“Profesora Cipariņa klubs” 1990./91. m.g.

1. nodarbība

1.1. No sērkociņiem izveidota nepareiza skaitliska vienādība (1. zīm.). Pārlikt vienu sērkociņu citā vietā, lai iegūtu pareizu vienādību.

1. zīm.

1.2. Vai skaitli 1 000 000 000 var izteikt kā divu veselu pozitīvu skaitļu reizinājumu, kuru pierakstā nav nevienas nulles? Vai tā var izsacīt skaitli 100 000 000?

1.3. Ieva izcepa plātsmaizi ar izmēriem 50 cm×80 cm. Viņa grib plātsmaizi sadalīt gabaliņos, kuru izmēri ir 6 cm×8 cm. Kādu lielāko daudzumu gabaliņu Ieva var iegūt no izceptās plātsmaizes?

1.4. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts pozitīvs viencipara skaitlis, visi ierakstītie skaitļi dažādi. Pierādīt, ka var atrast divas rūtiņas ar kopīgu malu, kurās ierakstīto skaitļu summa nav pirmskaitlis. (Par pirmskaitli sauc skaitli, kuram ir tieši 2 dalītāji – pats skaitlis un vieninieks.)

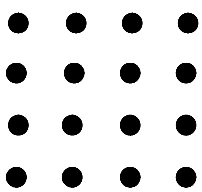
1.5. Plaknē novilktas 5 taisnes. Katras divas no tām krustojas, un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. Vai šo taišņu krustpunktus var sanumurēt ar dažādiem skaitļiem no1 līdz 10 tā, lai uz visām taisnēm numuru summa būtu viena un tā pati?

1.6. Profesors Aizmārša katru rītu tieši 8.00 iziet no mājām. Šajā brīdī pie durvīm piebrauc automašīna, kas braukusi viņam pretī no universitātes; profesors tajā iesēžas, un automašīna aizved viņu uz universitāti.

Notiekot pārejai no vasaras uz ziemas laiku (pulksteņus pagriež par stundu atpakaļ), profesors par to aizmirsa un tāpēc iznāca no mājām stundu agrāk. Ceļā viņš satika automašīnu, kas kā parasti brauca pie viņa. Šoferis pamanīja profesoru, uzņēma to automašīnā un aizbrauca uz universitāti. Tāpēc profesors Aizmārša ieradās universitātē 20 minūtes agrāk nekā parasti.

Cik ilgi Aizmārša gāja kājām? Pieņemt, ka gan viņa, gan automašīnas ātrums ir nemainīgs.

1.7. Kvadrātiska režģa veidā izvietoti 16 punkti (2. zīm.).



2. zīm.

Uzzīmēt slēgtu līniju ar 6 posmiem, kas iet caur visiem punktiem. Vai posmu skaitu var samazināt?

1.8. Kāds vismazākais daudzums šaha zirdziņu jānovieto uz galdiņa, kura izmēri ir 6×6 rūtiņas, lai katrs lauciņš būtu apdraudēts?

1.9. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Katrā no tām ierakstīts vesels pozitīvs skaitlis. ar vienu gājienu drīkst pieskaitīt vieninieku divām rūtiņām, kurām ir kopīga mala. Vai var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi, ja sākotnējais izvietojums ir tāds kā tabulā A, B un C?

A

5	6	6	4
4	5	5	4
5	4	3	4
6	4	5	6

B

3	4	4	3
4	4	3	5
3	4	4	3
4	4	3	4

C

3	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	4
4	4	4	3

1.10. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. vai var tā rūtiņās ierakstīt skaitļus no 1 līdz 25 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu summa būtu pirmskaitlis?

1.11. Vai kvadrātu var sagriezt 99 vienādās daļās, kas nav taisnstūri?

1.12. Dotas 12 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 6 ir īstas (tām ir vienāda masa), bet 6 viltotas (arī tām ir vienāda masa, viltotās monētas masa ir mazāka nekā īstās monētas masa). Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 9 svēršanām uz šiem svariem atrast visas īstās monētas?

2. nodarbība

2.1. Vai var uzzīmēt plaknē 7 punktus un katru no tiem savienot ar četriem citiem ar taisnes nogriežņu palīdzību tā, lai rastos tikai viens nogriežņu krustpunkts? Nekādi 3 punkti nedrīkst atrasties uz vienas taisnes.

2.2. Jānis apgalvo, ka varēs pasacīt, cik gadu ir jebkuram sarunu biedram, ja tas paziņos, kādus atlikumus dod meklējamais gadu skaitlis, ja dala to ar 5 un 7. Kā Jānis to varēs izdarīt?

2.3. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Tajās jāieraksta veseli skaitļi no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā – cits skaitlis). Pēc tam katrām divām rūtiņām, kurām ir kopīga mala, jāaprēķina tajās ierakstīto skaitļu summa (pavisam iznāks 12 summas). Kā jāieraksta skaitļi, lai šīm summām būtu iespējami maz dažādu vērtību?

2.4. Sadalīt 3. zīm. parādīto šaha galdiņu 5 apgabalos tā, lai abi vieninieki nonāktu vienā apgabalā, abi divnieki – otrā, …, abi piecinieki – piektajā apgabalā. Apgabalu robežas iet tikai pa rūtiņu līnijām vai šaha galdiņa malām. Katra apgabala iekšienē no katras rūtiņas var aiziet uz katru citu, pārvietojoties tikai pa horizontālēm un vertikālēm.

3							
						4	
		5					
1							1
			3				
	2					2	
		5	4				

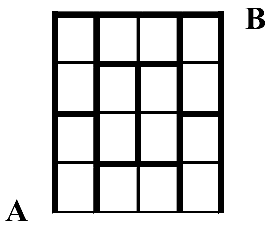
3. zīm.

2.5. Taisnstūris sastāv no 77×45 rūtiņām. Vai to var sagriezt gabalos, kuru izmēri ir 7×11 rūtiņas?

2.6. Andris, Jānis un Pēteris pagājušajā vasarā izlasījuši 80 dažādas grāmatas, turklāt katrs izlasījis tieši 50 grāmatas. Sauksim grāmatu par populāru, ja to izlasījuši visi trīs zēni, un par nepopulāru, ja to izlasījis tikai viens no viņiem. Kuru grāmatu ir vairāk – populāro vai nepopulāro? Par cik vairāk?

2.7. Pirmajā kaudzē ir 15 konfekšu, otrajā – 20. Ar vienu gājienu var apēst no vienas kaudzes 1, 2 vai 3 konfektes. Vai uzvar tas no diviem spēlētājiem, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu? Gājienus abi spēlētāji izdara pēc kārtas.

2.8. Kvadrātā, kas parādīts 4. zīm., no punkta A jāaiziet uz punktu B, ejot pa biezajām līnijām; turklāt ne pa vienu ceļa posmu nedrīkst iet divas vai vairāk reizes. Katras rūtiņas malas garums ir 1. Kāds ir lielākais iespējamais meklējamā maršruta garums?



4. zīm.

2.9. Uz galda atrodas 101 kūka. Pēc ārējā izskata tās ir vienādas. Karlsons zina, ka 100 kūkas ir ar vienādu masu, bet viena – ar citādu (vai nu lielāku, vai mazāku). Doti sviras svari bez atsvariem. Kā ar 2 svēršanu palīdzību noskaidrot, vai atšķirīgā kūka iz smagāka vai vieglāka par pārējām? Pašu atšķirīgo kūku atrast nav nepieciešams.

2.10. Bankas seifā glabājas svarīgi dokumenti. Bankai ir 4 direktori. Viņi nolemj pierīkot seifam vairākas piekaramās atslēgas tā, lai nekādi divi direktori vieni paši kopīgi nevarētu atslēgt seifu, bet jebkuri 3 direktori, sapulcējušies kopā, to varētu izdarīt. Kāds mazākais atslēgu skaits šādam mērķim nepieciešams?

2.11. Aplī stāv 25 krēsli. Brīdi pa brīdim pienāk kāda no skaistuma konkursa dalībniecēm un apsēžas uz kāda no brīvajiem krēsliem. Tajā pašā brīdī viena no viņas kaimiņienēm (ja tādas ir) pieceļas un aiziet. Sākumā visi krēsli ir brīvi. Kāds lielākais krēslu daudzums var būt vienlaikus aizņemts? (Apsēšanās un piecelšanās momentus neaplūkojam.)

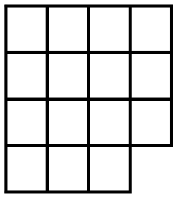
2.12. Aplī izrakstīti skaitļi no 1 līdz 1990 (pēc kārtas). Andris, sākot ar skaitli 1, izsvītro pēc kārtas katru otro no vēl neizsvītrotajiem (sākumā 1 atstāj, 2 izsvītro, 3 atstāj, 4 izsvītro …) tik ilgi, līdz paliek tikai viens neizsvītrots skaitlis. Kas tas ir par skaitli?

3. nodarbība

3.1. Andris un Juris nostājās viena ceļa divos galos un vienlaikus sāka skriet viens otram pretī. Pēc sastapšanās Andris līdz galam skrēja vēl 27 sekundes, bet Juris – vēl 12 sekundes. Cik ilgā laikā katrs no zēniem veica visu ceļu? Katra zēna ātrums visā skrējiena laikā palika nemainīgs.

3.2. Zināms, ka skaitis VALKA lielāks par skaitli VALLE. Kurš no skaitļiem KALNS vai LAIKS ir lielāks?
(Ar burtiem apzīmēti cipari, kas nav nulle; ar vienādiem burtiem – vienādi cipari, ar dažādiem – dažādi.)

3.3. Vai 5. zīm. parādīto figūru var sagriezt 3 vienādās daļās tā, lai griezumi tiktu izdarīti tikai pa rūtiņu līnijām?



5. zīm.

3.4. Kādu lielāku daudzumu dažādu ciparu var izrakstīt aplī tā, lai katri divi blakus uzrakstīti cipari, lasot tos vienalga kādā virzienā, veidotu pirmskaitļa pierakstu?

3.5. Uz riņķa līnijas atzīmēti 24 punkti. Divi spēlētāji pēc kārtas savieno pa diviem punktiem ar taisnes nogriežņiem. No viena punkta drīkst vilkt ne vairāk kā vienu nogriezni. Nogriežņi nedrīkst krustoties. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kas uzvar, pareizi spēlējot, – tas, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu?

3.6. Tabula sastāv no a) 2×2, b) 3×3 rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt dažādus veselus pozitīvus skaitļus tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu vesela skaitļa kvadrāts?

3.7. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Sākumā visas rūtiņas ir baltas. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties vienā rindiņā vai vienā kolonnā trīs pēc kārtas novietotas rūtiņas un mainīt tajās krāsu uz pretējo (baltu – uz melnu, melnu – uz baltu). Vai taisnība, ka, daudzkārt izpildot šādus gājienus var iegūt jebkuru rūtiņu izkrāsojumu baltā un melnā krāsā?

3.8. Ar vienu gājienu skaitli var pareizināt ar 2 vai arī pieskaitīt tam 1. Piemēram, ar 5 šādiem gājieniem var no 4 iegūt 37.
Ar kādu mazāko gājienu skaitu var no 1 iegūt 1990?

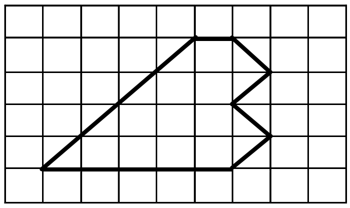
3.9. Kā, izmantojot tikai lineālu, rūtiņu lapā var uzzīmēt kvadrātu, kura laukums ir 80 reižu lielāks par 1 rūtiņas laukumu?

3.10. Skaitļu virknē divus pirmos skaitļus izvēlas patvaļīgi. Ja pēdējais skaitlis ir b, bet priekšpēdējais ir a, tad nākamais virknes skaitlis ir $\frac{1+b}{a}$. Piemēram, aiz 1 un 1 seko 2, pēc tam 3, pēc tam 2, pēc tam 1 utt.
a) Pieņemsim, ka divi pirmie skaitļi ir 1 un 1. Kāds būs 1990. skaitlis?
b) Pieņemsim, ka divi pirmie skaitļi ir a un b, turklāt tie ir pozitīvi. Kāds būs 1990. skaitlis?

3.11. a) Vai eksistē izliekts 7-stūris, kuru var sagriezt paralelogramos?

b) Vai 6. zīm. rūtiņu lapā attēloto 7-stūri var sagriezt paralelogramos?

c) izdomāt 9-stūri, kuru var sagriezt paralelogramos.



6. zīm.

3.12. Kādā salā dzīvo cilvēki, kas vienmēr runā taisnību, un cilvēki, kas vienmēr melo, citādu iedzīvotāju tur nav. Salā lietotajā valodā vārdi "ding" un "dong" nozīmē "jā" un "nē", bet nav zināms, kuram vārdam kura nozīme. Kā, satiekot nepazīstamu salinieku, ar vienu jautājumu panākt, lai viņš atbildētu "dong"?

4. nodarbība

4.1. Ar cipariem 1; 9; 9; 1, izmantojot tos tieši šādā kārtībā un lietojot aritmētisko darbību zīmes, iekavas, kvadrātsaknes zīmes un kāpināšanu, izteikt naturālos skaitļus no 1 līdz 25.

4.2. Ap apaļu galdu vienādos attālumos sēž 15 zēni un 15 meitenes. Zināms, ka divi zēni nekur nesēž blakus viens otram. Pierādīt ka divas meitenes nekur nesēž blakus viena otrai.

4.3. Autobusu sauc par pārpildītu, ja tajā brauc vairāk nekā 100 pasažieru. Kas lielāks: 1. janvārī kursējošos pārpildīto autobusu daļa starp visiem autobusiem vai pārpildīto autobusu daļa starp visiem pasažieriem?

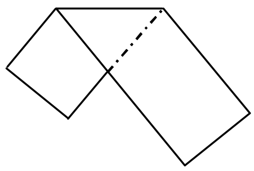
4.4. Dotas 5 pēc ārējā izskata vienādas monētas. 3 no tām ir ar vienādu masu, viena vieglāka, bet otra – smagāka. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanu palīdzību atrast vieglāko un smagāko monētu?

4.5. Katrā punktā uz taisnes dzīvo viens rūķītis, kas pieder vai nu pie votivapu, vai šillišallu cilts. Pierādīt, ka var atrast vienas cilts rūķīšus, no kuriem viens dzīvo tieši vidū starp abiem pārējiem.

4.6. Trijstūra visas malas ir 5 cm garas; tā virsotnes, kontūras un iekšpuse nokrāsota dzeltenā krāsā. Jānim ir trijstūrveida spiedogs, tā visu malu garumi ir 4 cm. Vai, pamērcējot šo spiedogu melnā krāsā un uzspiežot divas reizes, var nosegt visu dzelteno apgabalu?

4.7. Klasē katrs zēns draudzējas tieši ar 3 meitenēm, bet katra meitene – tieši ar 5 zēniem. Ģeogrāfijas stundas notiek telpā, kurā ir 15 divvietīgi soli; 18 skolēni piedalās matemātikas pulciņā. Cik klasē ir skolēnu?

4.8. Taisnstūrveida papīra lapu var pārklāt ar riņķi. Vai šo lapu pēc tam , kad tā vienreiz pārlocīta (7. zīm.), noteikti var pārklāt tādu pašu riņķi?



7. zīm.

4.9. Šaha galdiņa rūtiņās sarakstīti skaitļi no 1 līdz 64 (katrā rūtiņā cits skaitlis). Pierādīt, ka var atrast tādas divas rūtiņas, kurām ir kopīga mala vai kopīga virsotne un kurās ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz 9.

4.10. Dotas 12 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 11 monētām masa ir vienāda, bet vienai – citāda. Doti sviras svari bez atsvariem. Kā ar četru svēršanu palīdzību atrast atšķirīgo monētu?

4.11. Uz taisnes t atrodas nogrieznis AB ar garumu 1 cm. To drīkst pārvietot plaknē tā, ka tas visu laiku paliek paralēls taisnei t un kustības beigās atkal atrodas uz taisnes t, turklāt punktu A un B izveidotajām līnijām nedrīkst būt kopīgu punktu. Kāds ir lielākais iespējamais attālums, kādā punkts A var pārvietoties no sākuma stāvokļa?

4.12. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz 10. (Katrs skaitlis – tieši 10 rūtiņās.) Pierādīt, ka atradīsies rindiņa vai kolonna, kurā ierakstīti vismaz četri dažādi skaitļi. Vai var gadīties, ka nevienā rindiņā un nevienā kolonnā nav vairāk par četriem dažādiem skaitļiem?

5. nodarbība

5.1. Parādīt, kā uz šaha galdiņa novietot 12 zirdziņus tā, lai tie kopumā apdraudētu visus laucinus. (Zirdziņš apdraud arī to lauciņu, uz kura atrodas.)

5.2. Cik ir sešciparu skaitļu T ar īpašību: katrs cipars, kas sastopams T pierakstā, sastopams tur vismaz divās vietās? Starp T cipariem nedrīkst būt nulles.

5.3. Kādā vislielākajā daudzumā dažādu apgabalu var sagriezt kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas? Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.

5.4. Vai var izgatavot tādu piena paketi trijstūra piramīdas formā, lai pie katras šķautnes būtu vismaz viens plats leņķis?

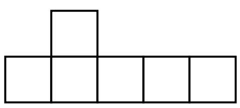
5.5. Vai kvadrātu var sagriezt šaurleņķa trijstūros?

5.6. Ķēniņš zina, ka no kaimiņvalsts pie viņa ciemos ieradīsies 2, 3 vai 4 stiprinieki (cik tiešām atnāks, nav zināms). Ķēniņš jau iepriekš grib sagatavot dāvanas − vairākus zelta kausus, ko pasniegt viesiem. Turklāt, lai neviens neapvainotos, viņš grib, lai visu stiprinieku saņemtie zelta daudzumi būtu vienādi.
Cik kausu vismaz jāizgatavo? Kausus nedrīkst skaldīt gabalos.

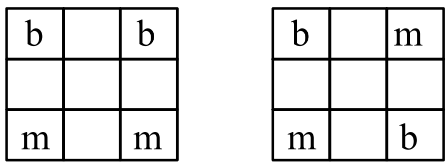
5.7. Ja skaitli A pareizina ar 3, tad A un iegūtais rezultāts B satur kopā visus 10 ciparus, katru tieši vienu reizi.
a) Pierādīt, ka gan A, gan B dalās ar 9.
b) Atrast vismaz 2 dažādus skaitļu A un B pārus.

5.8. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām. Tas pilnībā pārklāts ar 38 plāksnītēm, kuru izmēri ir 2×2 rūtiņas. Vai var gadīties, ka nevar noņemt nevienu plāksnīti, lai kvadrāts joprojām paliktu pārklāts?

5.9. Vai no vairākām figūrām (8. zīm.) var salikt taisnstūri? Figūras nedrīkst pārklāties, tās var būt novietotas arī citādi. Katra figūra sastāv no 6 kvadrātiskām rūtiņām.



8. zīm.



a b

9. zīm.

5.10. Kvadrātā ar izmēriem 3×3 lauciņi novietoti divi melnie un divi baltie šaha zirdziņi (9. a zīm.). Vai pēc vairākiem gājieniem var izveidoties 9. b zīm. parādītā situācija?

5.11. Kādā mežā dzīvo divu cilšu rūķīši: votivapas un šillišallas. Katram votivapam viņa draugu vidū ir vairāk šillišallu nekā votivapu; visi votivapas, ar ko draudzējas katrs šillišalla, draudzējas arī savā starpā. Vai votivapu var būt vairāk nekā šillišallu?

5.12. Skaitli sauc par labu, ja neviens tā cipars nav lielāks par nākamo ciparu. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz labo skaitļu, kuri beidzas ar 5 un kuru reizinājums pašiem ar sevi arī ir labs skaitlis.

6. nodarbība

6.1. Rindā stāv 15 zēni un 15 meitenes. Pierādīt, ka var izvēlēties 10 pēc kārtas stāvošus bērnus tā, lai starp tiem būtu 5 zēni un 5 meitenes.

6.2. Pārveidojot parastu daļu decimāldaļā, 3 pirmie cipari aiz komata ir 1, 2, 3 (šādā kārtībā). Kāda ir mazākā iespējamā saucēja vērtība? (gan skaitītājs, gan saucējs ir veseli pozitīvi skaitļi.)

6.3. Jānis izvēlējās 4 dažādus naturālus skaitļus, aprēķināja visas iespējamās šo skaitļu pāru summas un ieguva 6 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus. Vai var gadīties, ka Jānis nav kļūdījies?

6.4. Vai var novietot 6 vienādus kubus tā, lai katri 2 no tiem saskartos ar skaldnes daļu? (Saskaršanās ar šķautni vai virsotni netiek ņemta vērā.)

6.5. Matemātikas olimpiādē skolā zēnu bija ne mazāk kā četras piektdaļas no visiem dalībniekiem, bet fizikas olimpiādē – ne mazāk kā piecas sestdaļas no visiem dalībniekiem. Katrs skolēns piedalījās vismaz vienā olimpiādē. Pierādīt, ka vismaz divas trešdaļas skolēnu iz zēni.

6.6. Uz vienas no divām paralēlām taisnēm atzīmēti 12 zili punkti, bet uz otras – 12 sarkani punkti. Tiek novilkti taisnes nogriežņi, kam viens galapunkts ir zils, bet otrs – sarkans. Kādu lielāko daudzumu nogriežņu var novilkt, lai nekādi divi no tiem savā starpā nekrustotos?

6.7. Naturāls skaitlis dalās ar katru no saviem cipariem; visi cipari ir dažādi. Cik ciparu tam var būt?

6.8. Vai ir tāds taisnstūris, kuru var sagriezt 9 dažādos kvadrātos?

6.9. Jānis izvēlējās piecus dažādus naturālus skaitļus, aprēķināja visas iespējamās šo skaitļu summas un ieguva 10 pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus. Vai var gadīties, ka Jānis nav kļūdījies?

6.10. Plauktā stāv 15 grāmatas. Ar vienu gājienu atļauts paņemt jebkuru daudzumu blakus stāvošu grāmatu un tādā pašā kārtībā novietot plauktā citā vietā. Pierādīt, ka ar 8 gājieniem var panākt, lai grāmatas būtu novietotas pretējā kārtībā, nekā tas bija sākumā.

6.11. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1, ½, 1/3, …, 1/1991. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst jebkurus divus uz tāfeles uzrakstītus skaitļus (apzīmēsim tos ar a un b) un uzrakstīt to vietā vienu skaitli a+b+ab. Šādus gājienus izdara, kamēr uz tāfeles paliek uzrakstīts viens vienīgs skaitlis. Kāds tas var būt?

6.12. Kvadrāts sas6tāv no 5×5 rūtiņām. Vienā rūtiņā atrodas Šerloks Holmss, otrā – profesors Moriartijs. Šerloks Holmss redz vienas rūtiņas attālumā (pa horizontāli, vertikāli un diagonāli); Moriartijs pārskata visu kvadrātu. Gan Holmss, gan Moriartijs ar vienu gājienu pārvietojas uz kādu no blakus rūtiņām (pa horizontāli vai pa vertikāli); gājienus izdara pēc kārtas. Vai Holmss var izvēlēties tādu kvadrāta apstaigāšanas plānu, lai noteikti ieraudzītu Moriartiju, kaut arī viņš censtos izvairīties?