“Profesora Cipariņa klubs” 1990./91. m.g.

1. nodarbības atrisinājumi

1.1. Piemēram, tā, kā parādīts 1. zīm.; "-" zīme kļūst par pirmo reizinātāju, bet romiešu cipars "10" – pa reizināšanas zīmi.

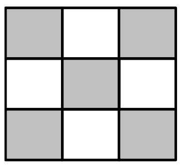
1. zīm.

1.2. Ievērosim, ka 1 000 000 000=$2^9 \cdot 5^9$ un 100 000 000=$2^8 \cdot 5^8$. Skaidrs, ka neviens no reizinātājiem nedrīkst dalīties gan ar 2, gan ar 5, pretējā gadījumā tas dalīsies arī ar 10, tātad tā pēdējais cipars noteikti būs 0. Tāpēc vienīgie sadalījumi reizinātājos ir $2^9 \cdot 5^9$ un attiecīgi $2^8 \cdot 5^8$. Tā kā 5^8=39**0**625, tad skaitli 100 000 000prasītajā veidā izsacīt nevar, bet 1 000 000 000 var izsacīt tikai vienā veidā:

$$1\,000\,000\,000=2^9 \cdot 5^9=512 \cdot 1953125$$

1.3. Plātsmaizes laukums ir 4000 cm^2, bet viena gabaliņa laukums – 48 cm^2.Dalot 4000 ar 40 iegūstam 4000:48=83, atl. 16. Tātad vairāk par 83 gabaliņiem Ievai iegūt neizdosies. Par to, ka 83 gabaliņus var iegūt, lasītājs var pārliecināties pats.

1.4. Pieņemsim pretējo, uzskatīsim, ka katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu summa ir pirmskaitlis. Iekrāsosim kvadrāta rūtiņas tā, kā tas ir parādīts 2. zīm.



2. zīm.

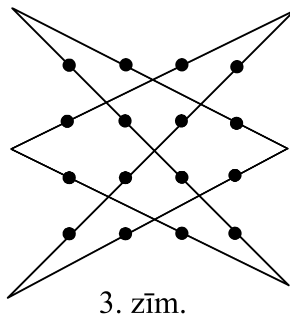
Tā kā mazākā summa, kuru var iegūt ir 1+2=3, tad visas apskatāmās summas ir nepāra skaitļi un līdz ar to dažādas krāsas rūtiņās stāv dažādas paritātes skaitļi. Tas ir iespējams tikai tad, ja melnajās rūtiņās ir nepāra, bet baltajās – pāra skaitļi. Lai kāds nepāra cipars būtu ierakstīts centrā , tā summām ar 2; 4; 6; 8 ir jābūt pirmskaitļiem. Taču 1+8=9, 3+6=9, 5+4=9, 7+2=9, 9+6=15, ir iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir bijis aplams un vismaz viena summa nebūs pirmskaitlis.

1.5. Katra no piecām taisnēm krusto četras atlikušās, tātad krustpunktu skaits ir 5·4:2=20:2=10 (katrs krustpunkts tika ieskaitīts divas reizes). No šejienes seko, ka uz katras taisnes uzrakstīto skaitļu summa ir 2·(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10):5=110:5=22. Aplūkosim tās divas taisnes, uz kurām ir skaitlis 10. Atlikušo trīs krustpunktu numuru summai ir jābūt vienādai ar 12: a) 9+2+1; b) 8+3+1; c) 7+4+1; d) 7+3+2; e) 6+5+1; f) 6+4+2; g) 5+4+3. Tā kā abām taisnēm kopīgs var būt tika skaitlis 10, tad ir iespējami tikai 3 varianti: taisnes a un g, taisnes b un f, taisnes d un e.

Aplūkosim pirmo gadījumu. Punkti, par kuru piederību kādai taisnei vēl nekas nav teikts, ir 6, 7 un 8. Apskatīsim taisni x, kas krusto taisni a punktā 9, atkarībā no tā, kurā punktā taisne x krusto taisni g – 5, 4 vai 3, tās atlikušo divu punktu summai ir jābūt attiecīgi 8, 9 vai 10. Bet pat divu mazāko numuru summa ir 6+7=13>10. Tātad šāds variants nav iespējams. Līdzīgi analizējot pārējos divus gadījumus, tiek iegūta tāda pati atbilde.

1.6. Automašīna ar profesoru ieradās universitātē 20 min. agrāk nekā parasti. Šis laika ietaupījums radās tāpēc, ka automašīna nenobrauca ceļu no profesora uzņemšanas vietas līdz viņa mājai un atpakaļ. Tātad no profesora uzņemšanas vietas līdz mājām būtu jābrauc 10 minūtes. Šoferis bija paredzējis uzņemt profesoru pie mājām tieši 8.00, tātad viņš to patiesībā izdarīja 7.50. Tas nozīmē, ka profesors gāja kājām 50 minūtes.

1.7. Kā krustot punktus ar sešu posmu slēgtu lauztu līniju skat. 3. zīm.



3. zīm.

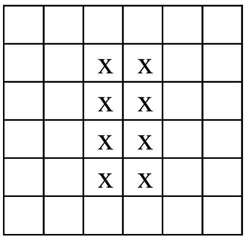
Pieņemsim, ka ir iespējams krustot punktus ar 5 posmu lauztu līniju. Ja šai līnijai ir divi horizontāli posmi, tad, aplūkojot rindu, kurā nav neviena horizontālā posma, iegūstam, ka katrs tās punkts pieder citam lauztās līnijas posmam, tātad ir nepieciešami vismaz 2+4=6 posmi. Tātad var būt ne vairāk kā 1 horizontāls posms. Simetrijas dēļ arī vertikālo posmu skaits nav lielāks nekā 1.

Ja līnijai nebūs ne horizontālu, ne vertikālu posmu, tad, lai krustotu 12 ārējos punktus ir nepieciešami vismaz 12:2=6 posmi, jo katrs krusto ne vairāk kā 2 punktus. Iegūta pretruna.

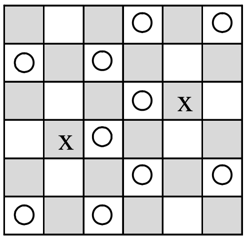
Ja ir viens horizontāls vai vertikāls posms, tad izsvītrojot attiecīgo rindu vai kolonnu, iegūstam, ka ir 10 ārēji punkti, kuru nosvītrošanai vajag vismaz 10:2=5 slīpos posmus. 1+5=6, atkal pretruna

Ir gan horizontāls, gan vertikāls posms, šajā gadījumā vajag vismaz 8:4=2 slīpos posmus. 2+4=6, arī šajā gadījumā esam ieguvuši pretrunu ar pieņēmumu, tātad 5 posmu lauztā līnija neeksistē.

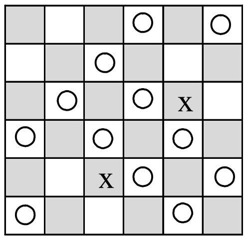
1.8. Ar 8 zirdziņiem pietiek (skat. 4. zīm.). Ja zirdziņi ir tikai 7, tad vai nu uz baltiem, vai melniem laucinjiem atrodas ne vairāk kā 3 zirdziņi. Varam pieņemt, ka uz melnajiem lauciņiem ir ne vairāk kā 3 zirdziņi. Ievērosim, ka katrs zirdziņš apdraud tikai pretējās krāsas lauciņus, tātad šiem 3 zirdziņiem kopā ir jāapdraud visi 18 baltie lauciņi. Lai apdraudētu galdiņa baltos stūrus, ir nepieciešami vismaz divi zirdziņi, turklāt ir iespējami tikai divi principiāli atšķirīgi šo zirdziņu izvietojumi uz šaha galdiņa (skat. 5., 6. zīm.).



4. zīm.



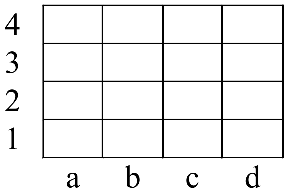
5. zīm.



6. zīm.

Atzīmējot pārējos šo zirdziņu apdraudētos lauciņus, redzam, ka pirmajā gadījumā paliek 8 neapdraudēti balti lauciņi, otrajā – seši, taču ne vienā ne otrā gadījumā lauciņu izvietojuma dēļ nav iespējams tos apdraudēt tikai ar vienu zirdziņu, tātad ir nepieciešami vismaz 8 zirdziņi.

1.9. a) jā, var; piemēram izdarot šādus gājienus (skat. 7. zīm.), visi skaitļi kļūs vienādi ar 6: a4a3, a3a2, b3c3, d4d3, d4d3, b1b2, c1c2, c2d2, c2d2.



7. zīm.

b) nē, nevar. Sākumā visu skaitļu summa ir nepāra skaitlis – 59. Ar katru gājienu summa palielinās par divi, tātad paliek nepāra skaitlis, taču, ja visi skaitļi kļūtu vienādi ar n, tad to summa būtu 16n – pāra skaitlis.
c) nē, nevar. Izkrāsosim rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Tad melnajās un baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summas nav vienādas. ar katru gājienu katra summa palielinās par viens, tātad tās vēl aizvien ir atšķirīgas, taču, ja visi skaitļi kļūtu vienādi, arī šim būtu jākļūst vienādām.

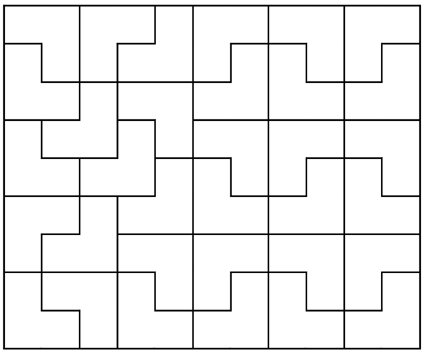
1.10. Skat., piemēram, 8. zīm.

23	8	11	18	1
14	5	12	19	22
17	24	7	4	15
6	13	10	9	2
25	16	3	20	21

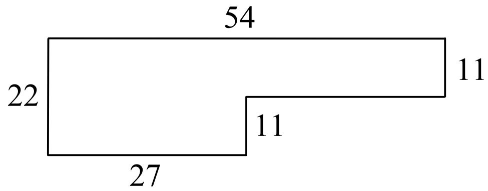
8. zīm.

1.11. Jā, var.

Apskatīsim taisnstūri ar izmēriem 9×11 rūtiņas. To var sagriezt no 3 rūtiņām sastāvošos "stūrīšos" (9. zīm.).



9. zīm.



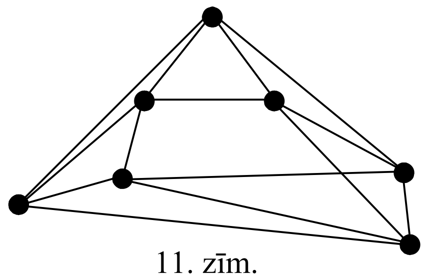
10. zīm.

Saliekot blakus 3 šādus taisnstūrus, iegūstam taisnstūri ar izmēriem 27×11, kas sadalīts 99 vienādos "stūrīšos"; pieņemsim, ka tā horizontālā mala ir 11, bet vertikālā – 27 rūtiņas "gara".
Izstiepsim šo jauno taisnstūri 27 reizes horizontālā un 11 reizes vertikālā virzienā. iegūsim kvadrātu, kurš būs sadalīts 99 tādās (vienādās) daļās, kāda parādīta 10. zīm.

1.12. Apzīmēsim monētas ar burtiem a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l. Nosvērsim monētu a ar monētām b, c, d, e, f, g. Ja monēta izrādīsies vieglāka (smagāka) par monētu a, tad liksim to vienā kaudzītē, ja tai būs tāds pats svars, tad – otrā kaudzītē. Pēc šīm sešām svēršanām abās kaudzītēs būs vismaz viena monēta, jo viltotās monētas ir tikai sešas, bet svērtas tiek septiņas monētas, turklāt par katru no kaudzītēm būs zināms, vai tajā ir īstās vai viltotās monētas. Pieņemot, ka pirmajā kaudzītē ir īstās monētas, iegūstam, ka monētu iespējamie daudzumi kaudzītēs ir
1) 6 un 1,
2) 5 un 2,
3) 4 un 3,
4) 3 un 4,
5) 2 un 5,
6) 1 un 6.
Ne pirmajā, ne sestajā gadījumā tālāka svēršana vairs nav nepieciešama – piecas atlikušās monētas visas ir viltotas vai attiecīgi īstas. Otrajā un ceturtajā gadījumā uz svariem novietojam monētas h un i, pēc tam j un k, l stāv malā. Tā kā īsta (viltota) ir tieši viena monēta, tad, ja abos gadījumos svari būs līdzsvarā, vajadzīgā (liekā) monēta ir l, pretējā gadījumā īstā (viltotā) monēta būs uz smagākā (vieglākā) kausiņa.
Skaidrs, ka trešajā un ceturtajā gadījumā spriedumi daudz neatšķirsies, tāpēc aplūkosim tikai trešo gadījumu. Tieši divas atlikušās monētas ir īstas. Arī tagad uz svaru kausiem vispirms jāliek monētas h un i, tad monētas j un k. Ja svari abos gadījumos ir līdzsvarā, tad monētu j salīdzina ar monētu l, ja arī tagad svari ir līdzsvarā, tad monētas h un i ir īstas, pretējā gadījumā, īstās ir monētas j un k. Ja tieši vienā no svēršanas reizēm svari nebija līdzsvarā, tad īstās monētas ir tā, kas bija smagāka un monēta l, ja abās svēršanās svari nebija līdzsvarā, tad mums ir vajadzīgas abas smagākās monētas.

2. nodarbības atrisinājumi

2.1. Jā, var. Skat. 11. zīm.



11. zīm.

2.2. Aplūkosim tabulu, kurā dotas atlikumu vērtības, dalot skaitli ar 35, 5 un 7.

, dalot ar																
35	[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]	0	1	2	3	4	5
5	[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	2	3	4	[illegible]
7	[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]	3	4	5	6	[illegible]	[illegible]

, dalot ar															
35	6	7	8	9	[illegible]	1	2	3	4	5	26	27	8	9	30
5		[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]	1	2	3	4	0
7	[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]		[illegible]	5	6	[illegible]	1	2

, dalot ar				
35	1	2	3	4
5		[illegible]		[illegible]
7		[illegible]		[illegible]

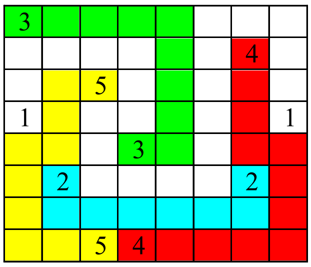
Tā kā katram atlikumu pārim, ko iegūst dalot skaitli ar 5 un ar 7 atbilst tieši viens atlikums, kas rodas dalot šo skaitli ar 35. Bet skaitļi, kas, dalot ar 35 dod vienādu atlikumu atšķiras vismaz par 35, tad ar precizitāti līdz 35 gadiem vecumu var noteikt pēc izskata.

2.3. Tā kā centrālajā rūtiņa ierakstītais skaitlis tiek saskaitīts ar 4 dažādiem sev blakus ierakstītiem skaitļiem, tad veidojas vismaz 4 dažādas summas. Tas, ka dažādo summu nevar būt vairāk par četrām, redzams 12.. zīm.

5	3	8
4	7	1
6	2	9

12. zīm.

2.4. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 13. zīm.



13. zīm.

2.5. Nē, nevar. Pieņemsim pretējo - ka tas izdarīts. Tad taisnstūra mala, kuras garums ir 45, sadalīta nogriežņos, kuru garumi ir 7 un 11. Ja pirmo ir x, bet otro y, tad pastāv vienādība

$$7\cdot x+11\cdot y=45,$$

kur x un y – pozitīvi veseli skaitļi vai 0. Viegli pārbaudīt, ka pie $y=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$ x neiznāk vesels skaitlis, bet pie $y\geq 5$ iznāk $x<0$, kas neder. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

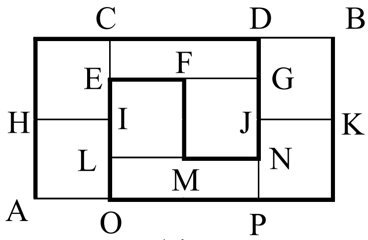
2.6. Apzīmēsim to grāmatu daudzumu, ko izlasījis **tikai** Andris, Jānis vai Pēteris, atbilstoši ar A, J, P; to grāmatu daudzumu, ko izlasījuši tikai divi no zēniem – atbilstoši ar AJ, AP, JP; to grāmatu daudzumu, ko izlasījuši visi zēni, ar AJP.
Uzdevumā dots, ka
A+AJ+AP+AJP=50
J+AJ+JP+AJP=50
P+AP+JP+AJP=50
A+J+P+AJ+AP+JP+AJP=80
Pareizinot pēdējo vienādību ar 2 un atņemot no tās visas trīs pārējās, iegūstam

$$A+J+P-AJP=2\cdot 80-3\cdot 50=10$$

Tātad nepopulāro grāmatu ir par 10 vairāk nekā populāro.

2.7. Apzīmēsim spēlētāju, kas izdara pirmo gājienu ar A, bet viņa pretinieku – ar B. Pareizi spēlējot, uzvar A. Ja vien šis spēlētājs var panākt to, ka pēc viņa gājiena starpība starp konfekšu daudzumiem kaudzēs ir 4 daudzkārtnis, tad B, kurš drīkst ņemt tikai 1, 2 vai 3 konfektes, ar savu gājienu nekādi nespēs panākt, lai šī starpība būtu 0, jo arī nulle ir 4 daudzkārtnis. Spēlētājs A var sākt ar vienas konfektes apēšanu no lielākās kaudzītes. Tā kā spēlētājs B nevar panākt to, lai konfekšu daudzuma starpība kaudzītēs ir 4 daudzkārtnis, tad tad konfekšu daudzumi abās kaudzītēs dod dažādus atlikumus, tie var būt 0, 1, 2, 3. Spēlētājam A ir jāapēd attiecīgais konfekšu daudzums no tās kaudzītes, kuras atlikums, dalot ar 4 ir lielāks.

2.8. Ir iespējams maršruts ar garumu 24 (skat. 14. zīm.).



14. zīm.

Pierādīsim, ka garāks maršruts nav iespējams.
Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem no punkta A var tikai iziet pa vienu no 2 ceļiem (ja tajā atgrieztos, tad pa kādu posmu būtu jāiet otrreiz), bet punktā B var tikai ieiet pa vienu no diviem ceļiem. Tātad punktos A un B paliek pa vienam neizmantotam ceļa galam. Katrā no 14 punktiem C, D, E, F, G, H, I, , K, L, M, N, O, P sanāk kopā 3 ceļi; tātad katrā no tiem var pa vienu ceļu ieiet, pa otru iziet, jau vismaz 2+14=16 ceļu gali, kuros nedrīkst ieiet. Katram ceļam ir 2 gali, tātad ir vismaz 8 ceļi, pa kuriem netiek iets. Tā kā līniju kopējais garums ir 32, tad nostaigāto ceļu kopgarums nepārsniedz 32-8=24.

2.9. Novietojam uz katra svaru kausa pa 50 kūkām. Ja svari atrodas līdzsvarā, tad atšķirīgā kūka ir uz galda palikusī kūka. Salīdzinot to ar jebkuru no pārējām, noskaidrojam vajadzīgo.
Ja viens svaru kauss izrādās smagāks, tad atšķirīgā kūka atrodas uz svariem. Otrajā svēršanā vienā pusē novietojam 25 kūkas no šī kausa, bet otrā – otras 25 kūkas no tā paša kausa. Ja tagad svari stāv līdzsvarā, tad atšķirīgā kūka ir vieglāka nekā pārējās un pirmajā svēršanā atradās uz vieglākā kausa. Ja vienas 25 kūkas ir smagākas nekā otras, tad atšķirīgā kūka arī otrajā svēršanā atrodas uz svariem; tad tā ir smagāka nekā pārējās.

2.10. Pietiek ar 6 atslēgām. Apzīmēsim tās ar burtiem A, B, C, D, E, F un iedosim direktoriem sekojošus atslēgu komplektus:
A, B, C; A, D, E; B, D, F; C, E, F.
Pieņemsim, ka varētu pietikt arī ar piecām atslēgām. Ievērosim, ka četrus direktorus var sagrupēt pa divi sešos veidos. Tas nozīmē, ka var atrast divus direktoru pārus, kuriem trūkst viena un tā pati atslēga. Ir iespējami divi gadījumi:
a) viens direktors ietilpst abos pāros, taču tādā gadījumā ir atrasti trīs tādi direktori, kuri nevar atslēgt seifu, tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.
b) abi pāri sastāv no dažādiem direktoriem, bet tādā gadījumā nevienam no direktoriem nav trūkstošā atslēga un viņi pat četratā nevar atslēgt seifu.
Esam pierādījuši, ka dažādiem direktoru pāriem trūkst dažādas atslēgas un tā kā ir seši pāri, tad ir jābūt sešām atslēgām.

2.11. Sanumurēsim krēslus pēc kārtas ar numuriem 1; 2; 3; …; 25. Aplūkosim šādu apsēšanās un piecelšanās secību:

Apsēžas krēslā	1	3	2	4	3	5	4	…	24	23
Pieceļas no krēsla			3		4		5			24

15. zīm.

Tās rezultātā 1. līdz 23. krēsls ir aizņemts. Pierādīsim, ka 24 krēsli nevar būt aizņemti. Pieņemsim pretējo, tātad brīdī pirms apsēdās 24. dalībniece aizņemti bija 23 krēsli, taču tādā gadījumā vismaz vienā pusē katram no diviem brīvajiem krēsliem sēdēja konkursa dalībniece, kurai nācās piecelties, un rezultātā aizņemto krēslu skaits nepieauga. Ir iegūta pretruna ar mūsu pieņēmumu, tātad nevar būt aizņemti vairāk kā 23 krēsli.

2.12. Ja uz apļa būtu tikai divi skaitļi, tad pēdējais paliktu tas skaitlis, ar kuru sāka skaitīšanu. Ja būtu četri skaitļi, tad pēdējais paliktu tas skaitlis, ar kuru sāka skaitīšanu. Ja būtu astoņi skaitļi, tad pēdējais paliktu tas skaitlis, ar kuru sāka skaitīšanu utt. Ja uz apļa ir uzrakstīto skaitļu skaits ir divnieka pakāpe, tad pēdējais paliek tas skaitlis, ar kuru sāka skaitīšanu. Lielākā divnieka pakāpe, kas nepārsniedz 1990 ir $2^{10}=1024$. $1990-1024=966$. Tātad pēdējais uz apļa paliks tas skaitlis, kurš seko tūlīt pēc 966. izsvītrotā skaitļa jeb $2\cdot966+1=1933$.

3. nodarbības atrisinājumi

3.1. Apzīmēsim līdz sastapšanās brīdim skrienot pavadīto laiku ar t. Tā kā, skrienot ar konstantu ātrumu, ceļā pavadītais laiks proporcionāls noskrietajam attālumam, tad skaitļu t un 27 attiecība vienāda ar Andra pirms un pēc sastapšanās noskrieto attālumu attiecību; šo pašu attālumu attiecība, ja tos apskata kā Jura noskrietus ceļa gabalus, vienāda ar skaitļu 12 un t attiecību. Iegūstam vienādību

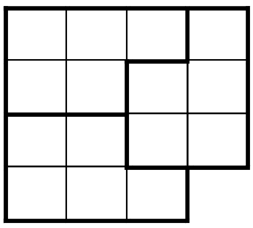
$$\frac{t}{27} = \frac{12}{t} \qquad (*)$$

No proporcijas pamatīpašības iegūstam t=18. Tātad Andris visu ceļu veica 18+27=45, bet Juris 18+12=30 sekundēs.

3.2. Ja diviem naturāliem skaitļiem ir vienāds decimālciparu skaits, tad lielāks ir tas skaitlis, kuram pirmajam, lasot no kreisās puses pa vienam ciparam, parādās lielāks cipars nekā otram skaitlim.

Tā kā VALKA>VALLE, tad K>L (pirmie trīs cipari abiem skaitļiem sakrīt). Tāpēc KALNS>LAIKS.

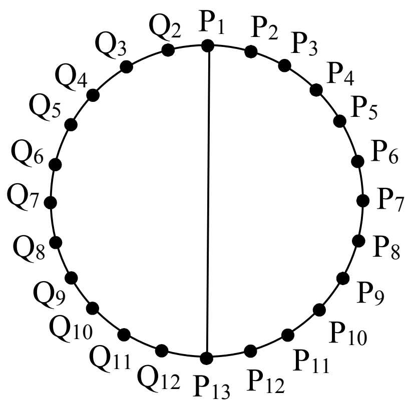
3.3. Jā, var. Piemēram, skat. 16. zīm.



16. zīm.

3.4. Tā kā vienīgais pāru pirmskaitlis ir viencipara skaitlis, tad nevienu pāru ciparu izrakstīt nedrīkst. Tā kā vienīgais pirmskaitlis, kas dalās 5 − skaitlis 5 − arī ir viencipara skaitlis, tad nedrīkst izrakstīt arī ciparu 5. Tātad varbūt var izrakstīt tikai ciparus 1; 3; 7; 9. Pieņemsim, ka izdevies izrakstīt visus šos ciparus. Cipars 9 nedrīkst atrasties blakus ne ar 3 (tad būs divciparu skaitļi, kas dalās ar 3), ne ar 1 ($91=13\cdot7$). Tātad 9 var atrasties blakus tikai ar 7, bet katram ciparam ir 2 kaimiņi. Tātad visus četrus ciparus izrakstīt nevar. Trīs ciparus izrakstīt var (skat. zīm.): skaitļi 31; 17; 73; 13; 71; 37 visi ir pirmskaitļi.

3.5. Uzvar pirmais spēlētājs. Viņš savieno ar nogriezni divus punktus tā, lai katrā nogriežņa pusē būtu 11 punkti un domās sanumurē tos tā, kā tas ir parādīts zīm.



17. zīm.

Skaidrs, ka savienot punktus, kas atrodas dažādās nogriežņa pusēs, nevar, jo tad izveidosies divi krustiski nogriežņi. Tātad otram spēlētājam ir jāsavieno divi vienā pusē esoši punkti, savukārt, pirmais spēlētājs atdarina otrā spēlētāja gājienu otrā pusē (skat. 17. zīm.). Ja otrais spēlētājs var izdarīt gājienu, tad to var izdarīt arī pirmais spēlētājs. Ja otrais spēlētājs nevar izdarīt gājienu, tad viņš ir zaudējis.

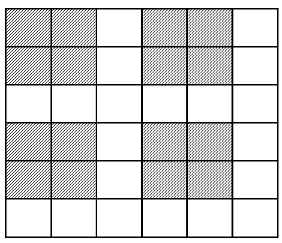
3.6. Jā, var; piemēram, tā, kā parādīts 18. zīm.

48	1
73	8

54	6	4
19	1	5
27	2	7

18. zīm.

3.7. Nē, nav taisnība. Parādīsim to. Iesvītrosim 16 rūtiņas, kā parādīts 19. zīm. Starp jebkurām trim vienā rindiņā vai kolonnā pēc kārtas novietotām rūtiņām ir 0 vai 2 iesvītrotas.



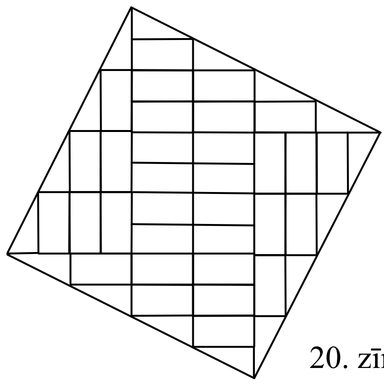
19. zīm.

Pirmajā gadījumā maiņas rezultātā izcilo balto rūtiņu skaits nemainās. Otrajā gadījumā izcilo balto rūtiņu skaits var samazināties vai palielināties par 2 (ja abas pārkrāsojamās izcilās rūtiņas bijušas baltas vai abas – melnas), kā arī var nemainīties (ja viena pārkrāsojamā izcilā rūtiņa bijusi balta, bet otra – melna). Ja sākumā no izcilajām rūtiņām ir pāra skaits baltu, tad procesa gaitā izcilo balto rūtiņu skaits nekad nevar kļūt nepāra skaitlis.

3.8. Skaitli 1990 var iegūt ar 16 gājieniem, piemēram, šādi: 1 => 2 => 3 => 6 => 7 => 14 => 15 => 30 => 31 => 62 => 124 => 248 => 496 => 497 => 994 => 995 => 1990.

Lai pierādītu, ka mazāks gājienu skaits nav iespējams, apskatīsim pretēju uzdevumu: no 1990 ir jāiegūst skaitlis 1, ja ar vienu gājienu atļauts dalīt ar 2 (ja dalījums ir naturāls skaitlis) vai atņemt viens.
Ja no pāra skaitļa 2n atņem 1, tad, lai varētu dalīt ar 2, vismaz vēl vienu reizi ir jāatņem. Pieņemsim, ka no 2n vairākas reizes tiek atņemti vieninieki. Pastāv divas iespējas.
a) atņemšanu sērijas rezultātā iegūst 1. Tātad ir izdarītas 2n-1 atņemšanas. Ja 2n vispirms dalītu ar 2, iegūstot n, un pēc tam atņemtu n-1 reizi atņemtu 1, tad kopējais operāciju skaits būtu 1+n-1=n<2n-1.
b) atņemšanu sērijas rezultātā iegūst pāra skaitli 2k un pēc tam seko dalīšana, iegūstot k. Kopā ir veiktas 2n-2k+1 operācijas. Turpretī, ja 2n vispirms dalītu ar 2, iegūstot n, bet pēc tam n-k reizes tiktu atņemts vieninieks, tad būtu veiktas n-k+1 operācijas. Tā kā n>k, tad n+k-1<2(n-k)+1.
Tātad no visiem apgrieztajiem procesiem, ātrāks ir tas, kurā dala, tiklīdz dalīšana kļūst iespējama. Nav grūti izsekot, ka risinājuma sākumā parādītā skaitļa 1990 iegūšana atbilst visātrākajam apgrieztajam procesam.

3.9. Ievērosim, ka 2 rūtiņu taisnstūra diagonāle sadala to divos vienādos trijstūros, tātad katra trijstūra laukums ir 1.



20. zīm.

Izmantojot 8 divrūtiņu taisnstūrus var izveidot taisnleņķa trijstūri (tā laukums ir 16). Izmantojot četrus tādus trijstūrus un vienu kvadrātu, kas arī salikts no 8 divrūtiņu taisnstūriem, varam izveidot kvadrātu ar laukumu 4·16+2·8=80 (skat. 20. zīm.).

3.10. Pētīsim uzreiz vispārīgo gadījumu. Apzīmēsim pirmo skaitli ar x_1, otro – ar x_2, utt. Virknes vispārīgā locekļa formula tādā gadījumā ir

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_{n-1}}, \text{ ja } n=2, 3, 4, \ldots .$$

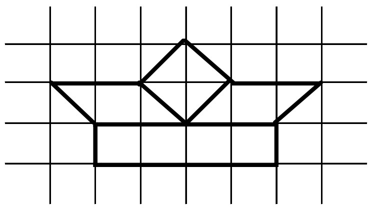
Atradīsim dažus šīs virknes skaitļus:

$$x_3 = \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1+b}{a};\ x_4 = \frac{1+x_3}{x_2} = \frac{1+a+b}{ab};\ x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \frac{1+a}{b};$$

$$x_6 = \frac{1+x_5}{x_4} = a;\ x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} = b$$

Redzam, ka sestais skaitlis virknē sakrīt ar tās pirmo, bet septītais – ar otro. Tā kā katrs nākošais skaitlis ir atkarīgs tikai no diviem iepriekšējiem, tad virknes pirmie 5 locekļi periodiski parādīsies no jauna. Tā kā 1990 dalās ar 5, tad virknes 1990-ais virknes loceklis būs vienāds ar tās piekto locekli, jeb $\frac{1+a}{b}$. Ja a=b=1, tad 1990-ais skaitlis virknē būs 2.

3.11. a) nē, neeksistē. Pieņemsim pretējo – tāds septiņstūris ir. Izvēlamies vienu septiņstūra malu (apzīmēsim to ar m_1). Uz tās balstās kāds paralelograms, apzīmēsim tā malu, kas paralēla m_1 ar m_2, iespējams, ka tā atrodas uz citas septiņstūra malas, ja nē, tad to malu, kas paralēla m_2 ar m_3 un atkal skatāmies vai neesam nonākuši uz kādas citas septiņstūra malas. Agri vai vēlu šis process beigsies un mēs būsim ieguvuši, ka katrai septiņstūra malai var atrast tai paralēlu septiņstūra malu. Tā kā izliektā septiņstūrī nevar būt 3 vai vairākas malas, kas visas savā starpā paralēlas, tad tām ir jāapvienojas pa pāriem, taču 7ar divi nedalās. Pretruna.
b) nē, nevar. Būvējot paralelogramus no apakšējās malas un katru reizi uzzīmējot visus paralelogramus, kas pilnīgi vai daļēji balstās uz iepriekšējā, redzam, ka iegūto paralelogramu ķēdīšu augšējo malu garumu summai ir jābūt 5, bet apakšējai malai paralēla ir tikai viena – augšējā mala un tās garums ir tikai 1.
c) skat. 21. zīm.



21. zīm.

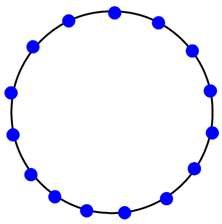
3.12. Uzdevumam iespējami daudzi atrisinājumi. Viens no tiem :ja pareizā atbilde uz kādu jautājumu ir "ding", tad ko uz šo jautājumu atbildētu salinieks, kas nav tavs ciltsbrālis?"

4. nodarbības atrisinājumi

4.1. Atrisinājumu ir daudz, lūk viens no tiem:

(1+9-9):1=1	19-9:1=10	$1\cdot 9\cdot(\sqrt{9}-1)=18$
1+9-9+1=2	19-9+1=11	1+9+9:1=19
1+9:9+1=3	$1+9+\sqrt{9}-1=12$	1+9+9+1=20
$(1+9:\sqrt{9}):1=4$	$1+9+\sqrt{9}:1=13$	$19+\sqrt{9}-1=21$
$1+9:\sqrt{9}+1=5$	$1+9+\sqrt{9}+1=14$	$19+\sqrt{9}:1=22$
$1+9-\sqrt{9}-1=6$	$19-\sqrt{9}-1=15$	$19+\sqrt{9}+1=23$
$(1+9-\sqrt{9}):1=7$	$19-\sqrt{9}:1=16$	$(-1+9)\cdot\sqrt{9}:1=24$
$1+9-\sqrt{9}+1=8$	$19-\sqrt{9}+1=17$	$-1+9\cdot\sqrt{9}-1=25$
19-9-1=9		

4.2. Aizvietosim galdu ar riņķa līniju, zēnus ar ziliem punktiem, bet meitenes – ar sarkaniem. Tā kā zēni sēž vienādos attālumos viens no otra, tad zilie punkti sadala riņķa līniju 15 vienādos lokos (skat. 22. zīm.). Lai izpildītos uzdevuma nosacījums par to, ka nekādi divi zēni nesēž viens otram blakus, uz katra loka jāatliek vismaz viens sarkans punkts, tātad kopumā vismaz 15 punkti. Tā kā meitenes ir tieši 15, tad katras meitenes abi kaimiņi ir zēni, kbj.



22. zīm.

4.3. Var gadīties, ka šīs daļas ir vienādas; ja neviens autobuss nav bijis pārpildīts, tad tās abas ir 0, bet, ja visi autobusi bijuši pārpildīti, tad tās abas ir 100%. Apskatīsim citus gadījumus. Pieņemsim, ka ir p pārpildītu un n nepārpildītu autobusu. Tad pārpildītu autobusu daļa starp visiem autobusiem ir $\frac{p}{p+n}$. Izsēdināsim no visiem pārpildītajiem autobusiem "liekos" pasažierus, atstājot tajos tikai pa 100 pasažieriem. Tā rezultātā sākotnēji pārpildīto autobusu pasažieru daļa samazinās. ja ir nepārpildīti autobusi, kuros ir mazāk nekā 100 pasažieru, tad tajos iesēdināsim papildus pasažierus tā, lai katrā no tiem arī būtu tieši 100 pasažieru; skaidrs, ka rezultātā sākotnēji pārpildīto autobusu pasažieru daļa vēl vairāk samazinās. Taču tagad katrā autobusā ir tieši 100 pasažieru, tāpēc sākotnēji pārpildīto autobusu daļa tagad ir $\frac{p\cdot 100}{p\cdot 100+n\cdot 100}=\frac{p}{p+n}$, tas ir, vienāda ar sākotnēji pārpildīto autobusu daļu, tātad pirms izdarītās pamazināšanas tā bija lielāka.

4.4. Apzīmējam monētas ar A, B, C, D un E un monētas ar vienādām masām sauksim par normālām. Pirmajā svēršanā salīdzinām A un B, bet otrajā – C un D. Pastāv divas iespējas:

a) abos gadījumos viens kauss nosveras uz leju. Pieņemam, ka A>B un C>D. Trešajā svēršanā salīdzinām D un E. Ja D=E, tad D un E ir normālās monētas, bet C – smagākā. Tāpēc A – normāla, bet B – vieglākā monēta. Ja D<E, tad D ir vieglākā, bet A – smagākā monēta. Rezultāts D>E nav iespējams (ja C>D>E, tad C – smagākā, D – normāla, E – vieglākā monēta, bet tādā gadījumā nevar būt A>B). Pārējos gadījumus analizē līdzīgi.

b) vienā gadījumā kausi paliek līdzsvarā, bet otrā – viens kauss nosveras uz leju. Pieņemam, ka A>B un C=D. Skaidrs, ka C un D – normālās monētas. Trešajā svēršanā salīdzinām D un E. Ja D=E, tad A ir smagākā, bet B – vieglākā monēta. Ja D<E, tad E – smagākā, bet B – vieglākā monēta. Ja D>E, tad A – smagākā, E ≠ vieglākā monēta. Citus gadījumus apskata līdzīgi.

4.5. Izvēlēsimies divus punktus A un B, kuros dzīvo vienas cilts rūķīši; varam pieņemt, ka tie abi ir votivapas. Pierakstīsim to kā A~v un B~v.

Atzīmēsim uz taisnes dažādās pusēs no nogriežņa AB punktus C un D tā, ka CA=AB=BD (23. zīm.).

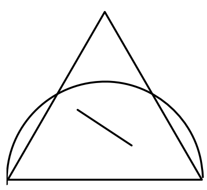
v v

C A T B D

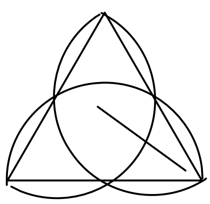
23. zīm.

Ja C~v vai D~v, tad vajadzīgie 3 punkti ir atrasti. Apskatīsim gadījumu, kad C~s un D~s. Aplūkosim AB viduspunktu T; tas ir arī CD viduspunkts. Ja T~v, meklējamie punkti ir ATB; ja T~s, meklējamie punkti ir CTD.

4.6. Pieņemsim, ka jau pierādīts apgalvojums: ja trijstūra visas malas vienādas, tad lielākais attālums starp diviem trijstūra punktiem ir malas garums. Apskatīsim dzeltenā apgabala trīs virsotnes. Katras divas no tām atrodas 5 cm attālumā viena no otras. Tātad nekādas divas virsotnes nevar nosegt ar vienu spiedoga nospiedumu. Tātad katru virsotni jāsedz ar citu spiedoga nospiedumu, un vajadzīgi vismaz 3 nospiedumi.



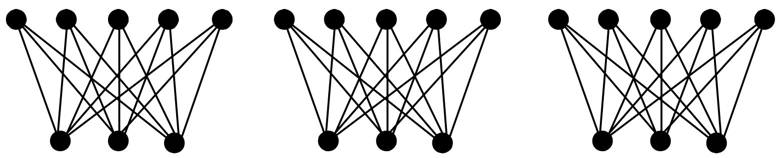
24. zīm.



25. zīm.

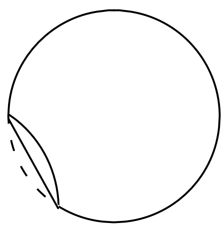
Atliek pierādīt sākumā minēto apgalvojumu. Konstruēsim pusriņķi uz trijstūra malas kā uz diametra (skat. 24. zīm.) Jebkurš trijstūra nogrieznis, kas atrodas riņķa iekšpusē, ir vai nu šī riņķa horda, vai arī kādas tā hordas daļa. Jebkura horda, kas nav diametrs, ir īsāka par to. Tā kā trijstūrim pieder tikai viens pusriņķa diametrs, proti, trijstūra mala, tad skaidrs, ka visi trijstūra nogriežņi, kurus pārklāj novilktais pusriņķis ir īsāki par trijstūra malu. Ja novilktais pusriņķis pārklāj tikai daļu nogriežņa, tad mums ir jākonstruē pusriņķis uz citas trijstūra malas, ja arī jaunais pusriņķis pārklāj tikai daļu nogriežņa, tad trešais pusriņķis noteikti pārklās visu nogriezni, jo vienādmalu trijstūra katrs punkts acīmredzami pieder vismaz diviem pusriņķiem (25. zīm.).

4.7. Ieviesīsim sekojošus apzīmējumus: m - meitenes, , z - zēni, d - draudzību skaits. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka 5m=d=3z. Tā kā 3 ar 5 nedalās, tad zēnu skaitam jādalās ar 5 – z=5n ($n \in N$), no šejienes seko $5m=3\cdot 5n$ => m=3n un kopējais skolēnu skaits ir 5n+3n=8n.
Izmantojot to, ka klasē ir vismaz 18 skolēni, bet nav vairāk nekā 30, iegūstam, ka to ir $8\cdot 3=24$ (9 meitenes un 15 zēni). Atliek pārliecināties, vai patiešām izpildās nosacījumi par draudzībām. To, ka izpildās, parāda 26. zīm.



26. zīm.

4.8. Iedomāsimies, ka reizē ar taisnstūrveida lapiņu tiek pārlocīts arī riņķis; pārlocītā lapiņa ir pārklāta ar pārlocīto riņķi. Riņķis pēc pārlocīšanas pārklāj daļu, kas vienāda ar šī riņķa segmentu (27. zīm.).



27. zīm.

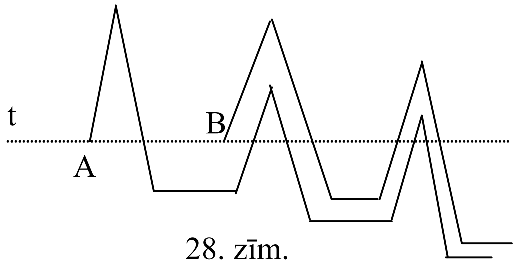
Skaidrs, ka šo segmentu var pārklāt ar riņķi, kas vienāds ar sākotnējo. Tātad atbilde uz uzdevumā izteikto jautājumu ir "jā".

4.9. Dosimies no rūtiņas, kurā ierakstīts skaitlis 1, uz rūtiņu, kurā rakstīts skaitlis 64. Ja šīs rūtiņas atrodas vienā rindā vai vienā kolonnā, tad veicot augstākais 7 gājienus mēs sasniegsim vajadzīgo rūtiņu(1 gājiens ir pāreja no vienas rūtiņas uz rūtiņu ar kopīgu malu vai kopīgu virsotni). Gadījumā, kad rūtiņas atrodas dažādās rindiņās un dažādās kolonnās, vispirms ejam pa diagonāli, līdz sasniedzam rindiņu, kurā atrodas rūtiņa ar skaitli 64, tad pa šo rindiņu virzāmies uz vajadzīgās kolonnas pusi. Arī šajā gadījumā ir nepieciešams veikt augstākais 7 gājienus. Ja katru divu blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu starpība nepārsniegtu 8, tad pēc 7 gājienu sērijas būsim sasnieguši skaitli, kas nav lielāks par $1+8\cdot 7=57$, taču mēs zinām, ka ar šiem 7 gājieniem noteikti pietiek, lai sasniegtu rūtiņu ar skaitli 64, rodas pretruna, tātad
eksistē vismaz divas blakus rūtiņas, kurās ierakstīto skaitļu starpība nav mazāka par 9, k.b.j.

4.10. Uz viena kausa novietojam 3 monētas, uz otra – citas trīs. Ja kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā ir starp malā palikušajām; je nē, tad tā ir uz svariem. Jebkurā gadījumā esam

uzzinājuši, kuras sešas monētas ir ar vienādu masu (normālās) un starp kurām sešām monētām ir atšķirīgā monēta (šaubīgās).
Otrajā svēršanā uz viena kausa liekam 3 normālās, uz otra – 3 šaubīgās monētas. Pēc šīs svēršanas atliks tikai trīs šaubīgās monētas. Trešajā un ceturtajā svēršanā salīdzinām pa vienu šaubīgo monētu ar kādu normālo. Ja svari kādā no svēršanām nebūs līdzsvarā, tad attiecīgā šaubīgā monēta būs meklētā, pretējā gadījumā, vajadzīga ir trešā no šaubīgajām monētām.

4.11. Punkts A var pārvietoties cik patīk tālu. 28. zīm. ar pārtrauktajām līnijām parādītas punktu A un B trajektorijas. Katra punkta veidotās lauztās līnijas katra nākošā "augšējā" virsotne pabīdīta pa labi par attālumu 1, bet tās augstums virs taisnes t divas reizes mazāks par iepriekšējās virsotnes augstumu. Tāpēc skaidrs, ka šādu līniju var turpināt neierobežoti tālu pa labi.



28. zīm.

4.12. Par naturāla skaitļa n ($1 \le n \le 10$) izplatību sauksim kopējo rindiņu un kolonnu skaitu, kurās šis skaitlis atrodas, un apzīmēsim to ar J(n). Ja skaitlis n atrodas x rindiņās un y kolonnās, tad $x \cdot y \ge 10$ No vienādības $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$ seko, ka $(x+y)^2 \ge 4xy$ jeb $(x+y)^2 \ge 40$. Tā kā x+y ir naturāls skaitlis, tad $x+y \ge 7$. Tā kā $J(n)=x+y$, tad katram $1 \le n \le 10$ ir spēkā nevienādība $J(n) \ge 7$.
Nosauksim skaitļa n atrašanos rindiņā vai kolonnā par skaitļa n draudzību ar šo rindiņu vai kolonnu. No $J(n) \ge 7$ seko, ka ir vismaz $10 \cdot 7=70$ šādas draudzības.
Pieņemsim, ka nevienā rindiņā un nevienā kolonnā nav 4 dažādu skaitļu. Tad katra rindiņa un katra kolonna draudzējas ar augstākais trim skaitļiem, tātad kopējais draudzību skaits nepārsniedz $(10+10) \cdot 3=60$. Tā ir pretruna ar iepriekš pierādīto.

10	10	10	1	1	1	2	2	2	9
10	10	10	1	1	1	2	5	5	5
10	10	10	1	4	4	4	5	5	5
10	3	3	3	4	4	4	5	5	5
8	3	3	3	4	4	4	5	8	8
8	3	3	3	4	7	7	7	8	8
8	3	6	6	6	7	7	7	8	8
9	9	6	6	6	7	7	7	8	9
9	9	6	6	6	7	2	2	2	9
9	9	6	1	1	1	2	2	2	9

29. zīm.

Var gadīties, ka nevienā rindā un nevienā kolonnā nav vairāk par 4 dažādiem skaitļiem (skat. 29. zīm.).

5. nodarbības atrisinājumi

5.1. Piemēram, tā, kā parādīts 30. zīm.

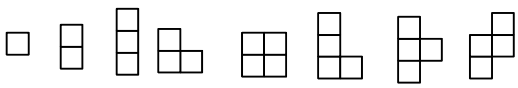
					x		
	x	x		x	x		
		x					
					x		
		x	x		x	x	
		x					

30. zīm.

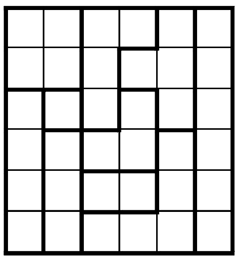
Var pierādīt, ka 12 ir mazākais zirdziņu skaits, ar kuru var panākt "pilnīgu apdraudētību".

5.2. Veicot gadījumu pārlasi, iegūstam, ka ir 9 skaitļi, kuru visi cipari ir vienādi, 1080 skaitļi, kura pierakstā ir divi atšķirīgi cipari, viens divos, bet otrs četros eksemplāros. 720 skaitļi, kuros atkal ir 2 dažādi cipari, bet šoreiz tie ir attiecībā 3 pret 3. Skaitļi, kas satur trīs dažādus ciparus, katru divos eksemplāros, ir 9072. Vairāk kā trīs dažādi cipari skaitlī nevar būt, tātad pavisam ir 9+1080+720+9072=10881 skaitļi ar minēto īpašību.

5.3. Dažādo gabalu skaits, kas sastāv no 1, 2, 3 un 4 rūtiņām, ir atbilstoši 1; 1; 2; 5 (skat. 31. zīm.).



31. zīm.



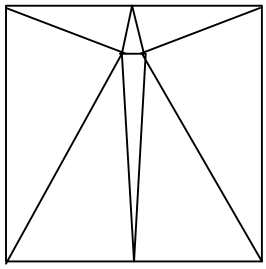
32. zīm.

Pat 11 "vismazākie" (vērtējot pēc rūtiņu skaita) dažādi gabali kopā saturētu vismaz
$1 \cdot 1+1 \cdot 2+2 \cdot 3+5 \cdot 4+2 \cdot 5=39$
rūtiņas, bet mūsu rīcībā ir tikai 36 rūtiņas. Tātad gabalu nevar būt vairāk par 10. To, ka 10 gabali var būt, parāda 32. zīm.

5.4. Nē, nevar. Apskatīsim visgarāko piena paketes šķautni a (ja visgarākās ir vairākas, tad vienu no tām). Tā ir mala divām paketes skaldnēm – trijstūriem; leņķi, kas atrodas pie šīs šķautnes, ir attiecīgo skaldņu leņķi.

Šķautne a ir garākā mala katrā no šiem abiem trijstūriem. Ja kāds no leņķiem pie a būtu plats, tad atbilstošajā trijstūrī tas būtu lielākais leņķis; tāpēc pret to atrastos šī trijstūra garākā mala, kas būtu **garāka** par a. Tā ir pretruna ar a izvēli.

5.5. Jā, var; skat. 33. zīm.



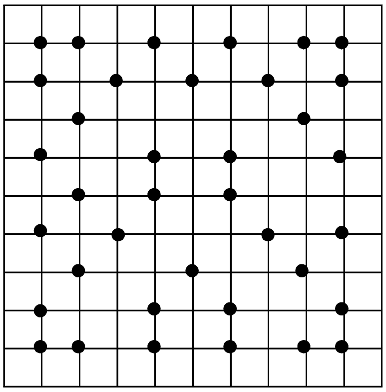
33. zīm.

Var pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt šaurleņķa trijstūros tā, lai iznāktu 8; 9; 10; 11; … trijstūri, bet nevar – tā, lai iznāktu 2; 3; 4; 5; 6 vai 7 trijstūri. Pie tam 9 trijstūrus var iegūt tikai tā, ka vismaz viena dalījuma trijstūra virsotne atrodas cita trijstūra malas iekšējā punktā.

5.6. Ķēniņš var izgatavot 6 kausus, kuru masas ir, piemēram, 1kg, 1kg, 2kg, 2kg, 3kg, 3kg. Viegli redzēt, ka tos var sadalīt gan 2, gan 3, gan 4 daļās vienādām masām. Mazāk par 6 kausiem nevar būt. Ja tiktu izgatavoti augstākais 5 kausi ar kopējo masu M, tad triju stiprinieku gadījumā kāds no tiem saņemtu tikai vienu kausu; tātad tam jābūt ar masu $\frac{M}{3}$. Bet tad šo kausu nebūtu kam dot gadījumā, kad atnāk četri stiprinieki, jo tad katram pienāktos kausi ar kopējo masu $\frac{M}{4}$, bet $\frac{M}{3} > \frac{M}{4}$.

5.7. No tā, ka $B=3\cdot A$ varam secināt, ka skaitļa B ciparu summa S(B) arī dalās ar 3. No tā, ka $S(A)+S(B)=45$ jeb $S(A)=45-S(B)$ seko, ka arī skaitļa A ciparu summa dalās ar 3, tātad pats skaitlis A ir 3 daudzkārtnis un skaitlis B, savukārt, ir skaitļa 9 daudzkārtnis, tātad S(B) dalās ar 9 un arī $S(A)=45-S(B)$ dalās ar 9, k.b.j.
Skaitļu pāri varētu būt, piemēram, 16794 un 50382; 20583 un 61749.

5.8. Jā. Tā var gadīties, piemēram, tad, ja plāksnīšu centri atrodas 34. zīm. atzīmētajos punktos.



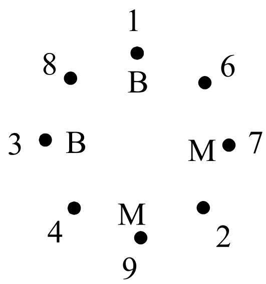
34. zīm.

5.9. Jā, var. Skat., piemēram, taisnstūri ar izmēriem 28x26 rūtiņas.

5.10. Sanumurējam lauciņus, kā parādīts 35. zīm. Neviens zirdziņš nevar pāriet uz 5. lauciņu, un no katra no citiem lauciņiem var pāriet uz tieši 2 citiem. Uzzīmējot lauciņus "pa apli" (36. zīm.) tā, ka blakus atrodas lauciņi, starp kuriem var pāriet ar vienu gājienu, redzam, ka zirdziņi ar vienu gājienu var pārvietoties pa šo apli tikai par 1 pozīciju pa labi vai pa kreisi. Tātad zirdziņu kārtība uz apļa nemainās. Bet, ja izdotos iegūt uzdevumā prasīto situāciju, tad baltie zirdziņi atrastos starp melnajiem, bet tā nevar būt.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

35. zīm.



36. zīm.

5.11. Izvēlēsimies dažus votivapas tā, lai tie savā starpā nedraudzētos, bet lai katrs vēl neizvēlētais votivapa draudzētos ar vienu no izvēlētajiem; nosauksim tos par superrūķiem. Pieņemsim, ka to ir n un tie draudzējas ar atbilstoši a_1, a_2, …, a_n "parastajiem" votivapām. Tā kā parastais votivapa var draudzēties ar vairākiem superrūķiem, tad parasto votivapu ir ne vairāk par $a_1+a+\ldots+a_n$, bet votivapu pavisam ir ne vairāk kā $n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. Pirmais, otrais, …, n-tais superrūķi draudzējas atbilstoši ar a_1+1, a_2+1, …, a_n+1 šillišallām. Tie visi ir dažādi, pretējā gadījumā, starp superrūķiem atrastos divi, kas draudzējas savā starpā. Tātad šillišallu ir vismaz $a_1+1+ a_2+1+ \ldots+a_n+1=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+n$, tātad ne mazāk kā votivapu.

5.12. Pārbaudīsim, ka der skaitļi 5; 15; 35; 335; 3335, …

Skaitļus 5 un 15 pārbaudām tieši: $5^2=25$, $15^2=225$.

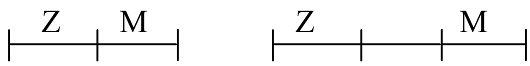
Ja n≥1, tad $\underbrace{333...33}_{n}5 = \underbrace{333...333}_{n+1} + 2 = \frac{1}{3}\cdot\underbrace{999...99}_{n+1} + 2 = \frac{10^{n+1}+5}{3}$ Tātad šī labā skaitļa kvadrāts ir

$$\left(\frac{10^{n+1}+5}{3}\right)^2=\frac{10^{2n+2}+2\cdot 10^{n+1}\cdot 5+25}{9}=1\underbrace{00...0}_{n-1}1\underbrace{00...02}_{n}5:9=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5$$ par

pēdējo vienādību var pārliecināties, tieši izpildot dalīšanu ar skolā mācīto paņēmienu.

6. nodarbības atrisinājumi

6.1. Sadalīsim visus bērnus grupās: pirmie 10, otrie 10, trešie 10. Ja kādā no šīm grupām zēnu un meiteņu skaits ir vienāds, tad viss kārtībā. Ja tādu grupu nav, tad ir viena grupa, kurā zēnu ir vairāk nekā meiteņu, un cita grupa, kurā meiteņu vairāk nekā zēnu. Apzīmēsim pirmo grupu ar Z, otro ar M; varam uzskatīt, ka Z ir pa kreisi no M.



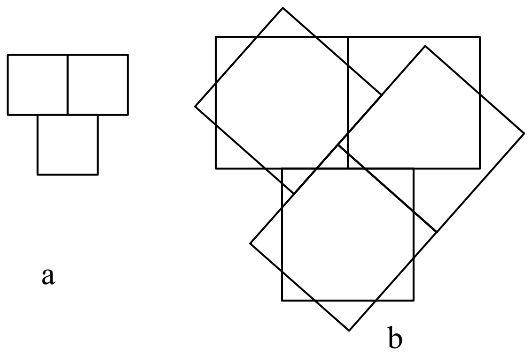
37. zīm.

Veiksim grupas Z pārbīdi par vienu vietu pa labi, izslēdzot pašu kreiso tās dalībnieku, tā rezultātā zēnu skaits vai nu paliek nemainīgs, vai samazinās par 1. Pēc galīga skaita "pārbīžu", nonākam stāvoklī M. Tā kā zēnu skaits pirms pārbīdēm bija lielāks nekā 5, bet pēc tām ir mazāks nekā 5, tad kaut kādā momentā apskatāmajā grupā bija tieši 5 zēni, tātad arī 5 meitenes.

6.2. Viegli pārbaudīt, ka $\frac{8}{65}$=0,1230.., tātad saucēja var būt 65. Tā kā $\frac{8}{64}$=0,125>123, tad, ja daļas saucējs ir mazāks vai vienāds ar 64, tad daļas skaitītājam jābūt mazākam par 8. Tātad skaitītājā var būt tikai skaitļi 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Analizējot katru gadījumu atsevišķi, redzam, ka nevienam no šiem skaitītājiem nevar piemeklēt tādu saucēju, lai decimāldaļas pirmie trīs cipari aiz komata būtu 1, 2, 3.

6.3. Jā, tā var gadīties. Ja izvēlētie skaitļi ir, piemēram, 1; 3; 4; 5, tad apskatāmās summas iznāk 1+3=4; 1+4=5; 1+5=6; 3+4=7; 3+5=8; 4+5=9.

6.4. Jā, var. Novietojam 3 kubus tā, kā parādīts 38. a zīm. (redzams skats no augšas; apakšējās skaldnes atrodas vienā plaknē).

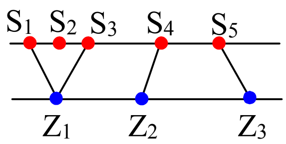


38. zīm.

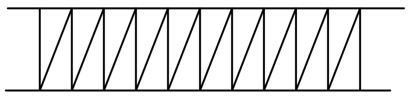
Izveidojam otru tādu pašu sistēmu un uzliekam virsū pirmajai (38. b zīm. parādīts skats no augšas).

6.5. Apzīmēsim zēnu skaitu klasē ar Z, meiteņu skaitu – ar M, bet zēnu un meiteņu skaitu, kas piedalījās olimpiādēs attiecīgi – ar Z_m, Z_f un M_m, M_f. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka $Z_m \geq \frac{4}{5}(Z_m + M_m)$ un $Z_f \geq \frac{5}{6}(Z_f + M_f)$ jeb $Z_m \geq 4M_m$ un $Z_f \geq 5M_f$. Apzīmēsim lielāko no skaitļiem Z_m un Z_f ar Z', iegūstam, ka $Z' \geq 4M_m$ un $Z' \geq 5M_f \geq 4M_f$. No šīm divām nevienādībām seko, ka $Z \geq Z' \geq 2(M_m+M_f) \geq 2M$. Pieskaitot nevienādības $Z \geq 2M$ abām pusēm 2Z, iegūstam $3Z \geq 2(M+Z)$ jeb $Z \geq \frac{2}{3}(Z+M)$, k.b.j.

6.6. Novietosim taisnes horizontāli un apzīmēsim zilos punktus no kreisās uz labo ar Z_1, Z_2, …, Z_{12}, bet sarkanos no kreisās uz labo – ar S_1, S_2, …, S_{12}. Tā kā nogriežņi nekrustojas, tad tos var sakārtot no kreisās uz labo pusi, piemēram, 39. zīm. attēloto nogriežņu izkārtojums ir Z_1S_1, Z_1S_3, Z_2S_4, Z_3S_5.



39. zīm.


40. zīm.

Pašam kreisajam nogrieznim ir divi galapunkti; pa labi no vismaz viena no tiem ir atrodas ne vairāk kā 22 citi. Tā kā katrs nākošais "prasa" vismaz vienu jaunu galapunktu un atpakaļatgriešanās nenotiek, tad pa labi no paša kreisā nogriežņa var uzzīmēt ne vairāk kā 22 citus; tātad nogriežņu skaits nepārsniedz 23 (skat. 40. zīm.).

6.7. Skaitlis 9678312 apmierina uzdevuma nosacījumus. Tam ir 7 cipari. Pierādīsim, ka vairāk ciparu nevar būt. Pieņemsim pretējo – eksistē meklējamais skaitlis A ar vismaz 8 cipariem. Skaidrs, ka A nevar būt cipars 0. Ja tam būtu cipars 5, tad nedrīkstētu būt neviena no cipariem 2; 4; 6; 8. (Tiešām, ja A dalītos ar 5 un kādu pāra ciparu, tad tas dalītos ar 10 un saturētu ciparu 0.) Tātad šajā gadījumā A nesaturētu vairāk nekā 5 ciparus, un tā ir pretruna ar pieņēmumu.
Tātad A nesatur ciparu 5, un tam ir 8 cipari tikai tajā gadījumā, ja tie ir 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9. bet šo ciparu summa ir 40, kas nedalās ar 9, tātad arī A nedalās ar 9; tā ir pretruna. Tātad A nevar būt 8 cipari.
Piemēri 1; 12; 312; 6312; 84312; 984312 un sākumā minētais skaitlis parāda, ka A ciparu skaits var būt jebkurš skaitlis no 1 līdz 7 ieskaitot.

6.8. Jā, ir, piemēram, izmantojot kvadrātus ar izmēriem 1x1, 4x4, 7x7, 8x8, 9x9, 10x10, 14x14, 15x15, 18x18 var izveidot taisnstūri ar izmēriem 32x33.

6.9. Jānis noteikti ir kļūdījies.
Pieņemsim pretējo – ka Jānim izdevies to izdarīt.
Apzīmēsim Jāņa izvēlētos naturālos skaitļus ar $A<B<C<D<E$, bet kā pāru summas iegūtos skaitļus – ar M+1, M+2, …, M+10. No 5 skaitļiem A, B, C, D, E var izveidot 10 pārus, un katrs skaitlis ietilpst kā saskaitāmais tieši četros no tiem. Saskaitot visus šos pārus, iegūstam

$$4(A+B+C+D+E)=(M+1)+(M+2)+\ldots+(M+10)$$
$$4(A+B+C+D+E)=10M+55$$

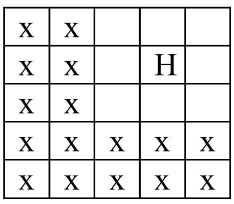
Vienādības kreisajā pusē ir pāra, bet labajā – nepāra skaitlis. Tā ir pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

6.10. Apzīmēsim grāmatas ar skaitļiem 1, 2, 3, …, 15; ar pasvītrojumu norādīsim, kuras grāmatas tiek pārvietotas, bet ar zvaigznīti norādīsim vietu, kurā šīs grāmatas novieto.

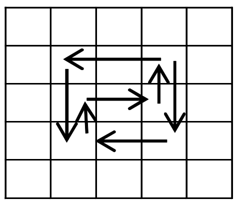
*1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
8 9 10 11 12 13 14 1 2 3 4 5 6 7 15*
8 9 10 11 12 13 2 3 4 5 6 7 15 14* 1
8 9 10 11 12 3 4 5 6 7 15 14 13* 2 1
8 9 10 11 4 5 6 7 15 14 13 12* 3 2 1
8 9 10 5 6 7 15 14 13 12 11* 4 3 2 1
8 9 6 7 15 14 13 12 11 10* 5 4 3 2 1
8 7 15 14 13 12 11 10 9* 6 5 4 3 2 1
15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

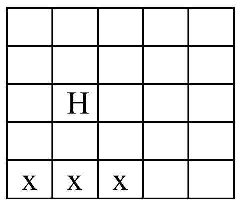
6.11. Iedomāsimies, ka minētās operācijas veic Jānis, bet uz blakus tāfeles Andris uzrakstījis par 1 lielākus skaitļus (t. i., skaitļus 2, $1+\frac{1}{2}$; $1+\frac{1}{3}$; …, $1+\frac{1}{1991}$). katru reizi, kad Jānis nodzēš kādu skaitli, Andris nodzēš savu atbilstošo skaitli; katru reizi, kad Jānis uz savas tāfeles uzraksta kādu skaitli x, tad Andris uz savas tāfeles uzraksta skaitli x+1. Jānim nodzēšot skaitļus a un b, Andris nodzēš skaitļus a+1 un b+1. Kad Jānis nodzēsto skaitļu vietā uzraksta a+b+ab, Andris uzraksta 1+a+b+ab. Ievērosim, ka 1+a=b+ab=(1+a)(1+b). No tā seko, ka uz Andra tāfeles esošo skaitļu reizinājums gājiena rezultātā nemainās. Šis reizinājums ir vienāds ar $2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1991}{1990}\cdot\frac{1992}{1991}$=1992. Tātad beigās, kad paliek viens skaitlis, tas arī ir 1992. Tā kā skaitļi uz Jāņa tāfeles ir par 1 mazāki nekā uz Andra tāfeles, tad Jāņa iegūtais skaitlis būs 1991.

6.12. Ja, var. Apzīmēsim Holmsu ar H, Moriartiju ar M. Vispirms H iet uz 41. zīm. attēloto rūtiņu; ar krustiņiem parādītas rūtiņas, kurās pēc sava gājiena var atrasties M, ja H viņu neredz.



41. zīm.


42. zīm.



43. zīm.

Tālāk H veic 12 gājienu sēriju (skat. 42. zīm.). Pēc katra H gājiena ar krustiņiem atzīmējot M iespējamās atrašanās vietas, redzam, ka pēc M 11. atbildes gājiena izveidojas 43. zīm. attēlotā situācija, skaidrs, ka pēc sava 12. gājienu H noteikti ieraudzīs M.