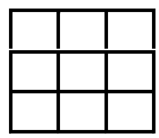
Profesora Cipariņa klubs 1992./1993. mācību gads

Uzdevumi

1.ievaduzdevumi

1. Katra mazā kvadrātiņa malas garums ir 1 (skat. 1.zīm.).



1.zīm.

Vai attēloto režģi var uzzīmēt, novelkot,

a) 6 līnijas, katru ar garumu 4;

b) 4 līnijas, katru ar garumu 6?

2. Dots, ka skaitļi n, n+1 un n+15 ir pirmskaitļi. Atrast n!

3.*Rindā izrakstīti visi veselie pozitīvie skaitļi:

a) no 1 līdz 100,

b) no 1 līdz 1992.

Cik reižu uzrakstīts cipars 1?

4. Divi ķermeņi sastāv no kubiņiem 1x1x1.

Vai var gadīties, ka tiem abiem ir vienādi virsmas laukumi, bet viena ķermeņa tilpums 10 reizes pārsniedz otra ķermeņa tilpumu?

5.*Ja Andris pakāpjas uz pleciem Bruno, viņš tikko redz pāri žogam.

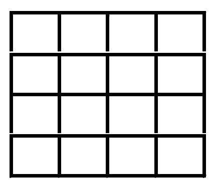
Ja Bruno pakāpjas uz pleciem Dainim, viņš pāri žogam neredz.

Ja Dainis pakāpjas uz pleciem Edgaram, viņš viegli redz pāri žogam.

Vai var pasacīt, kurš no zēniem ir visīsākais un kurš visgarākais?

6. No cipariem 1, 2, …, 9, katru lietojot tieši vienu reizi, izveidojiet daļu, kuras vērtība ir $\frac{1}{2}$. Vai var izveidot daļas ar vērtību $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$;...; $\frac{1}{9}$?

7.*Katra mazā kvadrātiņa malas garums ir 1 (skat. 2.zīm.).



2.zīm.

Vai attēloto režģi var uzzīmēt, novelkot

a) 8 līnijas, katru ar garumu 5;

b) 5 līnijas, katru ar garumu 8?

8. Vai skaitlis $4^{15}+15^{4}$ ir pirmskaitlis?

9.*Vai pastāv tāds naturāls skaitlis n, ka, uzrakstot rindā visus naturālos skaitļus no 1 līdz n, visi cipari uzrakstīti vienādu reižu skaitu?

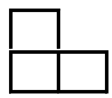
10.*Parādiet kā kubu var sagriezt 1992 kubos (starp tiem var būt arī vienādi).

11.*Cik ir tādu naturālu skaitļu, kam ir 7 cipari, tie visi ir dažādi un sakārtoti dilstošā kārtībā?

12. Paralelograms sagriezts 3 vienādsānu trijstūros, starp kuriem nav vienādu. Aprēķiniet paralelograma leņķus!

13.*Skaitļu virknē 1; 2; 3; 5; 8; 13;… katrs nākošais loceklis vienāds ar divu iepriekšējo summu. Pierādiet, ka virsotnes 106-ajam loceklim ir vairāk ciparu nekā 100-ajam!

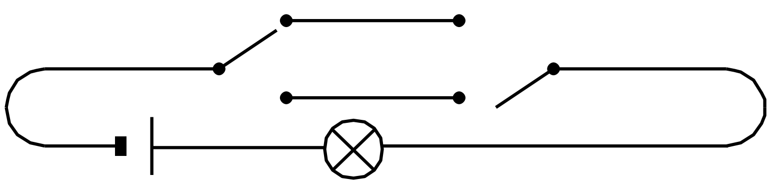
14.*Kvadrāts sastāv no 8x8 rūtiņām, viena rūtiņa no tā izgriezta. Vai atlikušo daļu noteikti var sagriezt tādos stūrīšos, kādi parādīti 3.zīm.? Stūrīši var būt novietoti arī citādi.



3.zīm.

15.*Apskatām naturālos skaitļus no 1 līdz 1000 ieskaitot. Aprēķinām atsevišķi visu nepāra skaitļu visu ciparu summu un visu pāra skaitļu visu ciparu summu. Kura no tām lielāka? Par cik?

16.*Shēmā, kas redzama 4.zīm., spuldzīti var ieslēgt un izslēgt no divām vietām, neatkarīgi no otrā slēdža stāvokļa. Izdomājiet shēmu, kas ļautu spuldzīti ieslēgt vai izslēgt no trim vietām neatkarīgi no otrā slēdža stāvokļa.



4.zīm.

17. Atrodiet visus trīsciparu skaitļus kam katram piemīt īpašība: pareizinot to pašu ar sevi, iegūtajā reizinājumā trīs pēdējie cipari veido sākotnējo skaitli.

18. Katrs no četriem zēniem – Andris, Bruno, Didzis, Edgars – vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo. Kādu dienu starp viņiem notika šāda saruna:

Andris Bruno: ”Tu esi melis!”

Edgars Andrim: “Tu pats esi melis!”

Didzis Edgaram: “Viņi taču abi ir meļi!” (pēc pārdomām) “Un tu arī!”

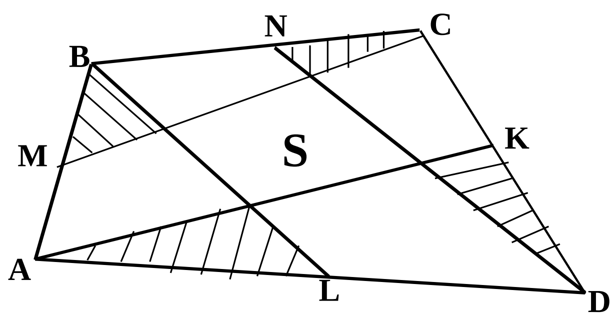
Kurš no zēniem runā patiesību, kurš melo?

19. Atrast vismazāko skaitļa 999 daudzkārtni, kas lielāks par 999 un kura pierakstā sastopami tikai nepāra cipari.

20. Ja pļavā, kurā vienmērīgi aug zāle, palaiž 9 govis, tās noēd visu pļavu 4 dienās; ja tur palaiž 8 govis, tās noēd visu pļavu 6 dienās. Cik govju jāpalaiž pļavā, lai zāles daudzums tajā visu laiku paliktu nemainīgs? (Pieņemsim, ka govis ēd nepārtraukti un vienmērīgi.)

21. Skolā ir 3 piektās klases, katrā mācās 30 bērnu. Katram bērnam abās pārējās klasēs kopā ir tieši 31 draugs. Pierādiet: var izveidot komisiju, kurā ir pa vienam skolēnam no katras klases, kas visi trīs savā starpā ir draudzīgi.

22. Punkti M, N, K, L ir malu AB, BC, CD, DA viduspunkti (skat. 5.zīm.). Pierādiet, ka iesvītroto laukumu summa vienāda ar četrstūra S laukumu.



5.zīm.

23.*Ja dots skaitlis X, tad tā astoto pakāpi var iegūt ar 3 reizināšanām: $XxX=X^2$; $X^2xX^2=X^4$; $X^4xX^4=X^8$. Parādiet, kā X^{170} var iegūt ar 9 reizināšanām.

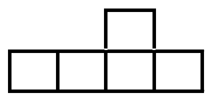
24. Par rongo sauc četras rūtiņas ar centriem tāda taisnstūra virsotnēs, kura malas paralēlas rūtiņu līnijām. Cik rongo vienlaikus var ievietot kvadrātā, kas sastāv no 5x5 rūtiņām? Dažādiem rongo nedrīkst būt kopīgu rūtiņu.

25. Cik reizes diennaktī leņķis starp pulksteņa stundu un minūšu rādītājiem ir 45^0?

26. Dots, ka n ir naturāls skaitlis. Pierādiet, ka 11n+7 un 2n+5 ciparu summas nav vienādas.

27.*Kā sagriezt kvadrātu 3 daļās, lai no tām varētu salikt platleņķa trijstūri?

28. Vai taisnstūri ar izmēriem 5x10 rūtiņas var pārklāt ar 10 tādām figūrām, kāda parādīta 6.zīm.?



6.zīm.

29. Ja uzdevums, kuru jūs atrisinājāt pirms tam, kad atrisinājāt šo, bija grūtāks par uzdevumu, kuru jūs atrisinājāt pēc tam, kad atrisinājāt uzdevumu, kuru atrisinājāt pirms tam, kad atrisinājāt šo, tad vai taisnība, ka uzdevums, kuru jūs atrisinājāt pirms tam, kad atrisinājāt šo, bija grūtāks par šo?

30.*Turnīrā piedalās 7 komandas. Katra spēlē ar katru vienu reizi, neizšķirtu nav. Vai noteikti pēc turnīra beigām var atrast tādas divas komandas A un B, ka katra cita komanda zaudējusi vai nu pret A, vai pret B, vai pret abām reizē?

31. Atrast visus

a) četrciparu skaitļus, kas vienādi ar savas ciparu summas ceturto pakāpi,

b) piecciparu skaitļus, kas vienādi ar savas ciparu summas piekto pakāpi.

32. Atrast 11 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, kuru kvadrātu summa būtu kāda naturāla skaitļa kvadrāts. (Pietiek uzrādīt vienu piemēru.)

33.*Parādiet, ka katru trijstūri var sagriezt deviņos izliektos piecstūros!

34.*Apzīmēsim ar n šī uzdevuma atbildi. Atrodiet skaitļa 3n-3984 vērtību!

35. a) uzzīmējiet 12 dažādas figūras, kas katra sastāv no 5 kvadrātiņiem, kuri savā starpā savienoti ar malām (vienas tādas figūras piemēru skat. 6.zīm.; tās sauc par pentamino).

b) Parādiet, kā ar 12 dažādiem pentamino var aplīmēt kuba virsmu tā, lai pentamino nepārklātos un nepaliktu neaplīmētas vietas.

36.*Turnīrā piedalās 9 komandas. Katra spēlē ar katru vienu reizi, neizšķirtu nav. Vai noteikti pēc turnīra beigām var atrast tādas divas komandas A un B, ka katra cita komanda zaudējusi vai nu pret A, vai pret B, vai pret abām reizē?

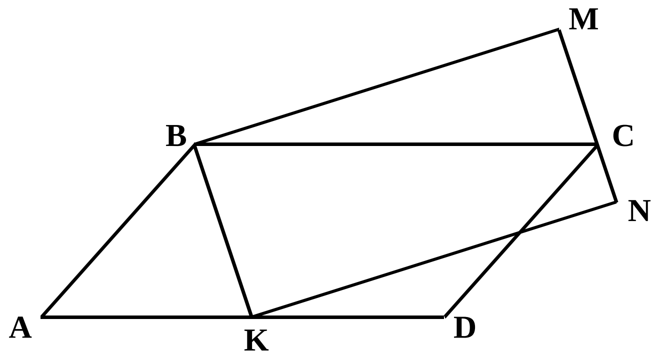
37. Vai $22^{77}+55^{33}$ dalās ar 7?

38. Nepareizā vienādībā 101-102=1 pārlikt vienu ciparu citā vietā, lai iegūtu pareizu vienādību. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

39.*Vai var uzzīmēt 17 taisnes tā, lai katra no tām krustotu tieši 8 citas?

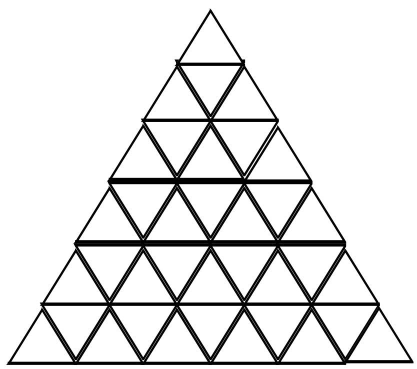
40.*Ja papīra lapu, uz kuras uzrakstīti cipari, apgriež “ar kājām gaisā”, tad cipari 0; 1; 8 savu nozīmi nemaina, 6 un 9 mainās vietām, bet pārējie cipari zaudē jēgu. Cik ir tādu sešciparu skaitļu, kas nemainās, ja lapu ar to pierakstu apgriež “ar kājām gaisā”?

41. Četrstūri ABCD un BMNK ir paralelogrami; C atrodas uz MN, K uz AD (skat. 7.zīm.). Pierādīt, ka paralelogramu laukumi ir vienādi.



7.zīm.

42. Kāds ir mazākais posmu skaits lauztā līnijā, kas iet caur visām 8.zīm. parādīto mazo trijstūrīšu virsotnēm?



8.zīm.

43. Klasē ir 16 skolēni, katrs draudzējas tieši ar 4 citiem. Vai skolēnus noteikti var sasēdināt solos pa pāriem tā, lai katrā solā sēdētu draugi?

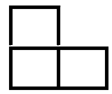
44. Pa apli stāv 81 meitene un 119 zēni. Pierādīt, ka var atrast tādas divas meitenes, starp kurām stāv tieši 39 citi bērni.

45. Atrodiet tādus naturālus skaitļus a, b un c, ka

$$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}+\sqrt{\sqrt{b}-\sqrt{b-1}}+\sqrt{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}=1$$

Pietiek atrast vienu piemēru.

46. Kvadrāts, kas sastāv no 7x7 rūtiņām, sagriezts vairākās daļās. Katra daļa ir vai nu mazāks kvadrāts ar izmēriem 2x2 rūtiņas, vai “stūrītis” (skat. 9.zīm.). Cik var būt “stūrīšu”?



9.zīm.

47.*Pa apļveida šoseju no viena punkta vienlaicīgi izbrauc 4 automašīnas A, B, C, D. Pirmās divas brauc vienā virzienā, otrās divas – otrā. Automašīnu ātrumi ir dažādi, bet nemainīgi. Zināms, ka A un C pirmo reizi sastapās tai pašā brīdī, kad pirmo reizi sastapās B un D. Pierādiet: A un B pirmo reizi apdzina viena otru tai pašā brīdī, kad to pirmo reizi izdarīja C un D.

48.*Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt divas operācijas:

a) reizināt to ar patvaļīgu naturālu reizinātāju,

b) izsvītrot no tā pieraksta nulles.

Vai no 1992 var iegūt viencipara skaitli? Bet no 1993?

49.*Atrodiet a) trīs, b) piecus dažādus naturālus skaitļus tā, lai katru divu skaitļu summa dalītos ar to starpību (pietiek atrast vienu šādu komplektu).

50. Uzzīmējiet kaut vienu sešstūri, kuram ir 5 šauri leņķi.

51. Kvadrāts sastāv no 10x10 rūtiņām. Atzīmējiet tajā 20 rūtiņu centrus tā, lai uz katras taisnes, kas paralēla kvadrāta malai vai diagonālei, būtu ne vairāk kā 2 atzīmētie punkti.

52. Vai var rindā izrakstīt visus nenulles ciparus, katru vienu reizi, tā, lai pirmo divu ciparu summa dalītos ar 2 , pirmo triju – ar 3,…, pirmo deviņu – ar 9?

53.*(Uzdevums no 1795.gadā Anglijā izdotās aritmētikas mācību grāmatas.) Kardināls var izlūgties žēlastību šķīstītavā nokļuvušam grēciniekam 1 stundā, bīskaps – 3 stundās, priesteris – 5 stundās un noviciants – 7 stundās. Cik ilgi visiem kopā jālūdz, lai izlūgtos žēlastību trim grēciniekiem?

54.*Profesors Cipariņš saviem 16 viesiem sagatavojis 16 apaļas kūkas (visu kūku izmēri ir dažādi) un katrai kūkai – šķīvīti ar tādu pašu izmēru kā kūka. Katrs viesis, kas ierodas, paņem sev domāto kūku un kaut kādu šķīvīti, uz kura šo kūku var novietot. Kāds ir pats lielākais viesu skaits, kuriem var rasties grūtības?

55. Ap apaļu galdu sēž 16 bērni. No katriem 3 pēc kārtas sēdošiem vismaz divi ir piedalījušies matemātikas olimpiādē. Kāds ir mazākais iespējamais olimpiādes dalībnieku skaits?

56. Pierādiet, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c pastāv nevienādība

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 .$$

57.*Uzzīmējiet 6 trijstūrus tā, lai tie nepārklātos un lai katram trijstūrim 2 virsotnes atrastos citu trijstūru malu iekšējos punktos.

58.*Jānis iedomājies 6 dažādus veselus skaitļus un aprēķinājis visas iespējamās to summas pa 3. To pašu izdarījis Andris. Vai var gadīties, ka abiem zēniem iznāk vienas un tās pašas summas, bet sākotnējie skaitļi atšķiras?

59.*Aija sadalīja konfektes 10 kaudzītēs. Pēc tam Biruta sadalīja tās pašas konfektes 12 kaudzītēs. Pierādiet, ka Birutas dalīšanas rezultātā vismaz 3 konfektes nonāca mazākās kaudzītēs nekā Aijas dalīšanas rezultātā.

60. Smaragda karaļvalstī starp katrām divām pilsētām pastāv vai nu satiksme ar pūķa ratiem, vai ar lidojošo paklāju. Pierādīt, ka Ella var izvēlēties vienu no šiem satiksmes veidiem tā, ka ar tā palīdzību var nokļūt no katras pilsētas uz katru citu, pa ceļam iegriežoties ne vairāk kā divās citās pilsētās.

61.*Tabula sastāv no a) 3x3 rūtiņām, b) 8x8 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt 0 vai 1 tā, lai katrai nullei blakus atrastos tieši viens vieninieks, bet katram vieniniekam blakus – tieši viena nulle? (Divi skaitļi atrodas blakus, ja tie ierakstīti rūtiņās, kurām ir kopīga mala.)

62. Pirmskaitlim pieskaitot 1, iegūst naturāla skaitļa kvadrātu. Kas tas ir par pirmskaitli?

63. Sešstūrim visas malas ir vienādas un visi leņķi – arī vienādi. Vai to var sagriezt 8 vienādās daļās?

64. Kādā pilsētā dzīvo divu tipu rūķīši: votivapas, kas vienmēr melo, un šillišallas, kas vienmēr runā patiesību. Kādu dienu pie eglītes sapulcējās 10 rūķīši, un katrs izteica apgalvojumus par klātesošajiem.

Pirmais rūķītis: “Te nav neviena šillišallas.”

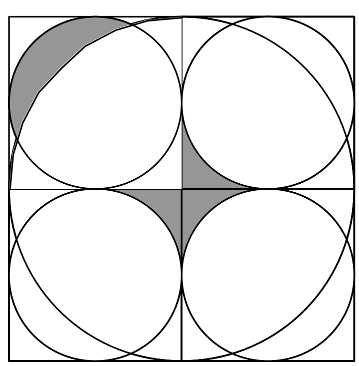
Otrais rūķītis: “Te ir ne vairāk par vienu šillišallu.”

…

Desmitais rūķītis: “Te ir ne vairāk par deviņiem šillišallām.”

Cik šillišallu bija pie eglītes?

65. Kvadrāts sadalīts četros mazākos vienādos kvadrātos. Katrā no 5 kvadrātiem ievilkts riņķis (skat. 10.zīm.). Kurai no iesvītrotajām daļām laukums ir mazāks?



10.zīm.

66. Vai var gadīties, ka no 13 vienādiem trijstūriem var salikt vienu lielu bez caurumiem un bez pārklājumiem?

67.*Starp skaitļa $1\underbrace{99999...9}_{100}3$ cipariem vienā vietā jāievieto “+” zīme, lai iegūtā summa būtu mazākā iespējamā. Kurā vietā šī zīme jāievieto?

68.*Vai taisnība, ka katru izliektu četrstūri var sagriezt 4 daļās, no kurām var salikt paralelogramu?

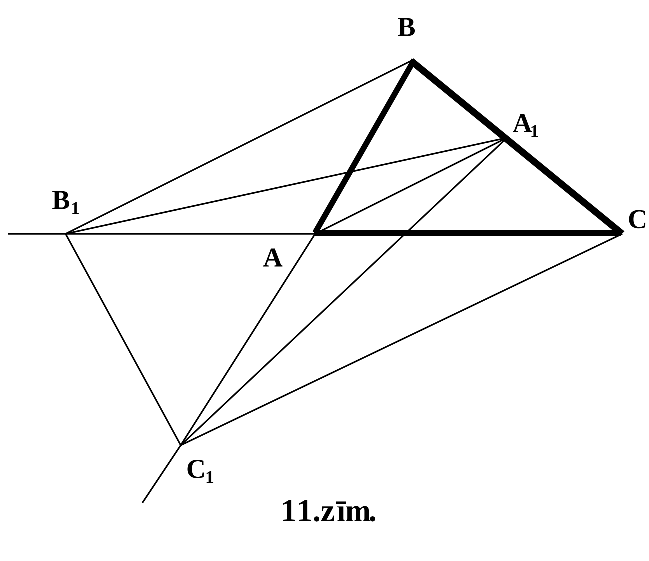
69. Pierādīt, ka skaitlis $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot20\cdot21+22\cdot23\cdot\ldots\cdot41\cdot42$ dalās ar 43.

70.*Uz 10 kartītēm uzrakstīti dažādi pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka ņemot dažas (varbūt vienu) kartītes, var izveidot vismaz 55 kaudzītes ar dažādām uzrakstīto skaitļu summām.

71.*Skaitļošanas mašīna “Sprīdītis” atļauj veikt divu skaitļu saskaitīšanu un atņemšanu, kā arī atrast jebkuram nenulles skaitlim apgriezto. Bez tam mašīnā pēc vajadzības var ievadīt skaitli 1. Kā ar šīs mašīnas palīdzību var veikt reizināšanu un dalīšanu?

72. Dots trijstūris ABC. Uz malas BC un malu AC un AB pagarinājumiem ņemti attiecīgi punkti A_1, B_1 un C_1 tā ka AA_1, BB_1 un CC_1 ir paralēli nogriežņi (skat. 11.zīm.)

Pierādīt, ka trijstūra $A_1 B_1C_1$ laukums ir divas reizes lielāks par trijstūra ABC laukumu.



11.zīm.

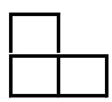
73. Vai vienam sešstūrim četru malu viduspunkti var atrasties uz vienas taisnes?

74. Starp labiem matemātiķiem labi ķīmiķi sastopami biežāk nekā starp visiem cilvēkiem. Vai no tā var secināt, ka starp labiem ķīmiķiem labi matemātiķi sastopami biežāk nekā starp visiem cilvēkiem?

75. Ar cik nullēm beidzas visu veselo skaitļu reizinājums no 1 līdz 99 ieskaitot?

76. Vai kuba virsotnes var tā sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 8, lai katras šķautnes galapunktos ierakstītie skaitļi atšķirtos ne vairāk kā par a) 4, b) 3?

77. Vai kvadrātu, kas sastāv no 1993x1993 rūtiņām, var sagriezt tādos "stūrīšos", kāds parādīts 12.zīm.?



12.zīm.

78.*Četras pēc ārējā izskata vienādas monētas sver attiecīgi 11g, 12g, 13g un 14g. Mūsu rīcībā ir svari ar diviem svaru kausiem un skalu, kuras iedaļas vērtība ir 1g. Kā ar divām svēršanām noskaidrot katras monētas masu?

79. Vai vienam sešstūrim 5 malu viduspunkti var atrasties uz vienas taisnes?

80.*Vienā vasarā 99 rūķi katrs apdzīvoja vienu mājiņu. Nākošajā vasarā viņi mainīja dzīvesvietas, bet joprojām katrs apdzīvoja vienu no tām pašām 99 mājiņām (katrs citu). Pierādīt, ka mājiņas var nokrāsot baltā, zaļā un sarkanā krāsā tā, lai katram rūķim pirmās un otrās vasaras mājiņas nokrāsotu dažādās krāsās!

81. Kāds ir pēdējais nenulles cipars reizinājumā, kuru iegūst, sareizinot visus veselos skaitļus no 1 līdz 99 ieskaitot?

82.*Uz riņķa līnijas atzīmēti 10 punkti. Katram lokam, kuram abi galapunkti ir divi no šiem 10 punktiem, ar sarkanu krāsu atzīmējam viduspunktu. Kāds ir mazākais iespējamais sarkano punktu skaits?

83. Vienādmalu trijstūra ABC iekšpusē atzīmēts punkts O. Pierādīt, ka pastāv trijstūris, kura malas vienādas ar OA, OB un OC.

84.*Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Starp tām ir 0, 1 vai 2 viltotas (nav zināms, cik). Visu īsto monētu masas arī ir vienādas un citādas nekā īstajām. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanu palīdzību noskaidrot, vai viltotās monētas ir vai nav un, ja ir, tad vai tās smagākas vai vieglākas par īstajām?

85. Trijstūra visu malu garumi ir veseli skaitļi, bet tā perimetrs dalās ar katras malas garumu. Pierādīt, ka trijstūris ir vienādmalu.

86. Vai pastāv tāds naturāls skaitlis, kas samazinās 1993 reizes, ja tam nosvītro pirmo ciparu?

87. Trīs skaitļu summa ir 0. Pierādīt, ka to apgriezto lielumu summa nevar būt 0.

88. Vairāku leņķu malas sadala plakni galīgā skaitā apgabalu. Vai šos apgabalus noteikti var izkrāsot trijās krāsās (katru apgabalu citā krāsā) tā, lai apgabali, kam ir kopēja mala, būtu nokrāsoti dažādās krāsās?

89.*Sagrieziet vienādmalu trijstūri ar 6 taisniem griezieniem tādās daļās, no kurām var salikt 7 vienādus vienādmalu trijstūrus (no sākotnējā trijstūra nekas nedrīkst palikt pāri; ne pēc viena no pirmajiem 5 griezieniem iegūtās daļas nedrīkst pārvietot).

90. (Joks.) Kāds varētu būt pamats šādai definīcijai: “Programmētājs – tas ir cilvēks, kas neatšķir 31.oktobri no pirmajiem Ziemassvētkiem”?

91. Četrstūra visu malu garumi ir veseli skaitļi, bet tā perimetrs dalās ar katras malas garumu. Pierādiet, ka vismaz divas četrstūra malas vienādas savā starpā.

92.*Dota riņķa līnija, tās centrs un uz tās atzīmēts 81^0 liels loks. Izmantojot tikai taisnleņķa trijstūri (varam uzskatīt, ka tā malas ir pietiekami garas), konstruēt 27^0 lielu loku.

93.*Divu daļu skaitītāji un saucēji ir naturāli skaitļi. Gan skaitītāju, gan saucēju summa ir 23. Atrast abu daļu summas lielāko vērtību.

94. Riņķa rādiuss ir 1. Tas pārklāts ar 6 vienādām apaļām monētām. Pierādiet, ka monētu diametri nav mazāki par 1.

95. Dots, ka ABCD ir paralelograms. Punkti M un N iegūti no B un D, pabīdot tos vienā virzienā par vienādiem attālumiem. Vai četrstūra AMCN perimetrs var būt mazāks par ABCD perimetru?

96. Kvadrātā 7x7 nokrāsotas 29 rūtiņas. Pierādīt, ka tajā var atrast tādu kvadrātu 2x2, kurā nokrāsotas vismaz 3 rūtiņas.

2.ievaduzdevumi

1. 13.(a) zīm. redzamo figūru, kuras garums ir 3, sauc par "kāsīti". Vai no četriem "kāsīšiem" var salikt 13.(b) zīm. redzamo režģi (katra kvadrātiņa malas garums ir 1)?

(a) **(b)**

13.zīm

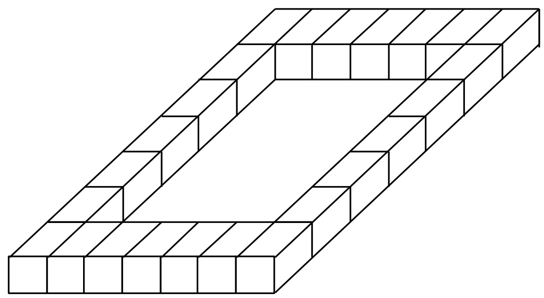
2. Ja n ir naturāls skaitlis, vai skaitļi n, n+1, n+2 var būt pirmskaitļi.

3. Rindā uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 100. Cik reižu uzrakstīts cipars 5:

a) vienu šķirā;

b) desmitu šķirā?

4. Ķermenis (skat. 14.zīm.) sastāv no kubiņiem 1x1x1. Aprēķināt šī ķermeņa virsmas laukumu.



14.zīm.

5. Ja divu naturālu skaitļu reizinājums ir lielāks nekā 10000, tad katrs no skaitļiem ir lielāks nekā 100. Vai tas ir pareizi?

6. Cik un kādas daļas var iegūt no cipariem 1, 2, 3, 4?

8. Ar kādām naturālām n vērtībām skaitlis n^3+2n ir pirmskaitlis? Cik ir šī pirmskaitļa vērtība?

9. Rindā uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 100. Cik un kuri cipari parādījušies vienādu reižu skaitu?

10. Kuba šķautnes garums ir 2. Cik vienādos kubos ar šķautnes garumu 1 var sadalīt šo kubu? Par cik kubiem palielinājies kubu skaits?

11. a) Cik tādu desmitciparu naturālu skaitļu var uzrakstīt, kuriem visi cipari ir dažādi un sakārtoti dilstošā secībā;

b) cik deviņciparu naturālu skaitļu ar šādu īpašību var uzrakstīt?

12. Vai taisnstūri var sadalīt: a) 3; b) 4; vienādsānu trijstūros?

13. Uzrakstīt katras iesāktās skaitļu virknes pirmos 10 locekļus:

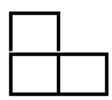
a) 1, 3, 5, 7,…;

b) 1, 4, 7, 10,…;

c) 1, 2, 3, 5,…;

d) 1, 1, 2, 3, 5,… .

14. Vai var sagriezt stūrīšos (skat. 15.zīm.)



15.zīm.

a) 3x3 rūtiņu kvadrātu;

b) 3x4 rūtiņu taisnstūri?

15. Apskatām visus divciparu naturālos skaitļus. Cik ir visu nepāra skaitļu visu ciparu summa un cik visu pāra skaitļu visu ciparu summa? Kura no tām lielāka? Par cik?

17. a) Diviem skaitļiem sakrīt pēdējie trīs cipari. Vai šo skaitļu starpība dalās ar 8 un 125?

b) Kuriem viencipara skaitļiem piemīt īpašība: pareizinot to pašu ar sevi, iegūtā reizinājuma pēdējais cipars ir sākotnējais skaitlis? Aprēķināt iegūtā un sākotnējā skaitļa starpību.

Kuriem divciparu skaitļiem piemīt šāda īpašība?

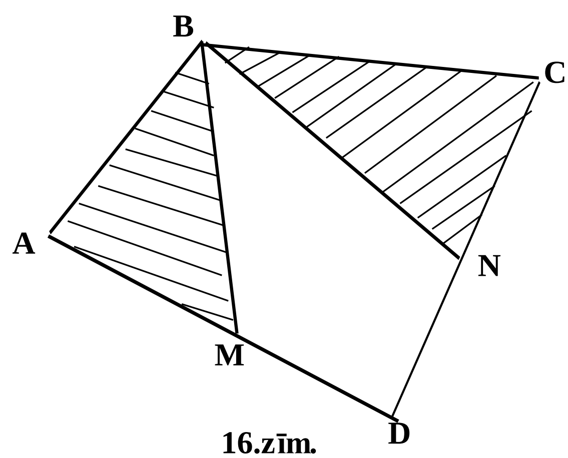
18. Jānis, Juris, Andris un Aldis sabojāja durvju slēdzeni. Uz jautājumu: ”Kurš sabojāja?” Andris paziņoja, ka to izdarījis Jānis. Jānis apgalvoja, ka vainīgais ir Aldis. Aldis teica, ka Jānis melojot. Juris teica, ka viņš neesot vainīgs. Tālākajā iztaujāšanā noskaidrojās, ka tikai viens no zēniem teicis patiesību. Kurš sabojāja slēdzeni?

19. Atrast vismazāko skaitļa 99 daudzkārtni, kas lielāks par 99 un kura pierakstā sastopami tikai nepāra cipari.

20. Viens rūķis dāvanu maisu sapako 12 minūtēs, bet otrs – 4 minūtēs. Cik ilgā laikā dāvanu maisu sapako abi rūķi, strādājot kopā?

21. Klasē ir 25 skolēni. Pierādīt, ka diviem skolēniem šai klasē ir vienāds draugu skaits (uzskata, ka ja A ir B draugs, tad arī B ir A draugs).

22. Četrstūrī ABCD punkti M un N ir malu AD un CD viduspunkti (skat. 16.zīm.).



16.zīm.

Pierādīt, ka iesvītroto laukumu summa ir vienāda ar neiesvītroto laukumu.

23. Izteikt x^7 ar diviem, trijiem,…, sešiem, septiņiem reizinātājiem.

24. Cik rongo var izvietot a) 2x2; b) 3x3; c) 4x4 rūtiņu kvadrātā?

25. Cik reižu diennaktī pulksteņa minūšu un stundu rādītāji ir perpendikulāri?

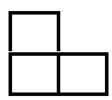
26. Doti divi naturāli skaitļi a un b. Katrs no tiem dalās ar 3. Pierādīt, ka arī to summa un starpība dalās ar 3.

27. **I**. Sagriezt trijstūri 3 daļās tā, lai no tām varētu salikt taisnstūri.

II. Vienādsānu taisnleņķa trijstūrī no šaurā leņķa virsotnes novilkta mediāna, kas sadala šo trijstūri divos trijstūros. Vai no šiem iegūtajiem trijstūriem var salikt platleņķa trijstūri?

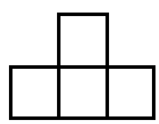
28. Vai taisnstūri ar izmēriem 3x6 rūtiņas var pārklāt ar:

a) 17.zīm. redzamajām figūriņām;



17.zīm.

b) 18.zīm. redzamajām figūriņām.



18.zīm.

29. 7 saldējumi ir dārgāki nekā 8 šokolādes. Kas maksā vairāk 8 saldējumi vai 9 šokolādes?

30. Turnīrā piedalās 3 komandas. Katra ar katru spēlē vienu reizi. Par uzvaru komanda saņem 1 punktu, par zaudējumu - 0 punktus. Neizšķirtu rezultātu nav. Kādi var būt turnīra rezultāti?

31. Atrast visus: a) divciparu skaitļus, kas vienādi ar savas ciparu summas otro pakāpi;

b) trīsciparu skaitļus, kas vienādi ar savas ciparu summas trešo pakāpi.

32. **I**. Atrast 3 tādus pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, kuriem 2 skaitļu kvadrātu summa ir vienāda ar trešā skaitļa kvadrātu.

II. Vai 5 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu kvadrātu summa var būt kāda naturāla skaitļa kvadrāts?

33. Kādos daudzstūros ar vienu taisnu griezienu var sadalīt:

a) trijstūri;

b) četrstūri?

34. Atrisināt vienādojumus: a) $x-20=0$; b) $2x-20=0$; c) $2x-20=x$.

35. Uzzīmē iespējami daudz tādu figūru, kas sastāv no 6 vienādiem kvadrātiņiem, lai, tās salokot, varētu izveidot kubiņus!

36. Turnīrā piedalās 3 komandas. Katra ar katru spēlē vienu reizi. Par uzvaru komanda saņem 1 punktu, par zaudējumu - 0 punktus. Neizšķirtu rezultātu nav. Turnīru beidzot, visām komandām bija dažāds punktu skaits. Vai noteikti būs komanda, kas zaudējusi abām pārējām?

37. **I**. Vai skaitlis 2^3+7 dalās ar 5?

II. Vai skaitlis 138792^3+7 dalās ar 5?

III. Vai skaitlis $91\cdot2^3+182\cdot2^2+1022\cdot2$ dalās ar 7?

IV. Dots, ka, a, b, c, d – naturāli skaitļi. Vai skaitlis $(7a+1)(7b+1)(7c+1)(7d+1)-1$ noteikti dalās ar 7?

38. Nepareizā vienādībā pārlikt ciparu citā vietā, lai iegūtu pareizu vienādību:

a) 252-4=1;

b) 52-24=1.

39 Cik punktos var krustoties:

a) 2 taisnes;

b) 3 taisnes;

c) 4 taisnes?

40. Uzrakstīt visus divciparu skaitļus, kas

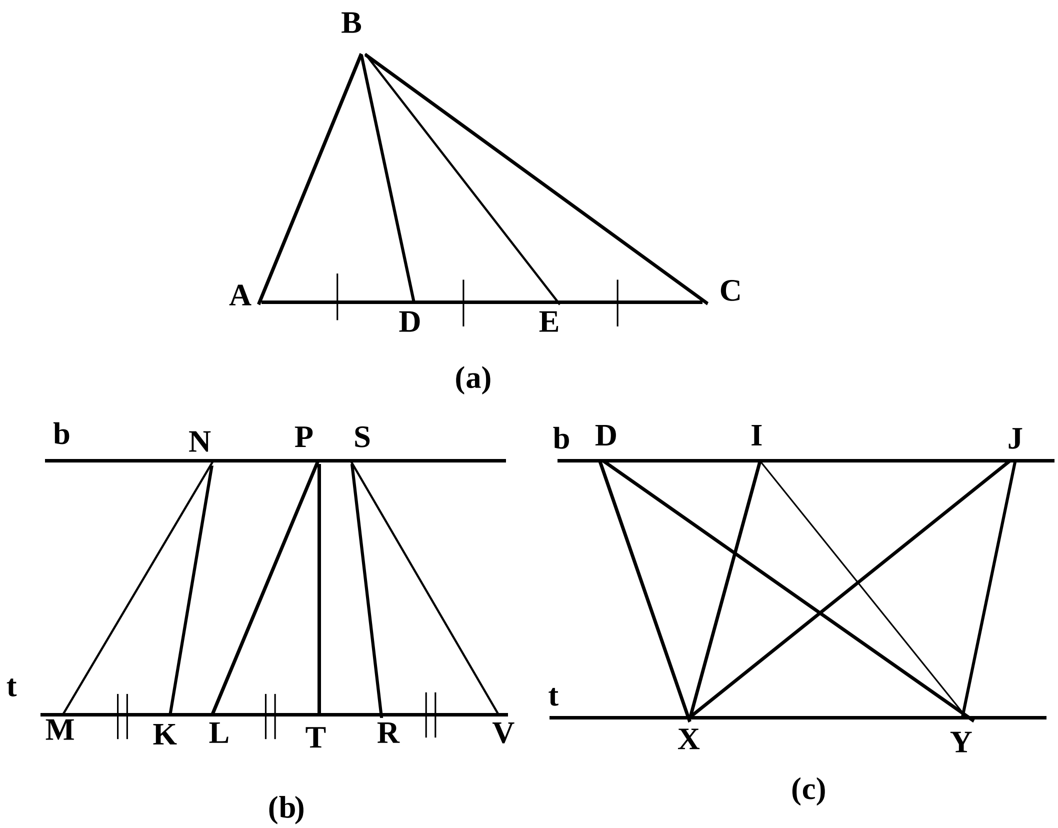
a) nezaudē jēgu, ja papīra lapu, uz kuras tie uzrakstīti, apgriež “ar kājām gaisā”;

b) nemainās, ja papīra lapu, uz kuras tie uzrakstīti, apgriež “ar kājām gaisā”.

41. Vai trijstūru a) ABD, DBE,EBC (skat. 19.(a) zīm.);

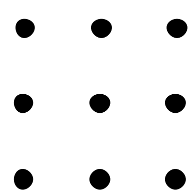
b) MNK, LPT, RSV (skat. 19.(b) zīm.);

c) XDY, XIY, XJY (skat. 19.(c) zīm.) laukumi ir vienādi?



19.zīm.

42. Uzzīmēt lauztu līniju ar iespējami mazāku posmu skaitu, kas krusto visus atzīmētos punktus (skat. 20.zīm.).



20.zīm.

45. Vienkāršot izteiksmes:

a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

46. Skat. 14. ievaduzdevumu.

47. Gar tramvaja līniju ar nemainīgu ātrumu iet gājējs. Ik pēc 5 min viņš sastop pretimbraucošu tramvaju, un ik pēc 7 min kāds tramvajs viņu apdzen. Cik liels ir intervāls starp tramvaju atiešanas laikiem no galapunkta?

49. Kāds vismazākais naturālo skaitļu daudzums jāizvēlas, lai no šiem skaitļiem divi būtu tādi, ka to starpība dalītos ar 5?

50. Vai eksistē izliekts sešstūris, kuram ir 5 šauri leņķi?

51. Cik punktu var izvietot rūtiņu centros a) 3x3; b) 4x4; c) 6x6 rūtiņu kvadrātā tā, lai uz katras taisnes, kas paralēla kvadrāta malai vai diagonālei, būtu ne vairāk kā 2 atzīmētie punkti?

52. Vai var uzrakstīt rindā naturālos skaitļus no 1 līdz 6, katru vienu reizi, tā, lai no katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem

a) viens dalītos ar otru;

b) bet vai tā var uzrakstīt skaitļus no 1 līdz 7?

53. Plkst 12.00 gliemezis sāk rāpties stabā, kura augstums ir 3 m. Gliemezis rāpjas ar nemainīgu ātrumu 10 cm/min; vispirms viņš 3 min rāpjas uz augšu, pēc tam 2 min uz leju, utt. Cikos gliemezis sasniedz staba augšējo galu?

54. Brokastīs izceptas 3 dažāda izmēra pankūkas: Našķim – mazākā, Izēdājam – lielākā, Brālītim – vidējā. Katrai pankūkai ir sagatavots atbilstoša izmēra šķīvītis. Kuram bērnam var rasties grūtības brokastojot?

55. Ap apaļu galdu sēž 6 bērni. No katriem 3 pēc kārtas sēdošiem vismaz divi prot braukt ar skrituļslidām. Kāds ir mazākais iespējamais bērnu skaits, kuri prot braukt ar skrituļslidām?

56. Kā izmainās daļas $\frac{a}{b}$ vērtība ja tās saucējam pieskaita skaitli c (a, b, c – pozitīvi skaitļi)?

57. Uzzīmēt divus trijstūrus tā, lai to kopīgā daļa būtu sešstūris.

58. Vai var izvēlēties 4 skaitļus (starp tiem var būt arī vienādi) tā, ka katri divi no tiem ir vai nu savstarpēji pretēji, vai savstarpēji apgriezti, pie tam sastopami abu veidu skaitļu pāri.

60. Kāds mazākais taciņu skaits jāierīko Pasaku mežā, lai 7 rūķīši, varētu viens otru apciemot, ejot pa ne vairāk kā divām taciņām, (zināms, ka taciņa savieno kādas divas rūķīšu mājiņas). Ārpus mājiņām taciņas nekrustojas.

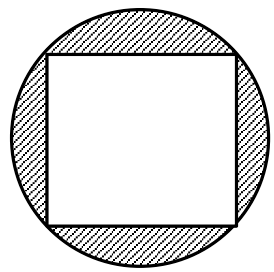
61. Cik rūtiņu (pēc iespējas vairāk) var iekrāsot a) 3x3; b) 4x4 rūtiņu kvadrātā tā, lai katrai iekrāsotai rūtiņai blakus atrastos neiekrāsota rūtiņa (divas rūtiņas atrodas blakus, ja tām ir kopīga mala)?

62. Skat. 8. ievaduzdevumu.

63. Vienādsānu trapecē sānu mala vienāda ar īsāko pamatu un veido ar to 120^0 lielu leņķi. Vai to var sagriezt 4 vienādās trapecēs, kas līdzīgas dotajai?

64. Sprīdītis Pasaku mežā sastop 3 rūķīšus. Vienīgais, ko viņš par tiem zina – vai nu divi no tiem vienmēr runā patiesību un viens melo, vai arī divi no tiem vienmēr melo un viens runā patiesību. Kā, uzdodot vienu jautājumu vienam rūķītim, Sprīdītis var uzzināt, vai vairāk ir melīgo vai patieso rūķīšu?

65. Riņķī ar rādiusu R ievilkts kvadrāts. Aprēķināt iesvītrotās daļas laukumu (skat. 21.zīm.).



21.zīm.

66. Vai eksistē trijstūris, ko var sagriezt 13 vienādos trijstūros?

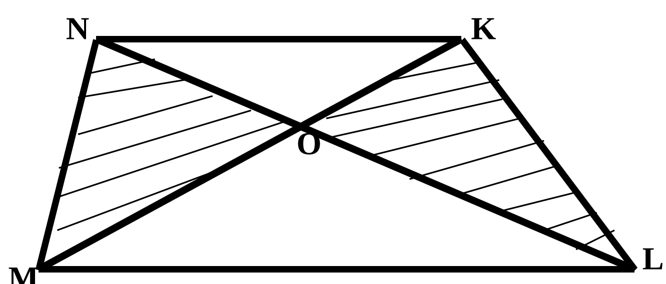
67. Kādu lielāko skaitli, kurš dalās ar 9, var iegūt, no skaitļa 421421421 izsvītrojot dažus ciparus?

69. a) Vai skaitlis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19$ dalās ar 13?

b) Vai skaitlis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5+(13-5)(13-4)(13-3)(13-2)(13-1)$ dalās ar 13?

70. Pierādīt, ka no 100 pirmajiem naturāliem skaitļiem, tos neatkārtojot, var izvēlēties 70 skaitļus tā, lai šo skaitļu summa būtu vienāda ar atlikušo 30 skaitļu summu.

72. Dota trapece MNKL (skat. 22.zīm.), O – diagonāļu krustpunkts. Pierādīt, ka $S_{\Delta MNO}=S_{\Delta OKL}$.



22.zīm.

73. Uzzīmēt sešstūri, kura trīs virsotnes atrodas uz vienas taisnes.

74. Lācīša Pūka dzimšanas dienas svinībās piedalījās 10 viņa draugi. 5 no tiem mielojās ar torti, 5 – ar šokolādi, bet 6 – ar saldējumu. Viens viesis nogaršoja visus trīs kārumus, viens viesis – torti un saldējumu, bet divi – saldējumu un šokolādi. Cik viesu nogaršoja gan torti, gan šokolādi?

75. Ar cik nullēm beidzas visu naturālo skaitļu reizinājums:

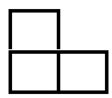
a) no 1 līdz 9 ieskaitot;

b) no 1 līdz 19 ieskaitot;

c) no 1 līdz 29 ieskaitot?

76. Vai var sanumurēt kuba šķautnes ar skaitļiem 1, 2,…, 12 tā, lai skaitļu summa uz katrām trim šķautnēm, kas iziet no vienas virsotnes, būtu viena un tā pati?

77. Kāds ir mazākais kvadrāts, kuru var sagriezt "stūrīšos" (skat. 23.zīm.)?



23.zīm.

78. Starp 9 monētām viena ir viltota, tā atšķiras no pārējām vienīgi ar vieglāku svaru. Kā ar sviras svaru palīdzību atrast viltoto monētu, ja svērt drīkst divas reizes?

79. Vai sešstūra a) četras virsotnes, b) piecas virsotnes var atrasties uz vienas taisnes?

81. Kādi ir pēdējie divi cipari reizinājumā, kuru iegūst, sareizinot naturālos skaitļus no 1 līdz 9 ieskaitot?

82. Uz riņķa līnijas atzīmēti vairāki punkti. Katram lokam, kuram abi galapunkti ir 2 no šiem punktiem, ar zvaigznīti atzīmējam viduspunktu. Kāds ir mazākais iespējamais zvaigznīšu skaits, ja uz riņķa līnijas atzīmēti

a) 3 punkti;

b) 5 punkti?

83. Trijstūra ABC iekšpusē atzīmēts punkts O. Vai noteikti pastāv trijstūris, kura malas vienādas ar OA, OB un OC?

84. Skat. 78. ievaduzdevumu.

86. Četrciparu skaitļa ciparu summa ir 18, bet pirmais cipars ir 3. Pirmo ciparu nosvītrojot ieguva 9 reizes mazāku skaitli. Uzrakstīt sākotnējo un iegūto skaitli.

87. Vai eksistē tāds skaitlis, kura apgrieztais lielums ir 0?

88. Cik apgabalos var sadalīt plakni 2 leņķu malas?

89. Trapeces garākā sānu mala vienāda ar tās pamatu summu, bet šaurais leņķis 60^0. Sagriezt trapeci divās daļās tā, lai no tām varētu salikt vienādmalu trijstūri.

91. Uz 5 kartītēm uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi). Uz katrām trim kartītēm uzrakstīto skaitļu summa dalās ar to skaitļu summu, kas uzrakstīti uz abām pārējām kartītēm:

a) atrodiet kaut vienu piemēru, kur šis nosacījums izpildās;

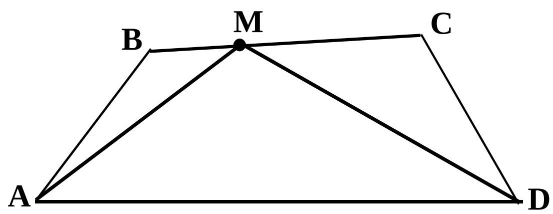
b) vai tas var izpildīties, ja uz visām kartītēm uzrakstīti dažādi skaitļi?

93. **I**. Uzrakstīt daļu, kas lielāka nekā $\frac{1}{4}$, bet mazāka nekā $\frac{1}{3}$.

II. Kā mainās daļas lielums, ja pie daļas skaitītāja pieskaita tās saucēju?

94. Kvadrātā ar malas garumu 4 m atrodas 15 punkti. Pierādīt, ka starp tiem var atrast divus tādus punktus M un N, ka $MN \leq 2$ m.

95. Pierādīt, ka $P_{ABCD} > P_{AMD}$ (skat. 24.zīm.).



24.zīm.

96. Kvadrātā 4x4 nokrāsotas 9 rūtiņas. Pierādīt, ka tajā var atrast tādu kvadrātu 2x2, kurā nokrāsotas vismaz 3 rūtiņas.