jautājumu, ja a) n=17, b) n=30, n=72, d) n=64.

1.7. Uz tāfeles uzrakstīti vairāki pozitīvi skaitļi. Katrs uzrakstītais skaitlis vienāds ar desmito daļu no visu pārējo uzrakstīto skaitļu summas. Cik skaitļu uzrakstīts uz tāfeles?

1.8. Vai jūs varat izdomāt tādu septiņstūra formas plāksnīti, ka ar tādām plāksnītēm var pārklāt visu plakni bez caurumiem un bez plāksnīšu savstarpējas pārklāšanās?

1.9. Dotas 1989 bļodiņas. Katrā no tām atrodas kaut kāds akmeņu skaits. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras divas bļodiņas un katrā no tām pievienot pa akmenim. Vai noteikti var panākt, lai akmeņu skaits visās bļodiņās kļūtu vienāds? Kāda būtu atbilde, ja bļodiņu skaits būtu 1988?

1.10. Pierādīt, ka ikkatrā daudzstūrī var atrast divas tādas malas, kuru garumu attiecība nav mazāka par 1, bet tajā pašā laikā mazāka par 2.

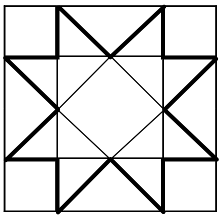
1.11. Vai taisni var nokrāsot 2 krāsās tā (katru punktu – vienā krāsā; izņēmuma kārtā tos punktus, kur saskaras dažādi nokrāsoti apgabali, var uzskatīt par nokrāsotiem abās krāsās), lai abās krāsās nokrāsotie apgabali būtu vienādi? Bet 5 krāsās?

1.12. Andris un Ivars pēc kārtas raksta uz tāfeles skaitļus no 1 līdz 12. Aizliegts rakstīt skaitļus, ar kuriem dalās kāds jau uzrakstīts skaitlis. Tas, kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš uzvar, pareizi spēlējot, – tas, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu?

2. nodarbība

2.1. Vai vienādībā 121-120=1 var pārcelt vienu ciparu tā, lai atkal iegūtu patiesu vienādību?

2.2. Katrā kvadrāta mala sadalīta 4 vienādās daļās. Dalījuma punkti savienoti tā, ka izveidojas auseklītis (1. zīm.)



1. zīm.

Zināms, ka visa kvadrāta nokrāsošanai vajag 16g krāsas. Cik krāsas vajag auseklīša nokrāsošanai? (Pieņemt, ka krāsa klājas vienmērīgi.)

2.3. Dotas 10 daļas. Starp to skaitītājiem pa reizi sastopami skaitļi 1, 2, 3, …, 10, tas pats attiecas uz to saucējiem. Zināms, ka visas daļas ir vienādas. Atrast tās.

2.4. Vai plaknē var atzīmēt 9 punktus un novilkt 5 taisnes tā, lai uz vienas taisnes būtu tieši 1 atzīmētais punkts, uz otras – tieši 2 atzīmētie punkti, …, uz piektās – tieši 5 atzīmētie punkti? Vai to var izdarīt, ja atļauts atzīmēt tikai 8 punktus?

2.5. Daļas skaitītājs ir A, bet saucējs – B (A un B – pozitīvi, bet ne noteikti veseli skaitļi. Gan A, gan B lielāki par 1, turklāt A lielāks nekā B. Andris vispirms noapaļoja A, pēc tam B, tad izdalīja skaitītāju ar saucēju un noapaļoja rezultātu. Jānis vispirms izdalīja A ar B un tad noapaļoja rezultātu. Kāda var būt lielākā iespējamā Andra un Jāņa iegūto rezultātu attiecība? Visas noapaļošanas notiek līdz veselam skaitlim.

2.6. Dots kvadrāts ar izmēriem 6×6 rūtiņas. Divi spēlētāji pēc kārtas ieraksta brīvajās rūtiņās pa vienam ciparam 1 vai 2 (katrs var rakstīt gan vienu, gan otru ciparu). Rūtiņā, kurā cipars jau ierakstīts, otru ciparu rakstīt nedrīkst. Uzvar tas, pēc kura gājiena pirmo reizi trijās pēc kārtas esošās rūtiņās (pa vertikāli, horizontāli vai diagonāli) parādās vienādi cipari. Kas uzvar, pareizi spēlējot, – pirmais vai otrais spēlētājs?

2.7. Doti 1989 skaitļi. Zināms, ka ikkatru 10 skaitļu summa ir pozitīva. Vai var gadīties, ka visu skaitļu summa ir negatīva?

2.8. Deviņas draudzenes svētkos apmainījās apsveikuma kartītēm. Katra nosūtīja kartītes piecām citām. Pierādīt, ka var atrast divas tādas draudzenes, kas nosūtīja kartītes viena otrai.

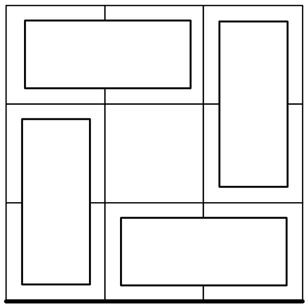
2.9. Cik ir tādu veselu pozitīvu skaitļu x, ka $\left[\dfrac{x}{10}\right]=\left[\dfrac{x}{11}\right]+1$ **?**

2.10. Skrējienā piedalās trīs sportisti A, B un C. Startā C aizkavējās un ceļā devās pēdējais, B ceļā devās otrais. Skrējiena laikā C ar citiem dalībniekiem mainījās vietām 6 reizes, bet A – 5 reizes. Zināms, ka B finišēja agrāk nekā A. Kādā secībā sportisti finišēja?

2.11. (Šajā uzdevumā minētajiem riņķiem un pusriņķiem visiem ir vienādi rādiusi.)

Vai var gadīties, ka ar figūru F nevar pārklāt pusriņķi, bet tajā pašā laikā ar divām figūrām, kas abas vienādas ar F, var pārklāt riņķi? Vai tā var gadīties, ja F ir izliekta figūra?

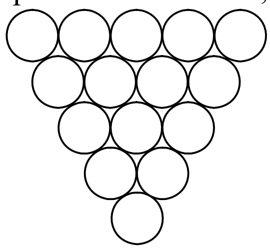
2.12. Dots taisnstūris ar izmēriem m×n rūtiņas; rūtiņas izmēri ir 1×1. Ir arī daudzi domino kauliņi ar izmēriem 1×2. kauliņi novietoti taisnstūrī tā, ka ikkatrs kauliņš pārklāj 2 rūtiņas. Kauliņi nepārklāj visu taisnstūri, bet pārbīdīt tos nav iespējams (taisnstūrim gar malām ir sieniņas, tāpēc kauliņi nevar izbīdīties ārpus taisnstūra). Šāda novietojuma piemērs redzams 2. zīm., vidējā rūtiņa nav pārklāta. Pierādīt, ka nepārklātas paliek mazāk nekā ceturtā daļa visu rūtiņu.



2. zīm.

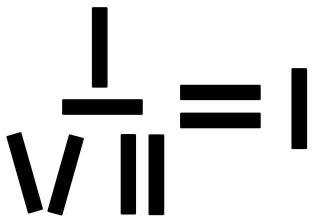
3. nodarbība

3.1. Ierakstīt 3. zīm. attēlotajos aplīšos skaitļus no 1 līdz 15 (katrā aplītī citu skaitli) tā, lai katros divos blakus aplīšos ierakstīto skaitļu starpība būtu ierakstīta aplītī, kas atrodas tieši zem tiem. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



3. zīm.

3.2. No 9 sērkociņiem izveidota aplama vienādība, kas parādīta 4. zīm. Pārlikt vienu sērkociņu citā vietā tā, lai iegūtu patiesu vienādību.

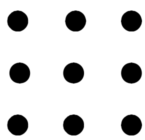


4. zīm.

3.3. Izteikt skaitli 1990 tikai ar vieninieku; tikai ar divnieku; …; tikai ar devītnieku palīdzību. Atļauts arī izmantot iekavas un aritmētisko darbību zīmes. Censties izmantot pēc iespējas mazāk ciparu.

3.4. Pasaku zemē izdod grāmatu sēriju. Grāmatas tiek numurētas: pirmā, otrā, trešā, … . Pirmajā 1000 grāmatās nav neviena attēla, bet katrā nākamajā ir 12 attēli, turklāt attēlus numurē, sākot ar pirmo. Numerācija ir vienota visām grāmatām.
Kāds būs tās grāmatas numurs, kura saturēs attēlu ar tādu pašu numuru?

3.5. Sniegbaltīte Ziemassvētkos izcepa kubveida torti no caurspīdīgā marcipāna. Sev, princim un katram no 7 rūķīšiem viņa iecepa tortē pa brīnumkoka sēkliņai.



5. zīm.

Vai Sniegbaltīte varēja sēkliņas iecept tortē tā, lai skatoties uz torti gan no priekšas, gan no augšas, gan no sāniem, redzamais sēkliņu izvietojums būtu tāds kā 5. zīm.

3.6. Naturālu skaitli pareizināja pašu ar sevi. Rezultātā ieguva vairākciparu skaitli, kuram visi cipari vienādi. Vai tā var būt?

3.7. Ārstam jāizmeklē trīs slimnieki, kas slimo ar dažādām infekcijas slimībām. Viņa rīcībā ir tikai divi sterili cimdu pāri un nav sterilizācijas līdzekļu. Kā viņam rīkoties, lai neinficētu nevienu slimnieku?

3.8. Vai var sadalīt skaitļus no 1 līdz 1000 deviņās grupās tā, lai nekādu divu grupas skaitļu starpība nebūtu no tās pašas grupas?

3.9. Skaitļi no 1 līdz 1989 uzrakstīti uz tāfeles. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties patvaļīgus divus no uzrakstītajiem skaitļiem, izdalīt to reizinājumu ar to summu, atmest ciparus aiz komata (ja tādi ir), pieskaitīt rezultātam vieninieku. Pēc tam abus izvēlētos skaitļus no dzēst un to vietā uzrakstīt iegūto skaitli. Šādi turpina, līdz uz tāfeles paliek tikai viens skaitlis. Kāds tas var būt?

3.10. Burtnīcā uzrakstīti 55 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100. Pierādīt, ka no šiem skaitļiem var atrast divus, kuru starpība ir tieši 9.

3.11. Kvadrātiskā režģī izvietoti 10×10 punkti. Parādīt, kā var daļu no tiem nokrāsot melnu, daļu – baltu un daļu – sarkanu, lai nebūtu neviena taisnstūra, kura malas paralēlas režģa malām un visas virsotnes nokrāsotas vienādi. (Katram punktam jābūt nokrāsotam vienā no trim krāsām.)

3.12. Aizmāršam mājās ir 80 zelta gabali. Viens no tiem sver 1 g, viens – 2 g, …, viens – 80 g. Ir arī sviras svari. Brīdi pa brīdim Aizmāršam iegribas uzzināt, cik sver kāds no zelta gabaliem.

Palīdzēt Aizmāršam izdomāt tādus 4 atsvarus, lai ar to palīdzību viņš par jebkuru zelta gabalu varētu noskaidrot, cik tas sver.

4. nodarbība

4.1. Kvadrāts sastāv no 25 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts viens no cipariem 1, 2, 3, 4. nekādām divām rūtiņām, kurās ierakstīti vienādi cipari, nav ne kopīgas mals, ne kopīga stūra. Cik vieninieku var būt ierakstīts kvadrātā? Atrast visas iespējas un pamatot, kāpēc citu iespēju nav.

4.2. Cik no 1 līdz 1000 ieskaitot ir tādu skaitļu, kuru ciparu summa ir 10?

4.3. Uz papīra lapas uzzīmēts piecstūris. Jānis katrā tā virsotnē ierakstīja pa vienam ciparam no 1 līdz 5 (dažādās virsotnēs – dažādus ciparus), bet pēc tam katrai malai un katrai diagonālei pierakstīja tās galos uzrakstīto ciparu reizinājumu. Kāda ir visu uzrakstīto skaitļu summa? Vai tā var mainīties, ja sākumā skaitļus virsotnēs ieraksta citādi?

4.4. Klasē ir 28 skolēni. Viens zēns un viena meitene sēž savos solos vieni paši. Visi citi sēž solos pa pāriem: vai nu zēns ar zēnu, vai meitene ar meiteni. Vai var būt, ka klasē zēnu un meiteņu ir vienāds skaits?

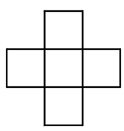
4.5. Skaitlim A galā pierakstīja kaut kādu ciparu un ieguva 13 reizes lielāku skaitli. Kāds varēja būt A?

4.6. Kā regulāru sešstūri var sagriezt 4 vienādās daļās? Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

4.7. Katrs no 5 skaitļiem vienāds ar četru pārējo summu. Atrast šos skaitļus. (Skaitļi var būt pozitīvi, negatīvi un nulle.)

4.8. Taloni sanumurēti ar numuriem no 0000 līdz 9999. Kādu talonu ir vairāk: tādu, kam ciparu summa ir 18, vai tādu, kam pirmo divu ciparu summa vienāda ar divu pēdējo ciparu summu?

4.9. Krusts sastāv no 5 kvadrātiskām rūtiņām (6. zīm.). Kā to sagriezt 5 daļās, lai no šīm daļām varētu izveidot 2 vienādus mazākus krustus? Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



6. zīm.

4.10. Klasē ir 25 skolēni ar zilām, brūnām vai pelēkām acīm. Zināms, ka starp katriem 3 bērniem vismaz divi ir vienāda vecuma.
Pierādīt, ka šajā klasē var atrast vai nu 3 meitenes, vai 3 zēnus, kas ir viena vecuma un kam ir vienāda acu krāsa.

4.11. Doti 33 vienādi regulāri 35-stūri. Katram no tiem virsotnes sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem 1, 2, 3, …, 35. Vai tos var salikt kaudzē tā, lai visos virsotņu stabiņos skaitļu summas būtu vienādas?

4.12. Slinkajai mātes meitai jānoauž 50 m gara josta. Pirmajā dienā viņa noauž 1 m, bet pēc tam rīkojas šādi: ja visā iepriekšējā periodā jau noausti n metri, tad šajā dienā viņa noauž $\frac{1}{n}$ metrus. (Tātad otrajā dienā noaudīs m, trešajā 0,5 m, ceturtajā – 0,4 m utt.)
Pierādīt, ka ne vēlāk kā pēc 7 gadiem josta būs noausta.

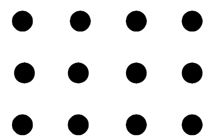
5. nodarbība

5.1. Mārtiņš piedalījās matemātikas viktorīnā. Sākumā viņam uzdeva 5 jautājumus, bet par katru pareizi atbildētu jautājumu viņš saņēma vienu punktu un vēl divus papildu jautājumus. Pavisam Mārtiņš atbildēja uz 27 jautājumiem. Cik punktu viņš saņēma?

5.2. Vai pastāv tāds naturāls skaitlis, kuru dalot ar 26 atlikumā iegūst 19, bet dalot ar 39 atlikumā 21?

5.3. Rindā izrakstīti skaitļi no 1 līdz 7, katrs vienu reizi. Vai var apakšā uzrakstīt otro rindu, kas satur tos pašus skaitļus, tikai citādā kārtībā, turklāt tā, lai katrā no septiņiem izveidotajiem stabiņiem abu skaitļu summa būtu kāda vesela skaitļa kvadrāts?
Atrisināt šo uzdevumu, ja sākumā doti skaitļi no 1 līdz 12.

5.4. Uzzīmēt slēgtu lauztu līniju, kas satur 5 posmus un krusto visus 7 . zīm. attēlotos punktus (tie izvietoti kvadrātiska režģa virsotnēs.



7. zīm.

5.5. No rūtiņu lapas izgriezts taisnstūris, kura izmēri ir 8×18 rūtiņas. Parādīt, kā to sagriezt 3 daļās, lai no šīm daļām varētu izveidot kvadrātu.

5.6. Apskata visus deviņciparu skaitļus, kādus var izveidot no cipariem 1, 2, …, 9, katru no tiem vienā skaitlī lietojot tieši vienu reizi. Ar kādu ciparu beidzas visu šo skaitļu summa?

5.7. Dotas četras monētas: 1, 2, 3 un 5 kap. Zināms, ka tieši viena no tām ir viltota, t. i., pēc masas atšķiras no īstās. Vai ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast viltoto monētu, ja zināms, ka īsto monētu masas ir atbilstošas 1 g, 2 g, 3 g, un 5g?

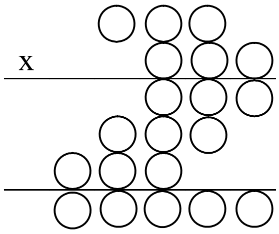
5.8. Rindā izrakstīti 1990 skaitļi, neviens no tiem nav negatīvs. Zināms, ka pirmais skaitlis nav mazāks ne par vienu citu. Zināms, ka arī 1., 2., 3., …, 1988. skaitlis katrs vienāds ar abu tam sekojošo skaitļu starpības moduli (absolūto vērtību). Pēdējais skaitlis šajā rindā ir 10. Atrast pirmo skaitli.

5.9. Diviem kvadrātiem katras malas garums ir 1 m. Tie novietoti tā, ka to kontūras krustojas 8 punktos. Pierādīt, ka abu kvadrātu kopīgās daļas visu malu garumu summa mazāka par 4 m.

5.10. Tabula sastāv no 3×4 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts cipars, kas nav 0. Apskata trīs četrciparu skaitļus, ko iegūst, izlasot ierakstītos ciparus pa rindiņām no kreisās uz labo, un četrus trīsciparu skaitļus, ko iegūst, izlasot ierakstītos ciparus pa stabiņiem no augšas uz leju. Zināms, ka no šiem 7 skaitļiem seši dalās ar 11. Pierādīt, ka arī septītais skaitlis dalās ar 11.

5.11. Tenisa turnīrā piedalījās 6 spēlētāji. Katrs spēlēja ar katru vienu spēli (neizšķirtu spēļu nav). Pierādīt, ka pēc turnīra beigām var atrast divus spēlētājus M un N tā, ka ikkatrs cits spēlētājs zaudējis vai nu pret M, vai pret N.

5.12. 8. zīm. parādītajā reizināšanas piemērā aplīšos jāieraksta cipari tā, lai katrs cipars būtu ierakstīts tieši divas reizes. Pietiek uzrādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



8. zīm.