„Profesora Cipariņa kluba” 1993./94.m.g.
uzdevumu atrisinājumi

1.nodarbība

1.

Atbilde Pie Aijas viesojās 7 meitenes.

Risinājums Tā kā katram zēnam abās pusēs stāvēja meitenes, bet katrai meitenei abās pusēs stāvēja zēni, tad zēni un meitenes pa apli stāv pamīšus. Tā kā aplī ir 8 zēni, tad tur ir arī 8 meitenes (katrā atstarpē starp 2 zēniem pa vienai). Tā kā pati Aija arī stāv aplī, tad pie Aijas ciemos atnākušas 7 meitenes.

2.

Atbilde To izdarīt nav iespējams.

Risinājums Visu mūsu rīcībā esošo atsvaru masas ir pāra skaitļi. Pēc tam, kad pirmo reizi uz kausiem tiek novietoti atsvari, smagākais kauss "pārsver" vieglāko par lielumu $(s_1+s_2+...+s_k)$- $(v_1+v_2+...+v_m)$, kur $s_1+s_2+...+s_k$ - uz smagākā kausa novietoto atsvaru masas, bet $v_1+v_2+...+v_m$- uz vieglākā kausa novietoto atsvaru masas. Visu atsvaru masas izsakās ar pāra skaitu gramu. Izdarot saskaitīšanas un atņemšanas darbības tikai ar pāra skaitļiem, rezultāts vienmēr ir pāra skaitlis. Tātad pirmajā svēršanā mēs varam nosvērt miltu kaudzīti, kura sver pāra skaitu gramu. Šo kaudzīti līdz ar atsvariem varam izmantot otrajā svēršanā; pēc tam abas jau iegūtās kaudzītes līdz ar atsvariem varam izmantot trešajā svēršanā, utt. Tomēr, spriežot līdzīgi kā iepriekš, mēs katrā jaunā svēršanā varam izmantot tikai jau zināmus smagumus, kuru masas ir pāra skaits gramu, un tātad atkal iegūt tikai tādu jaunu miltu kaudzīti, kuras masa ir pāra skaits gramu. Apvienojot šādas kaudzītes, mēs iegūsim tādu miltu daudzumu, kura masa gramos ir pāra skaitlis. Bet mums jānosver 255 grami.

3.

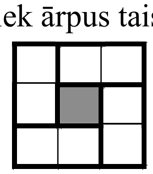
Atbilde Mazākā iespējamā summas vērtība ir 4.

Risinājums Piemēru, kur šī summa ir 4, sk. 63.zīm.

0	1	0
1	0	1
0	1	0

63.zīm.

Pamatosim, kāpēc summa nevar būt mazāka par 4. Sadalīsim kvadrātu taisnstūros tā, kā parādīts 64.zīm. (viena rūtiņa paliek ārpus taisnstūriem).



64.zīm.

Visa kvadrāta skaitļu summa veidojas no šo četru taisnstūru skaitļu un skaitļa, kas ierakstīts pelēkajā rūtiņā, summas. Katrā no 4 taisnstūriem ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 1. Tas izriet no dotā. (Tātad 1 ir mazākā šī rūtiņu pāra skaitļu summa). Arī pelēkajā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir nenegatīvs. Tātad visu ierakstīto skaitļu summa nevar būt mazāka par 4.

4.

Atbilde tā nevar būt.

Risinājums Pieņemsim, ka starp skaitļiem ab, ac, cd, de, bf un ef ir tieši trīs negatīvi skaitļi. Triju pozitīvu un triju negatīvu skaitļu reizinājums ir negatīvs; tāpēc

$$(ab)\cdot(ac)\cdot(cd)\cdot(de)\cdot(bf)\cdot(ef)<0.$$

Taču šis reizinājums nevar būt negatīvs, jo katru savu reizinātāju tas satur tieši 2 reizes:

$$(ab)\cdot(ac)\cdot(cd)\cdot(de)\cdot(bf)\cdot(ef)=a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot d^2\cdot e^2\cdot f^2.$$

Tā kā starp dotajiem skaitļiem nav 0, tad šis reizinājums noteikti ir pozitīvs. Iegūta pretruna. Tātad mūsu pieņēmums, ka starp dotajiem sešiem reizinājumiem ir tieši trīs negatīvi, ir bijis aplams.

5.

Atbilde Pirmais skaitlis ir lielāks par otro.

Risinājums Aplūkosim visus 80 pirmā skaitļa reizinātājus. Sadalīsim tos grupās pa 8, saliekot iekavas:

$$(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot...\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2).$$

Tā kā katrās iekavās ir 8 reizinātāji, tad pavisam ir 10 iekavas. Iegūto izteiksmi varam pārrakstīt arī šādi:

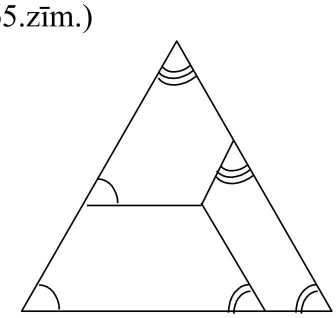
$(*)\ \underbrace{256\cdot256\cdot\ldots\cdot256}_{10\text{ reizinātāji}}$, jo katras iekavas vērtība ir 256. Analogi rīkosimies arī ar otro skaitli. Sadalīsim trijniekus 10 iekavās, katrās pa 5 trijniekiem:

$$(**)\ \underbrace{(3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot\ldots\cdot(3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3)}_{10\text{ iekavas}}=\underbrace{243\cdot243\cdot\ldots\cdot243}_{10\text{ reizinātāji}}$$

Tagad reizinājumos $(*)$ un $(**)$ ir pa 10 reizinātājiem. Visi reizinātāji ir pozitīvi un katrs pirmā skaitļa reizinātājs ir lielāks par katru otrā skaitļa reizinātāju. Tātad pirmais skaitlis ir lielāks par otro.

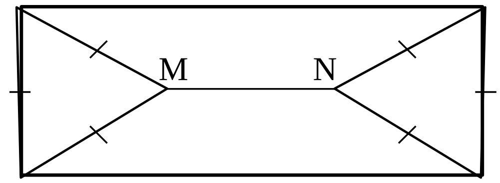
6.

Risinājums Vispirms parādīsim, kā **vienādmalu** trijstūri var sagriezt vienādsānu trapecēs, izvēloties trijstūra iekšpusē patvaļīgu punktu un novelkot no tā nogriežņus paralēli trijstūra malām (sk. 65.zīm.)



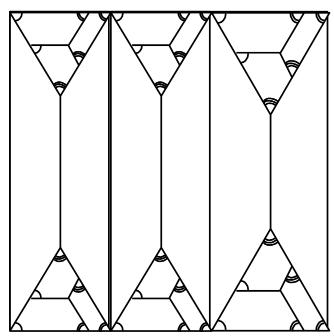
65.zīm.

Tagad ievērosim, ka "garu un šauru" taisnstūri var sadalīt vienādmalu trijstūros (tos mēs jau protam sadalīt trapecēs) un vienādsānu trapecēs (sk. 66.zīm.).



66.zīm.

Risinājumā ir svarīgi, ka taisnstūris ir pietiekami izstiepts, lai abi vienādmalu trijstūri savstarpēji nepārklātos. Ja gadījumā, šādi zīmējot, abi trijstūri pārklājas, tad sākotnējais taisnstūris jāpārdala uz pusēm - divos taisnstūros - un jāveic konstrukcija katrā taisnstūrī atsevišķi. Lai pierādījums būtu pilnīgs, jāpamato, kāpēc punkti M un N atrodas vienādos attālumos no taisnstūra horizontālajām malām; izdariet to patstāvīgi. Skaidrs, ka jebkuru kvadrātu var sadalīt taisnstūros, kurus, savukārt, var sadalīt kā parādīts iepriekš (sk. 67.zīm.)



67.zīm.

7.

<u>Risinājums</u> Aplūkosim doto naturālo skaitļu a, b, c un d dalīšanos ar 3. Dalot naturālu skaitli ar 3, iespējami 3 dažādi atlikumi - 0; 1 un 2. Tā kā doti 4 skaitļi, tad vismaz diviem no tiem atlikumi, dalot ar 3, ir vienādi (ja visu doto skaitļu atlikumi, dalot ar 3, būtu atšķirīgi, doto skaitļu nebūtu vairāk par 3). Ja divi skaitļi x un z dod vienādus atlikumus, dalot ar kādu skaitli y, tad skaitļu x un z starpība dalās ar y bez atlikuma. (Tiešām, ja x, dalot ar y, dod atlikumu r un z, dalot ar y, arī dod atlikumu r, tad $x=k\cdot y+r$ un $z=m\cdot y+r$.

Tad $x-z=(ky+r)-(my+r) = ky+rmy-r = ky-my=y(k-m)$; Tātad x-z dalās ar y.) Tā kā uzdevumā dotais reizinājums satur visas iespējamās skaitļu a, b, c, d starpības pa divi, tad viena no tām dalīsies ar 3.

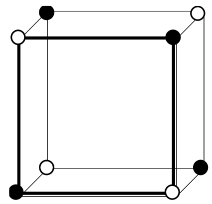
Aplūkosim doto naturālo skaitļu a, b, c, d dalīšanos ar 4. Iespējami atlikumi, dalot ar 4, ir 0, 1, 2 un 3. Ja starp dotajiem skaitļiem ir divi tādi, kas, dalot ar 4, dod vienādus atlikumus, tad šo skaitļu starpība dalās ar 4.

Apskatīsim tagad gadījumu, kad visu doto skaitļu atlikumi, dalot ar 4, ir dažādi. Tā kā reizinājums satur visas iespējamās šo skaitļu starpības pa divi, tad starp tām ir divas, kas dalās ar 2 - starpība, kuras elementi, dalot ar 4, dod atlikumus 0 un 2, un starpība, kuras elementi, dalot ar 4, dod atlikumus 1 un 3. Ja divas no iekavām dalās ar 2, tad viss reizinājums dalās ar 4. Tātad reizinājums dalās gan ar 3, gan ar 4. Tā kā skaitļu 3 un 4 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad reizinājums dalās ar 3x4=12.

8.

Atbilde Tas nav iespējams.

Risinājums Izkrāsosim kuba virsotnes baltā un melnā krāsā tā, kā parādīts 68.zīm.



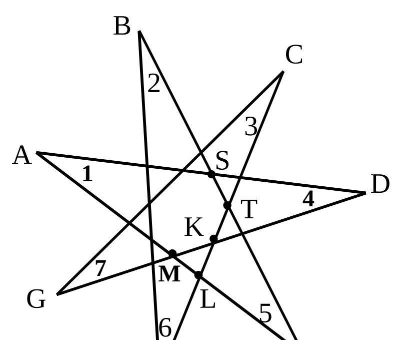
68.zīm.

Skudra, pārvietojoties pa kuba šķautnēm, nokļūs no melnas virsotnes baltā un no baltas virsotnes melnā. Tādā gadījumā viņas maršrutu mēs varam pierakstīt: -M-B-M-B-...-M-B-... Ir skaidrs, ka skudras maršrutā balto un melno virsotņu skaits ir vai nu vienāds (ja ceļu sāk vienas krāsas virsotnē, bet beidz otras krāsas virsotnē), vai arī atšķiras par 1 (ja ceļu sāk un beidz vienas un tās pašas krāsas virsotnēs). Ja skudras ceļojuma laikā 7 virsotnēs tā būtu bijusi tieši 4 reizes, bet vienā vismaz 6 reizes, tad, tā kā ir tieši 4 katras krāsas virsotnes, mēs varam apgalvot, ka vienas krāsas visās virsotnēs ir bijusi tieši pa 4 reizēm, bet otras krāsas 3 virsotnēs pa 4 reizēm un vienā virsotnē vismaz 6 reizes. Tādā gadījumā skudras maršruta virknītē viena krāsa parādītos 4x4=16 reizes, bet otra vismaz 3x4+6=18 reizes. Tas ir pretrunā ar to, ka dažādu krāsu virsotņu skaits virknītē atšķiras ne vairāk kā par 1.

9.

Atbilde 180^{o}.

1. risinājums



69.zīm.

Risinājumā izmantosim faktu, ka trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi.

(1) Apskatām Δ AMD: $\angle 1+\angle 4=\angle KML$

(2) Apskatām Δ GKC: $\angle 7+\angle 3=\angle MKL$

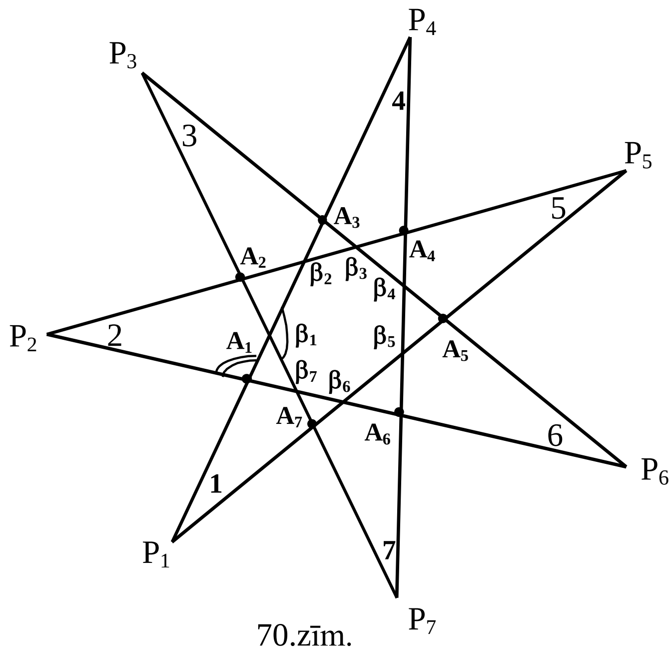
(3) Apskatām Δ BTF: $\angle 2+\angle 6=\angle LTE$

(4) Apskatām Δ TLE: $\angle 5+\angle LTE=\angle MLT$

No (1) - (4) iegūstam:

$$\angle 5+(\angle 2+\angle 6)+(\angle 1+\angle 4)+(\angle 7+\angle 3) =$$
$$=\angle 5+\angle LTE+\angle KML+\angle MKL=$$
$$=\angle MLT+\angle KML+\angle MKL=180^o.$$

<u>2. risinājums</u>



70.zīm.

Ar A_i apzīmēsim leņķi "zvaigznes iedobumā", bet ar B_i - iekšējo septiņstūra leņķi, i=1; 2; ...; 7 (sk. 70.zīm.).

Aplūkosim četrstūri $P_1A_7B_7A_1$. Tā iekšējo leņķu summa ir 360°: $\angle 1+\angle A_7+\angle B_7+\angle A_1=360^o$. Analogi spriežam par četrstūriem $P_2A_1B_1A_2$, $P_3A_2B_2A_3$, $P_4A_3B_3A_4$, $P_5A_4B_4A_5$, $P_6A_5B_5A_6$, $P_7A_6B_6A_7$ un iegūstam:

$$\angle 1+\angle A_7+\angle B_7+\angle A_1=360^o$$
$$\angle 2+\angle A_1+\angle B_1+\angle A_2=360^o$$
$$\angle 3+\angle A_2+\angle B_2+\angle A_3=360^o$$
$$\angle 4+\angle A_3+\angle B_3+\angle A_4=360^o$$
$$\angle 5+\angle A_4+\angle B_4+\angle A_5=360^o$$
$$\angle 6+\angle A_5+\angle B_5+\angle A_6=360^o$$
$$\angle 7+\angle A_6+\angle B_6+\angle A_7=360^o$$

Saskaitīsim šīs vienādības, apzīmējot $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7=S$, iegūstam :

$$S+2(\angle A_1+\angle A_2+...+\angle A_7)+(\angle B_1+\angle B_2+...+\angle B_7)=7\cdot 360^o \ (*)$$

Ievērosim, ka $\angle B_1+\angle B_2+...+\angle B_7=180^o\cdot(7-2)=900^o$ kā izliekta septiņstūra iekšējo leņķu summa.

Aplūkosim $\Delta A_1B_1B_7$. Izmantosim 1. risinājumā minēto teorēmu par ārējā leņķa lielumu. Tad iegūsim:

$$\angle A_1=(180^o-\angle B_1)+(180^o-\angle B_7)=360^o-\angle B_1-\angle B_7$$

Līdzīgi iegūstam: $\angle A_2=360^o-\angle B_1-\angle B_2$

$$\angle A_3=360^o-\angle B_2-\angle B_3$$
$$\angle A_4=360^o-\angle B_3-\angle B_4$$
$$\angle A_5=360^o-\angle B_4-\angle B_5$$
$$\angle A_6=360^o-\angle B_5-\angle B_6$$
$$\angle A_7=360^o-\angle B_6-\angle B_7$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam:

$$\angle A_1+\angle A_2+...+\angle A_7 = 7\cdot 360^o - 2\cdot(\angle B_1+\angle B_2+...+\angle B_7) =$$
$$= 2520^o-2\cdot 900^o = 720^o.$$

Ievietojot iegūtos rezultātus vienādībā ($*$), iegūstam:

$$S=2520^o-900^o-1440^o=180^o.$$

10.

<u>Atbilde</u> Andrim var būt vai nu 12, vai 13 draugi.

<u>Risinājums</u>

<u>Vienošanās</u>. Risinājumā kā divas atsevišķas draudzības tiks uzskaitītas X draudzēšanās ar Y un Y draudzēšanās ar x (ja X un Y ir draugi)

Andra klasē mācās 26 skolēni (25 klasesbiedri un pats Andris). Aplūkosim 2 gadījumus: Andrim ir <u>klasesbiedrs bez draugiem</u>, vai arī <u>katram ir vismaz 1 draugs</u>.

1) Ja Andrim ir klasesbiedrs bez draugiem, tad lielākais draugu skaits, kāds var būt kādam šīs klases skolēnam, ir 24 (ja kādam būtu 25 draugi, tad viņš draudzētos ar visiem pārējiem šīs klases skolēniem un nebūtu tāda skolēna, kuram nav neviena drauga). Tātad Andra klasesbiedriem ir pa 0; 1; 2; ...; 24 draugiem. Apvienosim grupā A tos skolēnus, kuriem ir 0; 1; 2; ...; 12 draugi, bet pārējos grupā B, Andri neieskaitot nevienā no grupām. Grupas B skolēniem kopā ir 13+14+15+...+24=222 draudzības. Grupas A skolēniem kopā ir 0+1+2+...+12=78 draudzības. Tātad grupas B skolēniem ir vismaz 222-78=144 draudzības ārpus grupas A, un tikai 144 draudzības ārpus A tai iespējamas. Tikai tad, ja visas A draudzības ir grupā B. No šīm 144 draudzībām pašas grupas B ietvaros nevar būt vairāk kā 12x11=132 draudzības. Tātad grupas B skolēniem vēl atliek vismaz 144-132=12 draudzības ārpus grupām A un B. Tātad visas šīs draudzības ir ar Andri. Tātad Andrim jābūt draugos ar visiem 12 grupas B skolēniem. Ja arī kāds no A grupas draudzētos ar Andri, tad grupai A būtu mazāk draudzību grupā B, un tad grupai B vajadzētu vairāk draudzību ārpus A, kas nav iespējams. Tāpēc neviens no A grupas nedraudzējas ar Andri. Līdz ar to Andrim ir tieši 12 draugi. Uzkonstruēsim piemēru, kurā parādīsim, ka tāda situācija tiešām ir iespējama. Apzīmēsim visus pirmās grupas bērnus ar A0, A1, A2, …, A12, bet otrās - ar B1, B2, …, B12.

A0 nedraudzējas ne ar vienu,
A1 draudzējas ar B1,
A2 draudzējas ar B1, B2
A3 draudzējas ar B1, B2, B3
A4 draudzējas ar B1, B2, B3, B4
utt.
A12 draudzējas ar B1, B2, B3, …, B12

Bez tam liksim visiem grupas B ietvaros draudzēties vienam ar otru un vēl arī ar Andri. Tādā gadījumā A0 ir 0 draugi, A1 ir 1 draugs, A2 ir 2 draugi utt., A12 ir 12 draugi. B1 ir 12(no grupas A) + 11(no grupas B) +1 (Andris) = 24 draugi, B2 ir 11+11+1=23 draugi, B3 ir 10+11+1=22 draugi, utt.…, B1 ir 2+11+1=14 draugi, B12 ir 1+11+1=13 draugi. Tātad esam parādījuši tādu klases modeli, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem un kurā Andrim ir 12 draugi.

2) Aplūkosim otru gadījumu, kad Andra visiem klasesbiedriem ir vismaz viens draugs. Tātad Andra klasesbiedriem ir pa 1, 2, …, 25 draugiem (Andrim ir 25 klasesbiedri un tiem visiem ir dažāds draugu skaits). Apvienosim tos Andra klasesbiedrus, kuriem ir 1, 2, 3, …, 12 draugi, grupā C, bet pārējos - grupā D. Grupas C bērniem kopā ir 1+2+…+25=147 draudzības, bet grupas D bērniem kopā ir 13+14+…+25=247 draudzības. Grupas D bērniem ārpus C ir vismaz 247-78=169 draudzības, un tikai 169 draudzības ārpus C grupai D iespējamas vienīgi gadījumā, ja visi grupas C skolēnu draugi ir no grupas D. Pašas grupas D ietvaros lielākais iespējamais draudzību skaits ir 13x12=156 (ja katram ir draugs). Tātad vēl grupas D skolēniem paliek 169-156=13 draudzības ārpus grupās C un D. Tā kā D ir tieši 13 bērni, tad tie visi ir Andra draugi.

Ja Andrim būtu kāds draugs no C, tad D draugu skaits ārpus C būtu vēl lielāks, taču tas nav iespējams, jo D lielākais draugu skaits ārpus C var būt 13x12+13=169. Tātad grupā C nav neviena Andra drauga un Andrim ir tieši 13 draugi.

Tagad konstruēsim piemēru, lai parādītu, ka tāda situācija tiešām ir iespējama.
C1 draudzējas ar D1
C2 draudzējas ar D1, D2
C3 draudzējas ar D1, D2, D3
utt.…
C12 draudzējas ar D1, D2, …, D12
Vēl katrs no grupas D draudzējas ar visiem citiem šajā grupā un arī ar Andri.
Tad C1 ir 1 draugs, C2 - 2 draugi, …, C12 - 12 draugi.
D1 - 12(no grupas C)+12(no grupas D)+1(Andris)=25,
D2- 11+12+1=24,
utt.…
D12 - 1+12+1=14,
D13 - 12+1=13 draugi.
Tātad Andrim šajā piemērā ir tieši 13 draugi.

11.

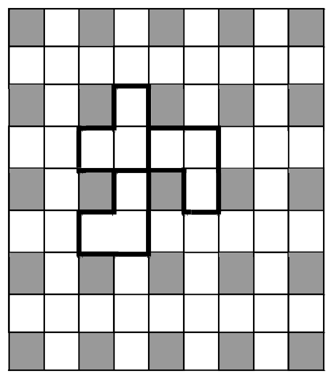
<u>Risinājums</u> Apzīmēsim Cipariņa pateikto skaitļu summu ar S, bet reizinājumu ar R. Tā kā tie ir naturāli skaitļi, tad $S \geq 3$. Ja S=3, tad Sandra uzreiz zinātu, ka iedomātie skaitļi ir 1; 1 un 1. Ja S=4, tad arī Sandra uzreiz zinātu iedomātos skaitļus - 1; 1 un 2. Ja S=5, tad pastāv divas iespējas - 1; 1 un 3, kā arī 1, 2, 2. Abos gadījumos S>R ($1+1+3>1\cdot1\cdot3$ un $1+2+2>1\cdot2\cdot2$). Tāpēc rodas pretruna ar Sandras izteikumu, ka viņa varētu noteikt skaitļus, ja zinātu, ka R>S. Ja $S \geq 7$, tad arī ir iespējami divi dažādi skaitļu trijnieki (visu iespējamo trijnieku skaits ir lielāks), kuriem reizinājums ir lielāks par summu. Tie ir (1; 2; S-3) un (1;3;S-4). Tiešām, $1+2+S-3<1\cdot2\cdot(S-3)=2S-6$ (ja $S \geq 7$, tad

$2S-6>S$) un $1+3+S-4<1\cdot3\cdot(S-4)=3S-12$ (ja $S \geq 7$, tad $3S-12>S$). Tātad Sandra nevarētu pateikt trīs skaitļus, ja arī zinātu, ka to reizinājums ir lielāks par summu. Atliek viena iespēja: S=6. To, tāpat kā mēs, varēja konstatēt arī Regīna. Tad Cipariņa skaitļi ir (1; 1; 4); (1; 2; 3) vai (2; 2; 2). Tikai pirmajā gadījumā $R<S$, tāpēc Cipariņa iedomātie skaitļi ir 1; 1 un 4.

12.

Atbilde To izdarīt nav iespējams.

Risinājums Iekrāsosim kvadrātu tā, kā tas parādīts 71.zīm.



71.zīm.

Pavisam kvadrātā ir 81 rūtiņa. Deviņas no tām jau izgrieztas, atlikušie stūrīši saturēs kopā 72 rūtiņas. Tā kā katrs stūrītis satur 3 rūtiņas, tad vēl tiks izgriezti 72:3=24 stūrīši. Katrs stūrītis satur lielākais 1 krāsoto rūtiņu. Tātad 24 stūrīši saturēs lielākais 24 krāsotās rūtiņas, bet šādu rūtiņu pavisam ir 25. Tātad atlikušo figūru sagriezt stūrīšos nav iespējams.

13.

Atbilde No desmit cipariem jācenšas izveidot divus piecciparu skaitļus. Pamatosim to. Divu piecciparu skaitļu summa (attiecīgi izvietojot ciparus) varētu būt piecciparu skaitlis. Ja izveidotu kādu sešciparu skaitli, tad otrs skaitlis būtu četrciparu skaitlis un abu skaitļu summa būs vismaz sešciparu skaitlis. Katrs sešciparu skaitlis, protams, ir lielāks par jebkuru piecciparu skaitli. Līdzīgi pamato, ka viens no saskaitāmajiem nevar būt septiņciparu, astoņciparu skaitlis utt.

Apzīmēsim pirmo izveidoto skaitli ar $\overline{abcde}$, bet otro - ar $\overline{ABCDE}$. Mūs interesē, kad summa $10000(a+A)+1000(b+B)+100(c+C)+10(d+D)+(e+E)$ būs pati mazākā. Skaidrs, ka tā notiks tad, ja (a+A) būs pati mazākā iespējamā vērtība, tātad 1+2 vai 2+1. Tiešām, ja a vai A būtu lielāks par kādu no sekojošiem cipariem x, tad, mainot vietām x ar a resp. ar A, mēs iegūtu lielāku summu (vecākā šķirā parādītos lielāks cipars). Līdzīgi iegūstam, ka (b+B) būs nākamā mazākā iespējamā vērtība, t.i., 0+3 vai 3+0 utt. Iegūstam

$$a+A=1+2 \quad (2+1)$$
$$b+B=0+3 \quad (3+0)$$
$$c+C=4+5 \quad (5+4)$$
$$d+D=6+7 \quad (7+6)$$
$$e+E=8+9 \quad (9+8).$$

Tā kā summa nav atkarīga no saskaitāmo kārtības, tad ir vienalga, kuru ciparu no pāra (a,A) kombinējam ar kuru ciparu no pāra (b,B) utt. Pavisam iespējami 16 dažādi pāri ar minimālo summu. Lūk, divi piemēri:

$$\begin{array}{r} 20468 \\ +13579 \\ \hline 34047 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10569 \\ +23478 \\ \hline 34047 \end{array}$$

14.

<u>Atbilde</u> Atrisināsim vispārīgāku uzdevumu. Pieņemsim, ka dota n pozitīvu skaitļu augoša virkne $a_1<a_2<...<a_n$ un otra n pozitīvu skaitļu augoša virkne $b_1<b_2<...<b_n$. Izveidosim n reizinājumus, katrā reizinājumā ņemot vienu skaitli no pirmās un vienu - no otrās virknes. Pie tam katru skaitli izmantosim kā reizinātāju tikai vienu reizi. Kādā gadījumā iegūto n reizinājumu summa būs vismazākā un kādā - vislielākā?

Mēs pierādīsim, ka vislielākā summa ir $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$ (t.i., ja sareizina savā starpā abu virkņu mazākos skaitļus, abu virkņu otros mazākos skaitļus, abu virkņu lielākos skaitļus), bet vismazākā summa ir $a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_1$ (t.i., ja sareizina pirmās virknes mazāko un otrās virknes lielāko skaitli, pirmās virknes otro mazāko un otrās virknes otro lielāko skaitli utt.)

Lemma. Ja $e<f$ un $g<h$, tad $eg+fg>eh+fg$.

Tiešām, pierādāmo nevienādību var pārveidot par

$$eg+fg-eh-fg>0$$
$$e(g-h)-f(g-h)>0$$
$$(e-f)(g-h)>0,$$

kas ir acīmredzami patiesa nevienādība, jo $e-f<0$ un $g-h<0$, bet divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs.

No lemmas uzreiz seko mūsu uzdevuma atrisinājums.

Apskatīsim patvaļīgu summu, kas izveidota saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Pieņemsim, ka $a_i<a_j$, $b_x>b_y$ un mūsu apskatāmajā summā a_i sareizināts ar b_x, bet a_j sareizināts ar b_y, t.i., "mazāks a sareizināts ar lielāku b". Izdarīsim vienu izmaiņu: reizināsim a_i ar b_y, bet a_j ar b_x; citus reizinājumus neaizskarsim. Saskaņā ar lemmu $a_i b_x + a_j b_y < a_i b_y + a_j b_x$, tātad mūsu apskatāmās summas vērtība šīs izmaiņas rezultātā ir pieaugusi. Turpinām šādas izmaiņas, kamēr vien var atrast tādas vietas, kur "mazāks a sareizināts ar lielāku b". Šo izmaiņu rezultātā apskatāmās summas vērtība visu laiku augs. Agri vai vēlu visas šādas vietas būs atrastas un "izlabotas"; tad a_1 būs reizināts ar b_1, a_2 ar b_2, …, a_n ar b_n. Tā kā n reizinājumu summa visu laiku palielinājās, tad beigās iegūtā summa $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$ ir lielāka par sākotnējo (vai arī vienāda ar to, ja jau pašā sākumā a_1 bija reizināts ar b_1, a_2 ar b_2, utt.) Tātad šī summas vērtība ir lielākā iespējamā.

Līdzīgi pierāda apgalvojumu par to, kad n reizinājumu summas vērtība ir mazākā iespējamā.

Tā kā 1<2<3<4 un $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, tad mūsu apskatāmās izteiksmes $\frac{a}{1} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = a \cdot \frac{1}{1} + b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot \frac{1}{3} + d \cdot \frac{1}{4}$ lielākā iespējamā vērtība ir $4 \cdot \frac{1}{1} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = 6\frac{5}{12}$, bet mazākā iespējamā vērtība ir $1 \cdot \frac{1}{1} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 4$.

15.

<u>Atbilde</u> 996 dažādos veidos (ja neņem vērā saskaitāmo kārtību.)

Tie ir: 1993=1+1992
1993=2+1991
1993=3+1990
……
1993=996+997.

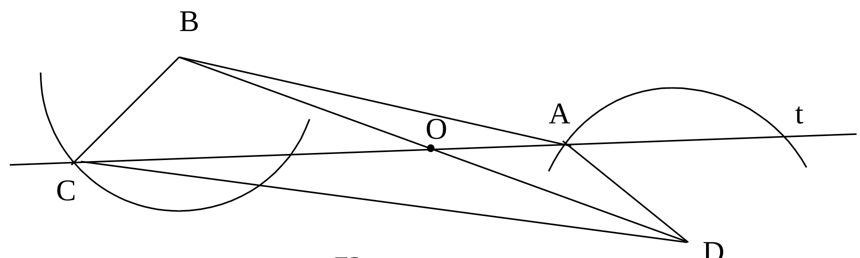
<u>Risinājums</u> Skaidrs, ka citu veidu, kā izsacīt 1993 kā divu naturālu skaitļu summu (pat nerūpējoties, lai saskaitāmo lielākais kopīgais dalītājs ir 1) vispār nav.
Pamatosim, kāpēc katrs no šiem skaitļu pāriem apmierina uzdevuma nosacījumus.
Pieņemsim, ka skaitli 1993 var izteikt kā divu tādu naturālu skaitļu summu, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir d>1:
1993=a+b, LKD(a,b)=d, $d \neq 1$. Protams, ka d<1993, jo citādi $a \geq 1993$ un $b \geq 1993$ un summa a+b noteikti pārsniegtu 1993. Tad skaitļus a un b var izteikt šādi: $a=s \cdot d$, $b=t \cdot d$, kur $t,s \in N$. Tādā gadījumā $1993=a+b=s \cdot d+t \cdot d=d(s+t)$. No tā izriet, ka skaitlim 1993 ir vismaz 2 naturāli dalītāji d un (s+t), pie tam 1<d<1993. Taču tas nav iespējams, jo 1993 ir pirmskaitlis un tā vienīgie dalītāji ir 1 un 1993. Tātad d=1 un s+t=1993. Tātad, ja divu naturālu skaitļu summa ir 1993, tad tie ir savstarpēji pirmskaitļi. Savukārt, 1993 var izteikt kā divu naturālu skaitļu summu 996 atšķirīgos veidos.
To, ka 1993 ir pirmskaitlis, pārbauda tāpat kā 12.uzdevuma risinājumā.

16.

<u>Atbilde</u> Nē; ir iespējams uzkonstruēt tādu izliektu četrstūri, kurš apmierina uzdevuma nosacījumus, bet nav paralelograms.

<u>Risinājums</u> Konstrukcija. (Sk. 72.zīm.)

1) Novelkam diagonāli BD un atrodam tās viduspunktu O.
2) Caur O novelkam patvaļīgu taisni t, uz kuras atradīsies otra diagonāle; t nav perpendikulāra BD.
3) Ar rādiusa garumu, kas lielāks nekā B attālums līdz taisnei t un mazāks nekā BO, no centriem A un D novelkam riņķa līnijas lokus; katrs no tiem krusto taisni divos punktos.
4) Par A un C izvēlamies tos krustpunktus, kas ir dažādos attālumos no BD.

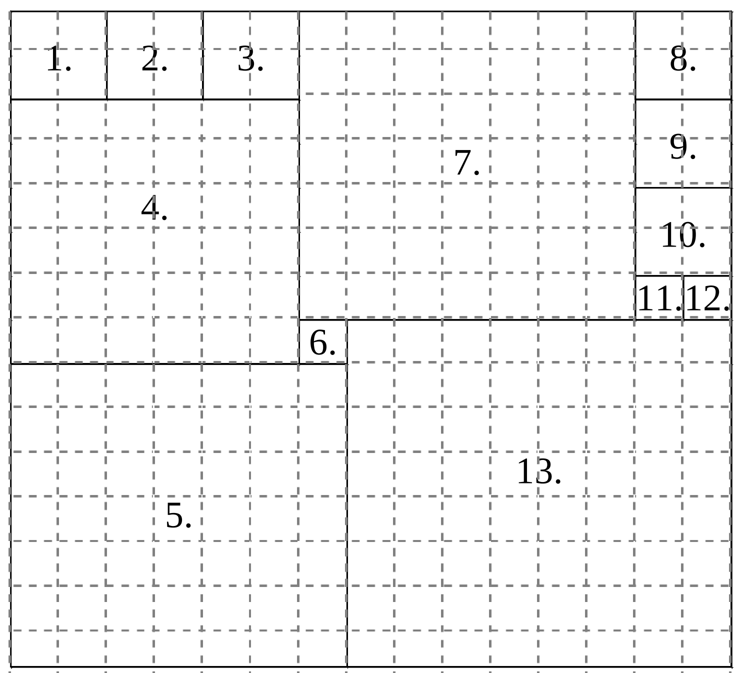


72.zīm.

Četrstūris ABCD nav paralelograms, lai gan BO=DO un AD=BC.

17.

Atbilde Piemēram, tā! Sk. 73.zīm.



73.zīm.

18.

Risinājums Pēc uzdevumā dotā ir iespējams lielākais 2 atšķirīgu masu monētas. Pretējā gadījumā, izvēloties trīs no monētām, varētu gadīties, ka visām izvēlētajām trim monētām masas ir atšķirīgas. Tas neatbilst dotajam.

Pirmajā svēršanas reizē uz katra svaru kausa novietosim pa divām monētām. Aplūkosim divas iespējas.

I. Pieņemsim, ka iestājas līdzsvars. Tas var gadīties tad, ja visu monētu masas ir vienādas, vai arī tad, ja uz katra svaru kausa novietota viena vieglākā un viena smagākā monēta. Šajā gadījumā otrajā svēršanas reizē salīdzinām divu šo monētu masas, kas pirmajā svēršanas reizē atradās uz viena svaru kausa. Ja arī tagad svari ir līdzsvarā, tad visām dotajām monētām masas ir vienādas. Ja svari nav līdzsvarā, tad starp dotajām monētām ir divu atšķirīgu masu monētas. Abas monētas, kas atrodas uz svariem pēdējā svēršanā, tad arī ir abu dažādo masu "pārstāves". Esam atraduši pa vienai monētai no katras masas.

II. Ja pirmajā svēršanas reizē svari nav līdzsvarā, tad **noteikti** visu monētu masas nav vienādas. Tātad ir divu dažādu masu monētas. Šajā gadījumā otrajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai, kas pirmajā svēršanas reizē atradās katra uz sava svaru kausa. Ja iestājas līdzsvars, tad abas otrajā reizē nesvērtās monētas ir ar dažādām masām. (Jo vienādu masu monētu noņemšana no katra svaru kausa nespēj ietekmēt līdzsvara attiecības). Ja otrajā svēršanas reizē līdzsvars neiestājas, tad uzreiz esam atraduši pa vienai monētai no katras masas (ir tikai divu atšķirīgu masu monētas).

19.

Atbilde

1	2	3
4	5	6
7	8	9

vai

1	4	7
2	5	8
3	6	9

74.zīm.

Risinājums Tā kā ne 1, ne 9 nevar būt kādu divu doto skaitļu summas puse, tad gan 1, gan 9 ir ierakstāmi 3x3 kvadrāta stūros. Izšķirosim divas iespējas:

a) 1 un 9 ierakstīti stūros pie vienas malas (sk. 75.zīm.).

1	5	9
*	*	*

75.zīm.

Tad starp tiem viennozīmīgi ierakstāms skaitlis 5. Lai varētu atrast divu naturālo skaitļu summas pusi, kas arī ir naturāls skaitlis, abiem skaitļiem jābūt vai nu pāra, vai arī nepāra. Tātad 75.zīm. ar ∗ apzīmētajās rūtiņās jāieraksta 3 dažādi nepāra skaitļi, bet mums vēl ir atlikuši tikai neierakstīti nepāra skaitļi. Tātad 1 un 9 nevar rakstīt stūra rūtiņās pie vienas malas.

b) 1 un 9 tiek ierakstīti pretējos stūros (sk. 76.zīm.)

1		*
3		*
5	7	9

76.zīm.

Kā jau iepriekš minējām, tikai vienādas paritātes skaitļu pussumma ir naturāls skaitlis, tāpēc arī abās pārējās stūra rūtiņās jāieraksta nepāra skaitļi. Ja kādā no šiem stūriem ierakstām 5 (sk. 76.zīm.), tad viennozīmīgi tiek ierakstīti arī skaitļi 3 un 7 un atkal nav nepāra skaitļu, ko ierakstīt ar ∗ apzīmētajās rūtiņās. Tātad pretējos stūros jāieraksta 3 un 7, un 5 jāieraksta centrālajā rūtiņā. Tālāk tabula aizpildās viennozīmīgi.

Pavisam ir 8 dažādas tabulas ar uzdevumā minēto īpašību. Tās iegūstamas no 74.zīm. attēlotajām tabulām, pagriežot tās par 90°; 180°; 270°; 360°.

20.

Atbilde Līdzīgi kā 74. uzdevuma risinājumā iegūstam, ka mazākā iespējamā summas vērtība ir $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{100}{100}=100$, bet lielākā iespējamā summas vērtība ir $\frac{100}{1}+\frac{99}{2}+\ldots+\frac{2}{99}+\frac{1}{100}$.

21.

Atbilde Ar "+1" un ar "-1".

Risinājums Sastādīsim izteiksmi, kura satur dotos skaitļus un kuras vērtība ir 1: $5\cdot(2n+3)-2\cdot(5n+7)=1$ $(*)$

Pieņemsim, ka 2n+3 dalās ar d un arī 5n+7 dalās ar d. Tādā gadījumā abas šīs izteiksmes var izteikt šādi: $2n+3=d\cdot t$ un $5n+7=d\cdot s$. Tad, ievietojot to izteiksmē $(*)$, iegūsim $5\cdot d\cdot t-2\cdot s\cdot d=d\cdot(5t-2s)=1$.

tātad skaitļi d un 5t-2s ir skaitļa 1 dalītāji. Bet skaitļa 1 dalītāji ir vienīgi skaitļi "+1" un "-1". Tātad d=1 vai d= -1. Līdz ar to esam pamatojuši, ka (2n+3) un ·(5n+7) vienlaikus var dalīties vienīgi ar skaitļiem "+1" un "-1".

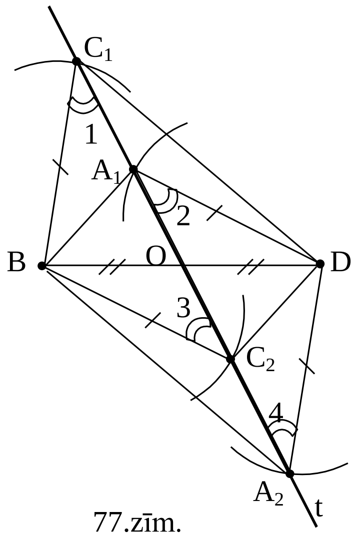
22.

Atbilde Jā, četrstūris ar minētajām īpašībām noteikti ir paralelograms.

Risinājums Veiksim šādu konstrukciju:

1) Novilksim diagonāli BD un atradīsim tās viduspunktu O.
2) Caur O novilksim taisni t, kas saturēs otru diagonāli AC.
3) Tā kā pēc dotā $BC>\frac{1}{2}BD=BO=OD$, tad velkam lokus, kuru rādiusi lielāki par BO un centri atrodas punktos B un D. Katrs loks krustos taisni t divos punktos - noteikti abi krustpunkti atradīsies dažādās pusēs no punkta O, jo $BC>\frac{1}{2}BD$. Apzīmēsim šos krustpunktus ar C_1, C_2, A_1 un A_2.
4) Iespējamie četrstūri ir BA_1DC_2 vai BA_2DC_1.
5) Saskaņā ar doto un konstrukciju $BC_1=BC_2=DA_1=DA_2$. Tad ΔBC_1C_2 un ΔDA_1A_2 ir vienādsānu trijstūri. Pēc dotā punkti B un D atrodas vienādos attālumos no taisnes t, tad abiem minētajiem vienādsānu trijstūriem ir vienādi augstumi. Tad $\Delta BC_1C_2=\Delta DA_1A_2$. No tā iegūstam, ka $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$.
6) Ja $\angle 1=\angle 4$, tad $BC_1 \| DA_2$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi. Tā kā $BC_1=DA_2$, tad BC_1DA_2 ir paralelograms pēc pazīmes par vienādām un paralēlām malām.

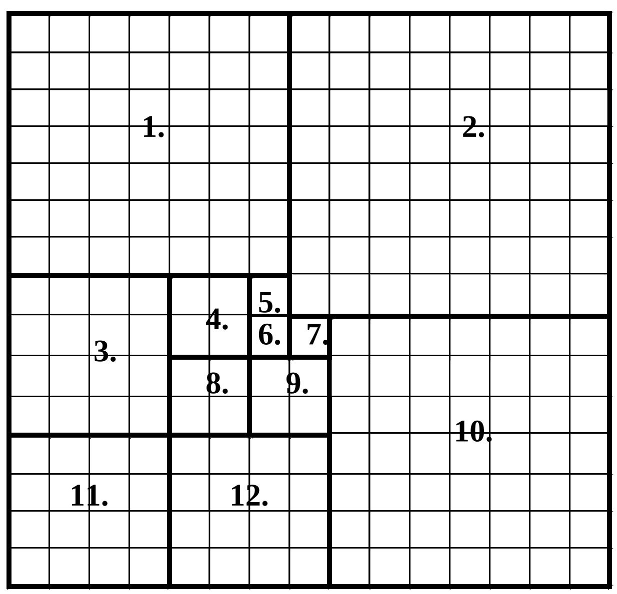
Lietojot tādu pašu spriedumu, iegūstam arī to, ka BA_1DC_2 ir paralelograms.



77.zīm.

23.

Atbilde Piemēram, tā! Sk. 78.zīm.



78.zīm.

24.

Risinājums Apskatīsim vispirms gadījumu, kad ir 8 monētas un atļautas 3 sviešanas.

Tāpat kā 78.uzdevuma atrisinājumā konstatējam, ka var būt augstākais divas atšķirīgas monētu masas.

Uzliekam uz katra kausa pa 4 monētām. Ja svari ir līdzsvarā, tad abos monētu četriniekos ir vienāds daudzums vieglāko monētu un vienāds daudzums smagāko monētu; ņemam vienu no šiem četriniekiem un rīkojamies ar to tāpat kā 78.uzdevuma atrisinājumā.

Pieņemsim, ka pirmajā svēršanas reizē viens kauss nosveras uz leju. Tad otrajā svēršanas reizē salīdzinām divas monētas no smagākā kausa ar divām monētām no vieglākā kausa.

Ja iestājas līdzsvars, tad **trešajā svēršanas reizē** salīdzinām tādu divu monētu masas, kas pirmajā svēršanas reizē atradās uz dažādiem svaru kausiem, bet otrajā reizē netika svērtas.

- Ja iestājas līdzsvars, tad otrajā un trešajā svēršanas reizē nesvērtās monētas ir katra ar savu masu.
- Ja nav līdzsvars, tad esam atraduši pa vienai monētai ar atšķirīgajām masām.

Ja līdzsvars neiestājas, tad **trešajā svēršanas reizē** salīdzinām pa monētai, kas otrajā svēršanas reizē atradās uz dažādiem svaru kausiem.

- Ja iestājas līdzsvars, tad otrajā reizē svērtās, bet trešajā reizē nesvērtās monētas ir katra ar savu masu.
- Ja nav līdzsvars, tad esam atraduši pa vienai monētai ar atšķirīgajām masām.

Tagad aplūkosim gadījumu ar 16 monētām un 4 pieļautām svēršanām.

Pirmajā svēršanas reizē uzliekam uz kausiem pa 8 monētām. Ja kausi ir līdzsvarā, tad uz tiem ir vienāds daudzums smagāko monētu. Ņemam vienu no šiem monētu astotniekiem un rīkojamies ar to, kā aprakstīts iepriekš.

Aplūkosim tagad gadījumu, kad pirmajā svēršanā viens kauss nosveras uz leju (pieņemsim, ka tas saturēja monētas A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8), bet otrs kaus paceļas augšup (apzīmēsim uz tā esošās monētas ar B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8).

Tālāk 2. svēršanā novietosim uz viena kausa A1, A2, A3, A4, bet uz otra kausa B1, B2, B3, B4. Šķirosim divas iespējas.

1. Kausi ir līdzsvarā. Varam secināt, ka <u>A5, A6, A7, A8 kopā ir smagākas nekā , B5, B6, B7, B8</u>. Nekas mūs netraucē iztēloties, ka sākumā mums bijušas tikai astoņas monētas A5-A8 un B5-B8, un ar pirmo svēršanu mēs esam uzzinājuši pasvītroto informāciju. Tad mēs esam vienā no tām situācijām, kādas rodas iepriekš apskatītā uzdevuma "8 monētas, 3 svēršanas" risināšanā pēc 1. svēršanas, un mēs varam pabeigt meklēšanu ar vēl divām svēršanām, kā iepriekš aprakstīts. Kopā būs patērētas 4 svēršanas.
2. Kausi nav līdzsvarā; varam pieņemt, ka A1, A2, A3, A4 kopā ir smagākas nekā B1, B2, B3, B4. Šo gadījumu analizē līdzīgi I.

Uzdevums atrisināts.

Lasītājs pats var pārliecināties, ka līdzīgā ceļā 32 monētu gadījumā pietiek ar 5 svēršanām, 64 monētu gadījumā - ar 6 svēršanām, …, 2^n monētu gadījumā - ar n svēršanām.

25.

<u>**Atbilde**</u> Nē, nepastāv.

<u>**Risinājums**</u> Pieņemsim, ka tāds trīsciparu skaitlis eksistē; apzīmēsim to ar $\overline{abc}$. Pārnesot šī skaitļa pirmo ciparu uz beigām, mēs iegūstam trīsciparu skaitli $\overline{bca}$, kurš ir

8 reizes lielāks par pirmo (nevaram iegūt divciparu vai pat viencipara skaitli, kas notiktu, ja b=0 vai b=c=0, jo tad iegūtais skaitlis nebūtu lielāks par sākotnējo.) Tātad ir spēkā vienādība $\overline{bca}=8\cdot\overline{abc}$. Tātad $\overline{bca}$ noteikti ir pāra skaitlis. tātad a vietā var atrasties tikai cipari 0, 2, 4, 6 un 8. Nulle nevar būt $\overline{bca}$ pēdējais cipars, jo tad trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ sāktos ar 0. Tātad skaitļa $\overline{abc}$ pirmais cipars ir vismaz 2. Tātad $\overline{abc}>200$. Pareizinot abas šīs nevienādības puses ar 8, iegūsim:

$$\overline{abc}>200\cdot 8,\ \text{jeb}$$
$$\overline{bca}>1600.$$

Tātad $\overline{bca}$ noteikti ir četrciparu skaitlis. Esam ieguvuši pretrunu.

26.

Atbilde Iespējami divi gadījumi:

1) a=1 un b=996
2) a=996 un b=1

Risinājums Pieskaitīsim abām dotās vienādības pusēm 1:

$$a+b+ab=1993 \quad |+1$$
$$a+b+ab+1=1994$$

Sagrupēsim saskaitāmos un iznesīsim b pirms iekavām:

$$(a+1)+(b+ab)=1994$$
$$(a+1)+b(a+1)=1994$$

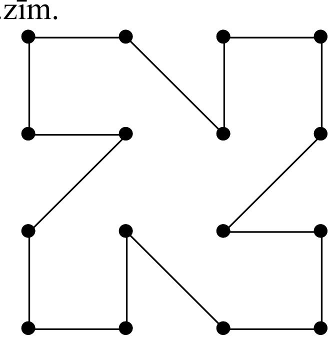
Sadalīsim vienādības abas puses reizinātājos:

$$(a+1)(1+b)=2\cdot 997$$

Ievērosim: ja a un b ir naturāli skaitļi, tad $a+1\geq 2$ un $b+1\geq 2$.
Gan 2, gan 997 ir pirmskaitļi, tāpēc tos nevar sadalīt pirmreizinātājos tālāk. Lai pastāvētu šī vienādība (ievērojot to, ka a un b ir naturāli skaitļi), ir 2 iespējas:
$\begin{cases} a+1=2 \\ 1+b=997 \end{cases}$ vai $\begin{cases} a+1=997 \\ 1+b=2 \end{cases}$, no kurienes: $\begin{cases} a=1 \\ b=996 \end{cases}$ vai $\begin{cases} a=996 \\ b=1 \end{cases}$.

27.

Atbilde Sk. piemēram, 79.zīm.

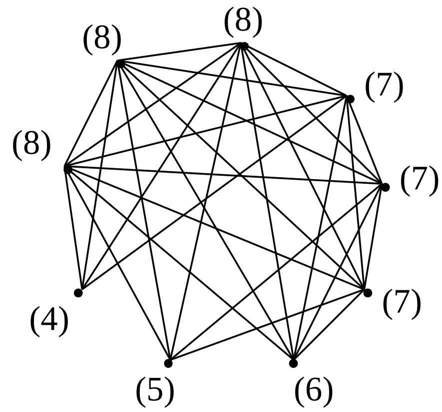


79.zīm.

Ievērojiet: saskaņā ar lauztas līnijas definīciju tās divi blakus posmi nedrīkst atrasties uz vienas taisnes.

28.

Risinājums Parādīsim, ka tā var gadīties. Izveidosim šādu modeli: ansambļa 9 dalībniekus attēlosim ar punktiem. Ja divi no skolēniem ir draugi, tad attiecīgos punktus savienosim ar līniju. Tātad, lai īstenotos uzdevuma prasības, mums jāvar uzzīmētos 9 punktus savienot ar līnijām tā, lai tieši no 3 punktiem izietu pa 8 līnijām, tieši no 3 punktiem izietu pa 7 līnijām, no viena punkta - 6 līnijas, no viena - 5 līnijas un vēl no viena - 4 līnijas. 80.zīm. redzams, ka šāda situācija ir iespējama. Katram punktam blakus iekavās ierakstīts atbilstošais draudzību skaits.

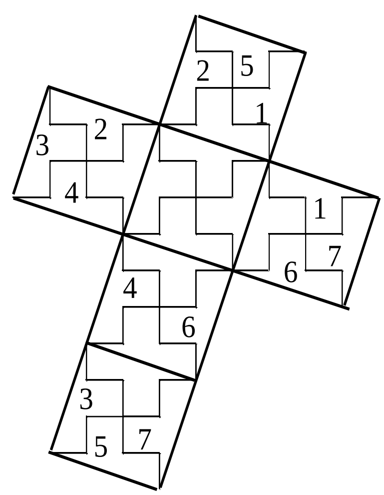


80.zīm.

29.

Atbilde Jā, var.

Risinājums Uzzīmēsim kuba izklājumu un parādīsim, kā to var pārklāt ar 12 dotajām figūriņām (sk.81.zīm.)



81.zīm.

Ar vienādiem cipariem apzīmētās figūru daļas, salokot kubu, veido veselu figūriņu, kas "apliecas" ap kuba šķautni.

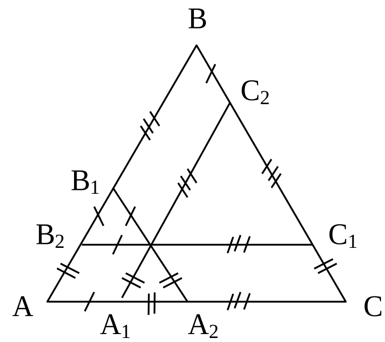
30.

Risinājums

Saskaņā ar konstrukciju četrstūri AB_2SA_1, CA_2SC_1, BC_2SB_1 ir paralelogrami. Tātad $AA_1=B_2S$ (1). Pēc konstrukcijas un dotā (ΔABC ir vienādmalu) arī ΔB_2SB_1 ir vienādmalu, tātad $B_2S=B_1S=B_1S_2$ (2). Tā kā BC_2SB_1 ir paralelograms, tad $B_1S=BC_2$ (3). No (1), (2) un (3) seko, ka

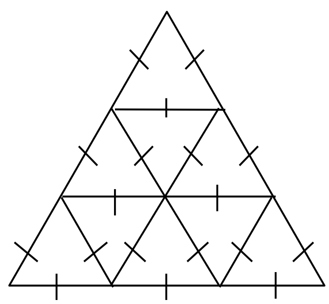
$AA_1=B_2S=B_1B_2=B_1S=BC_2$.

Pilnīgi analogi $AB_2=A_1S=A_1A_2=A_2S=C_1C$ un $CA_2=C_1S=C_1C_2=C_2S=BB_1$. Tātad visi apskatāmie nogriežņi ir sadalāmi 3grupās pa 5 katrā (sk.82.zīm.).

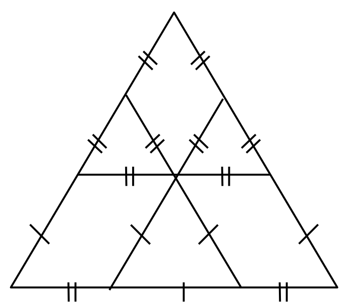


82.zīm.

Var gadīties, ka visu triju grupu nogriežņi ir dažāda garuma (sk.82.zīm.). Ir iespējams, ka visu grupu nogriežņi ir vienāda garuma (sk. 83.zīm.). Ir iespējams, ka 2 grupu nogriežņi ir vienāda garuma, bet trešās grupas nogriežņi ir atšķirīga garuma (sk. 84.zīm.)



83.zīm.



84.zīm.

31.

<u>Risinājums</u> Apzīmēsim a= $\overline{xyz}$ un b= $\overline{zyx}$. Skaidrs, ka x>0 un Z>0; varam pieņemt, ka x>z. Tā kā a^2 un b^2 ir piecciparu skaitļi, tad $x\leq 3$ un $z\leq 3$ (tāda trīsciparu skaitļa kvadrāts, kas sākas ar 4 vai vēl lielāks cipars, nav mazāks par 400^2=160000, tātad ir sešciparu skaitlis). Tāpēc vienīgie iespējamie skaitļi a varētu būt $\overline{3y1}$, $\overline{3y2}$ un $\overline{2y1}$, kur y - cipars. Pārbaudot visas 30 iespējas, konstatējam, ka

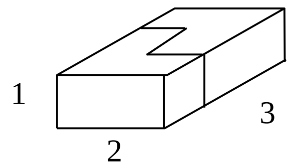
der tikai a= 301; 311; 201; 211; 221
un atbilstoši b=103; 113; 102; 112; 122.

Aplūkojot iespēju, kad z>x, tādā pašā ceļā iegūstam
b=301; 311; 201; 211; 221
un atbilstoši a=103; 113; 102; 112; 122.

32.

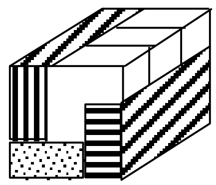
Atbilde Jā, var.

Risinājums Vispirms no 6 dotajām figūriņām izveidosim 3 paralēlskaldņus ar izmēriem 1x2x3 (sk.85.zīm.)



85.zīm.

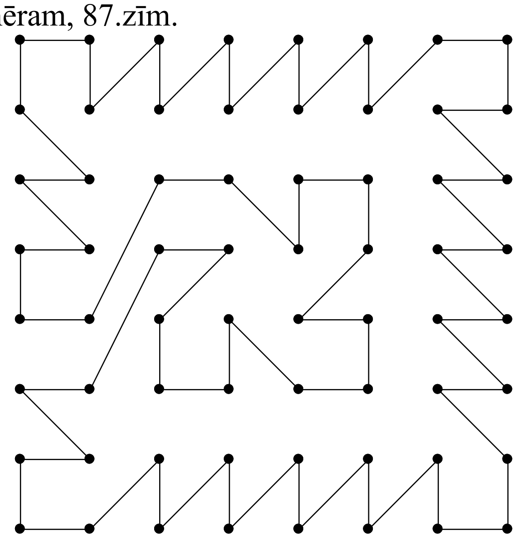
86. zīmējumā parādīts, kā novietot trīs izveidotos paralēlskaldņus (iesvītroti) un vēl 3 atlikušās figūriņas, lai izveidotos kubs ar izmēriem 3x3x3.



86.zīm.

33.

Atbilde Sk., piemēram, 87.zīm.



87.zīm.

Ievērojiet: saskaņā ar lauztas līnijas definīciju divi lauztas līnijas blakus posmi nedrīkst atrasties uz vienas taisnes.

34.

Risinājums Trīs pēc kārtas ņemti interesanti skaitļi var būt. Piemēram,

$$33=3\cdot 11,$$
$$34=2\cdot 17,$$
$$35=5\cdot 7.$$

Pamatosim, ka četri pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi visi nevar būt interesanti. Starp četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem tieši viens noteikti dalās ar 4. Šādu skaitli var uzrakstīt formā 4k un tālāk formā $4k=2\cdot 2\cdot k$. Ja $k\geq 2$, tad k vai nu pats ir

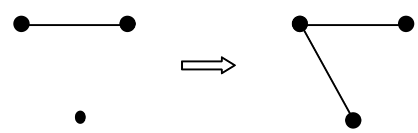
pirmskaitlis, vai arī to var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. tātad šāds skaitlis ir uzrakstāms kā vismaz triju pirmskaitļu reizinājums, un tāpēc tas nav interesants.
Ja k=1, nupat izdarītais spriedums nav spēkā, jo 1 ne pats ir pirmskaitlis, ne arī to var sadalīt divu vai vairāku pirmskaitļu reizinājumā. Tāpēc visus četrus pēc kārtas ņemtu skaitļu komplektus, kas satur skaitli 4, apskatīsim atsevišķi:

1, 2, 3, 4	skaitļi 1, 2, 3 nav interesanti;
2, 3, 4, 5	skaitļi 2, 3, 5 nav interesanti;
3, 4, 5, 6	skaitļi 3 un 5 nav interesanti;
4, 5, 6, 7	skaitļi 5 un 7 nav interesanti.

Ir aplūkotas visas iespējas, un nevienā no tām nav četru pēc kārtas ņemtu interesantu skaitļu.
Tātad lielākais pēc kārtas esošu interesantu naturālu skaitļu skaits ir 3.

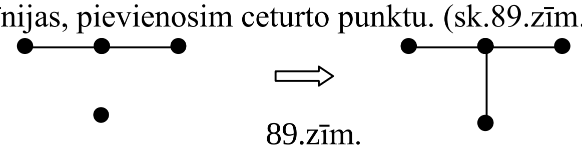
35.

Risinājums Izveidosim šādu modeli: 13 pilsētas apzīmēsim ar 13 punktiem. Ja divas pilsētas savieno aviolīnija, tad starp atbilstošajiem punktiem vilksim taisnu līniju, ja autobusu satiksme - pārtrauktu līniju, ja vilciena satiksme - viļņotu līniju.
Pierādīsim šādu faktu: ja n punkti jāsavieno ar līnijām tā, lai no katra punkta varētu pa līnijām nokļūt uz katru citu, tad līniju skaits ir vismaz n-1.
Ja doti 2 punkti, tad, protams, nepieciešama 1līnija. Pievienosim šiem 2 punktiem trešo (sk.88.zīm.)



88.zīm.

Lai arī tagad no katra punkta varētu nokļūt jebkurā citā, jāpievieno vismaz 1 līnija - no pievienotā punkta uz kādu no jau esošiem. Tātad vajag vismaz 2 līnijas.
Ja ir 3 punkti un 2 līnijas, pievienosim ceturto punktu. (sk.89.zīm.).



89.zīm.

Lai arī tagad no katra punkta varētu nokļūt jebkurā citā, jāpievieno vēl vismaz 1 līnija. Tātad pavisam nepieciešamas trīs līnijas.
Šādā veidā turpinot spriedumus, iegūsim, ka n punktiem ir nepieciešamas vismaz n-1 līnijas.
Apzīmēsim autobusa līniju skaitu ar A, aviolīniju skaitu ar L, bet vilciena maršrutu - ar V. Tā kā ir 13 pilsētas, tad noteikti jābūt spēkā

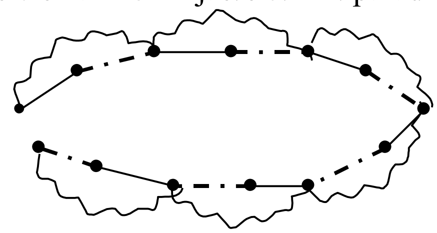
$$\begin{cases} A+V \geq 12 \quad (12 = 13-1) \\ A+L \geq 12 \\ L+V \geq 12 \end{cases}$$

Saskaitot šīs 3 nevienādības, iegūsim:

$2A+2L+2V \geq 36$ jeb

$A+L+V \geq 18$

Tātad kopā nepieciešamas vismaz 18 līnijas. 90.zīm. parādīt, ka ar 18 līnijām pietiek.



90.zīm.

36.

Risinājums Ar doto izteiksmi izdarīsim ekvivalentus pārveidojumus:

$$n^{12}-n^8-n^4+1 =$$
$$= n^{12}-n^8+1-n^4 =$$
$$= n^8(n^4-1)-(n^4-1) =$$
$$= (n^8-1)(n^4-1) =$$
$$= (n^4-1)(n^4+1)(n^2-1)(n^2+1) =$$
$$= (n^2-1)(n^2+1)(n^4-1)(n-1)(n+1)(n^2+1) =$$
$$=(n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)^2(n^4+1).$$

Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad visi četri reizinātāji ir pāra skaitļi. Bez tam n-1 un n+1 ir pēc kārtas ņemti pāra skaitļi, tātad viens no tiem dalās ar 4, bet šī skaitļa kvadrāts - ar 16. Divi no atlikušajiem kvadrātiem noteikti dalās ar $2^2=4$, bet (n^4+1) dalās ar 2. Tātad viss reizinājums dalās ar $16\cdot4\cdot4\cdot2=2^4\cdot2^2\cdot2^2\cdot2=2^9=512$. To arī vajadzēja pierādīt.

37.

Atbilde Lielākā iespējamā vērtība ir 20.

Risinājums Aplūkosim, kā var tikt izvietotas reizināšanas zīmes:

1) visas trīs pēc kārtas;
2) divas pēc kārtas;
3) blakus esošu reizināšanas zīmju nav.

Tādējādi iegūstam šādus rezultātus:

$$2x2x2x2+2+2=20$$
$$2x2x2+2x2+2=14$$
$$2x2+2x2+2x2=12.$$

Tā kā katrs reizinājums ir atsevišķs saskaitāmais un summa no saskaitāmo kārtības nemainās, tad, pārkārtojot reizināšanas zīmju blokus citādā secībā, rezultāts nemainās. Tātad lielākā iespējamā izteiksmes vērtība ir 20.

38.

Atbilde 2000 uzdevums tiks publicēts 2004./2005. mācību gadā vai 2005./2006. mācību gadā.

Risinājums Vispirms atgādināsim, 1000. uzdevums publicēts 1993./94. m. gadā. Tātad šis mācību gads jāizvēlas par atskaites punktu. Saskaņā ar doto 1993./94. m.g. var beigties vai nu ar 1004.uzdevumu (ja būs notikušas 7 nodarbības) vai ar 1016.

uzdevumu (8 nodarbības). Pirmajā gadījumā līdz 2000.uzdevumam vēl jānopublicē 2000-1004=996 uzdevumi (∗),
otrajā gadījumā – 2000 -1016 = 984 uzdevumi (∗∗). viena mācību gada laikā var tikt publicēti vai nu $12\cdot 7=84$, vai $12\cdot 8=96$ uzdevumi. Skaidrs, ka visātrāk "pie mērķa" nonāksim tad, ja katra nākamā gada laikā notiks 8 nodarbības, vislēnāk - ja katru gadu notiks tikai 7 nodarbības.
Apzīmēsim publicēto uzdevumu skaitu ar n. Pēc 10 gadiem tas var būt šādās robežās:

$$1004+10\cdot 84 \le n \le 1004+10\cdot 96 \text{ vai}$$
$$1016+10\cdot 84 \le n \le 1016+10\cdot 96.$$

Vienkāršojot iegūstam:
$1844 \le n \le 1964$ vai $1856 \le n \le 1976$. Kā redzam, tad 2000.uzdevums vēl nebūs publicēts. Pēc 11 mācību gadiem situācija būs šāda:

$$1004+11\cdot 84 \le n \le 1004+11\cdot 96 \quad \text{vai} \quad 1016+11\cdot 84 \le n \le 1016+11\cdot 96$$
$$1928 \le n \le 2060 \qquad\qquad 1940 \le n \le 2072$$

Tātad 2004./2005. mācību gadā 2000. uzdevums var tikt publicēts, bet var gadīties (ievērojot novērtējuma apakšējo robežu), ka tas vēl nebūs publicēts. Pēc 12 mācību gadiem, tas ir 2005./2006. m.g. beigās publicēto uzdevumu skaits būs šādās robežās:

$$1004+11\cdot 84 \le n \le 1004+12\cdot 96 \quad \text{vai} \quad 1016+11\cdot 84 \le n \le 1016+12\cdot 96$$
$$2012 \le n \le 2156 \qquad\qquad 2024 \le n \le 2168$$

Tātad, beidzoties 2005./2006. m. gadam, 2000. uzdevums noteikti būs publicēts.

39.

Atbilde To izdarīt nav iespējams.

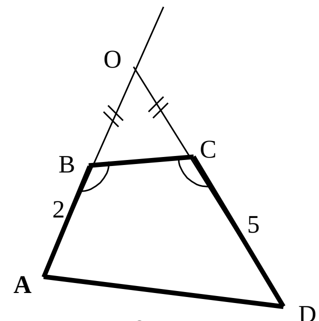
Risinājums Apzīmēsim balto rūtiņu daudzumu ar b, sarkano rūtiņu daudzumu ar s, melno rūtiņu daudzumu ar m. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrai melnai rūtiņai blakus ir vismaz viena sarkana. Tātad katra melnā rūtiņa var būt blakus ne vairāk kā trim baltām. Tā kā katrai baltai rūtiņai blakus ir vismaz viena melna, tad no pasvītrotā apgalvojuma seko, ka $m \ge \frac{1}{3}b$. Līdzīgi iegūstam, ka $s \ge \frac{1}{3}m$.

Ja b>24, tad $b \ge 25$. Tāpēc $m \ge \frac{25}{3}$ jeb $m \ge 8\frac{1}{3}$. Tā kā m ir naturāls skaitlis, tad no šejienes seko, ka $m \ge 9$. Tāpēc $s \ge \frac{1}{3}\cdot 9=3$. Tātad $m+b+s \ge 25+9+3=37$. Bet t;a ir pretruna, jo kvadrātā pavisam ir tikai 36 rūtiņas.

40.

Risinājums Aplūkosim trīs atšķirīgas iespējas:

1) AB nav paralēls ar CD, $\angle B$ un $\angle C$ ir plati leņķi (sk.91.zīm.)

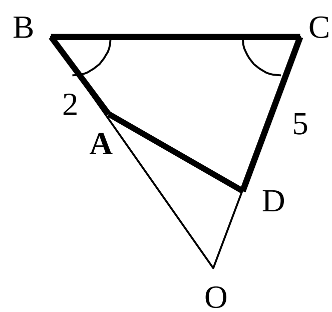


91.zīm.

Pagarinām malas AB un CD līdz to krustpunktam O. Tā kā ∠B=∠C, tad vienādi ir arī to blakusleņķi ∠OBC=∠OCB. Tad ΔBOC ir vienādsānu, proti, BO=OC. Apskatām ΔAOD. Saskaņā ar trijstūra vienādību

$$AD>OD-OA \text{ jeb}$$
$$AD>(OC+CD)-(OB+AB)$$
$$AD>OC+5-OC-2$$
$$AD>3, \text{ kas arī bija jāpierāda.}$$

2) AB nav paralēls ar CD, bet ∠B un ∠C ir šauri leņķi (sk.92.zīm.).

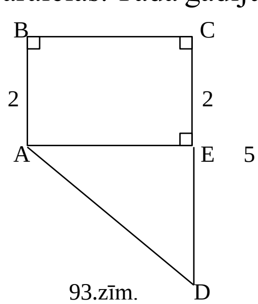


92.zīm.

Pagarinām malas AB un CD līdz to krustpunktam O. Tā kā ∠B=∠C, tad vienādi tad ΔOBC ir vienādsānu trijstūris un OB=OC. Izmantojot trijstūra nevienādību trijstūrim AOD, iegūstam:

$$AD>AO-DO$$
$$AD>(OB-AB)-(OC-CD)$$
$$AD>OB-2-OC+5$$
$$AD>3, \text{ kas arī bija jāpierāda.}$$

3) Malas AB un CD ir paralēlas. Tādā gadījumā $\angle B=\angle C=90^o$ (sk.93.zīm.)



93.zīm.

Novelkam $AE \perp CD$. Tad $CE=AB=2$ cm. Tad $ED=5-2=3$(cm). AD ir taisnleņķa trijstūra AED hipotenūza, tātad noteikti garāka par katru no katetēm. Tātad $AD>ED=3$.

41.

<u>Atbilde</u> Mazākā iespējamā vērtība ir 12. Lielākā iespējamā vērtība ir 18.

<u>Risinājums</u> Apzīmēsim tabulas rūtiņas ar burtiem tā, kā tas parādīts 94.zīm.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

94.zīm.

Meklēsim mazāko iespējamo summas $S=d+e+f$ vērtību. Skaidrs, ka summa S būs mazākā iespējamā, ja katrs no tās saskaitāmajiem būs mazākais iespējamais. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $d>a$, tad mazākā iespējamā d vērtība ir 2. Tātad $d \geq 2$. Novērtēsim e. Tā kā $e>b$ un $e>d>a$, tad ir vismaz 3 skaitļi, kas mazāki par e. Tādā gadījumā $e \geq 4$. Līdzīgi novērtēsim f: $f>c>b>a$ un $f>e>d>a$. Tātad ir vismaz 5 skaitļi, kas mazāki par f. Tad $f \cdot \geq 6$. Līdz ar to $S \geq 2+4+6=12$. 95.zīm. parādīts, kā šādu summu $S=12$ var iegūt.

1	3	5
2	4	6
7	8	9

95.zīm.

Līdzīgi meklēsim lielāko iespējamo summas S vērtību. Skaidrs, ka S būs lielākā iespējamā, ja katrs no tās saskaitāmajiem būs lielākais iespējamais.

Novērtēsim f. Tā kā $f<i$, tad $f \leq 8$. Novērtēsim e: $e<f$ un $e<h<i$. Tātad ir vismaz 3 skaitļi, kas lielāki par e. Tātad $e \leq 6$. Novērtēsim d: $d<e<f<i$ un $d<g<h<i$. Tātad vismaz 5 skaitļi ir lielāki par d. Tātad $d \leq 4$. Līdz ar to $S \leq 4+6+8=18$. 96.zīm. parādīts, ka šāda summa S tiešām ir iespējama.

1	3	5
4	6	8
5	7	9

96.zīm.

42.

<u>Atbilde</u> Jā, var.

<u>Risinājums</u> Vispirms parādīsim, ka trīs pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa noteikti dalās ar 3. Aplūkosim trīs pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus: n, $n+1$, $n+2$. Aplūkosim to summu: $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$. Viegli saprast, ka šī summa dalās ar 3.

Visus skaitļus no 1 līdz 1992 varam sadalīt šādos trijniekos, jo 1992 dalās ar 3: $(1+2+3)+(4+5+6)+\ldots+(1990+1991+1992)$. Šī summa dalās ar 3, jo katrs tās saskaitāmais (par saskaitāmo nosauksim vienās iekavās ierakstīto summu) dalās ar 3.

Bez tam 1993+1994=3987. Skaitlis 3987 dalās ar 3 (3+9+8+7=27). Tātad visu skaitļu no 1 līdz 1994 summa dalās ar 3.

43.

Atbilde 50 dažādus trijstūrus.

Risinājums Aplūkosim iespējamo trijstūru īsākās malas. Tā kā visi 10 stienīši ir dažāda garuma, tad nevar izveidot trijstūrus, kuru īsākā mala ir 1 cm, 9 cm un 10 cm garas. Pirmajā gadījumā neizpildās prasība ka trijstūra malas garumam jābūt lielākam par divu pārējo malu garumu starpību, bet abos pārējos gadījumos nav divu lielāka garuma stienīšu.

Veidojot trijstūrus, ievērosim trijstūra nevienādību: ja trijstūra malu garumi ir a, b, c, tad $a>|b-c|$.

Ja trijstūra īsākā mala ir 2 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 3 un 4; 4 un 5; 5 un 6; 6 un 7; 7 un 8; 8 un 9; 9 un 10.

Tātad iespējami 7 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 3 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 4 un 5; 4 un 6; 5 un 6; 5 un 7; 6 un 7; 6 un 8; 7 un 8; 7 un 9; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

Tātad iespējami 11 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 4 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 5 un 6; 5 un 7; 5 un 8; 6 un 7; 6 un 8; 6 un 9; 7 un 8; 7 un 9; 7 un 10; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

Tātad iespējami 12 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 5 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 6 un 7; 6 un 8; 6 un 9; 6 un 10; 7 un 8; 7 un 9; 7 un 10; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

Tātad iespējami 10 dažādi trijstūri.

Ja trijstūra īsākā mala ir 6 cm, tad abu pārējo malu garumi var būt 7 un 8; 7 un 9; 7 un 10; 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

Tātad iespējami 6 dažādi trijstūri.

Ja īsākā mala ir 7 cm, tad iespējami 3 dažādi trijstūri ar abu pārējo malu garumiem: 8 un 9; 8 un 10; 9 un 10.

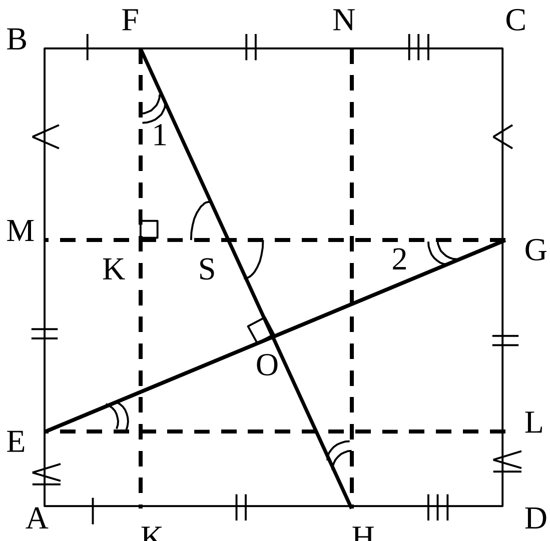
Ja īsākā mala ir 7 cm, tad iespējams 1 trijstūris ar abu pārējo malu garumiem 9 un 10.

Tātad pavisam iespējams izveidot

7+11+12+10+6+3+1=50 dažādus trijstūrus.

44.

Risinājums Novilksim caur punktiem E, F, G un H taisnes paralēli kvadrāta malām (sk 97.zīm.)



97.zīm.

ΔFNH un ΔGME ir vienādi taisnleņķa trijstūri, jo FK=GM un ∠1=∠2 (tas izriet no ΔFKS un ΔSOG leņķu vienādības (sk.97.zīm.). Tad KH=FN=ME=GL=a. Bez tam ievērosim, ka, saskaņā ar mūsu konstrukciju, BF=AK=b, NC=HD=d, BM=CG=c, AE=LD=e. Tad

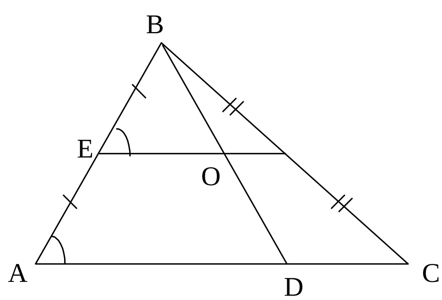
$$\begin{gathered}Per(EBFO)+Per(HDGO)= \\ =EB+BF+FO+EO+OH+OG+GD+DH= \\ =a+c+b+\underline{FO}+\underline{\underline{EO}}+\underline{OH}+\underline{\underline{OG}}+a+e+d= \\ =FH+EG+2a+c+b+e+d \\ Per(FCGO)+Per(AEOH)= \\ =FC+CG+GO+FO+EO+OH+AE+AH= \\ =a+d+c+\underline{FO}+\underline{\underline{EO}}+\underline{OH}+\underline{\underline{OG}}+e+b+a= \\ =FH+EG+2a+d+b+c+e.\end{gathered}$$

Abas šīs summas ir vienādas.

45.

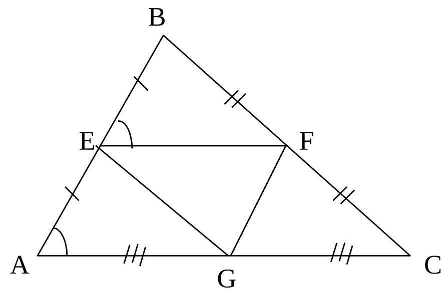
Atbilde Nē, tas nav iespējams.

Risinājums Vispirms pamatosim, ka minētā nogriežņa viduspunkts atrodas uz trijstūra viduslīnijas.



98.zīm.

Aplūkosim ΔANC un no virsotnes B novilksim patvaļīgu nogriezni BD, kur D ir malas AC punkts un EF ir ΔABC viduslīnija. ΔEBO ~ ΔABD, jo ∠B abiem trijstūriem ir kopīgs, bet ∠BEO=∠BAD, jo EF||AC kā trijstūra viduslīnija un ∠BEO un ∠BAD ir kāpšļa leņķi pie paralēlām taisnēm. Tā kā EB:AB=1:2, tad arī BO:BD=1:2. Tātad O ir BD viduspunkts. Tātad esam pamatojuši, ka uzdevumā novilkto nogriežņu viduspunkti atrodas pa vienam uz visām trim trijstūra viduslīnijām.



99.zīm.

Aplūkosim viduslīniju veidoto trijstūri EFG. No virsotnēm vilkto nogriežņu viduspunkti atrodas uz šī trijstūra malām. Taču neviena taisne nevar krustot reizē visas trīs trijstūra malas to iekšējos punktos. Tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

46.

Risinājums Aplūkosim saliktu skaitli n, n>6. Pieņemsim, ka viens no n pirmreizinātājiem ir skaitlis p. Tad skaitli n var izteikt kā $n=p\cdot k$, $k\geq 2$. Skaitlim 6 ir dalītājs 2. Tāpēc mēs drīkstam pieskaitīt 2. Rezultātā no 6 mēs varam iegūt jebkuru pāra skaitli, pieskaitot 2. Tātad mēs varam iegūt arī skaitli 2p. Skaitļa 2p dalītājs ir skaitlis p. Tātad mēs drīkstam to pieskaitīt, iegūstot skaitli 3p, kas arī dalās ar p. Turpinām p pieskaitīt tik ilgi, līdz iegūstam skaitli $k\cdot p=n$. Tātad no skaitļa 6 var iegūt skaitli n, veicot atļautās darbības.

47.

Atbilde Mazākā iespējamā vērtība ir 112. Lielākā iespējamā vērtība ir 238.

Risinājums Spriedīsim līdzīgi 101.uzdevuma risinājumam. Apzīmēsim tabulas rūtiņas ar burtiem tā, kā tas parādīts 100.zīm.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7

100.zīm.

Tātad mūs interesē summas $S=d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6+d_7$ lielākā un mazākā iespējamā vērtība. Skaidrs, ka mazākā lielākā vērtība tiks sasniegta, ja katrs no saskaitāmajiem būs mazākais (lielākais) iespējamais. Tāpēc novērtēsim katru no saskaitāmajiem.

1) $d_1>c_1>b_1>a_1$. Tātad $d_1\geq 4$

$d_1<d_i$, $i\geq 2$

$d_1<e_i$, $d_1<f_i$, $d_1<g_i$, kur $i\geq 1$

Tātad ir vismaz 27 skaitļi, kas lielāki par d_1; tāpēc $d_1 \leq 22$.

Līdz ar to $4 \leq d_1 \leq 22$.

2) $d_2 > d_1$. Tātad $d_2 \geq 8$, jo vismaz 7 skaitļi ir mazāki par d_2.

$d_2 > c_2 > c_1$

$d_2 > b_2 > b_1$

$d_2 > a_2 > a_1$

$d_2 < d_i$, kur $i \geq 3$

$d_2 < e_i$, $d_2 < f_i$, $d_2 < g_i$, kur $i \geq 2$. Tātad ir vismaz 23 skaitļi, kas lielāki par d_2; tāpēc $d_2 \leq 26$.

Līdz ar to $8 \leq d_2 \leq 26$.

3) Līdzīgi spriežot, iegūstam:

$12 \leq d_3 \leq 30$

$16 \leq d_4 \leq 34$

$20 \leq d_5 \leq 38$

$24 \leq d_6 \leq 42$

$28 \leq d_7 \leq 46$

Līdz ar to $112 \leq S \leq 238$.

101.zīm. un 102.zīm. parādīts, ka šādas vērtības tiešām iespējams iegūt.

1	5	9	13	17	21	25
2	6	10	14	18	22	26
3	7	11	15	19	23	27
4	8	12	16	20	24	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

101.zīm.

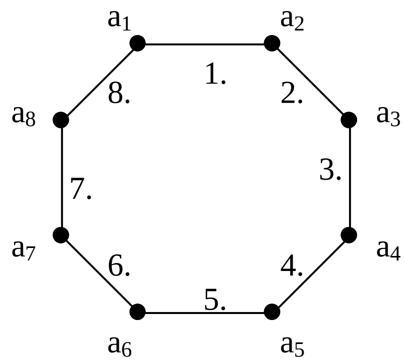
1	4	7	10	13	16	19
2	5	8	11	14	17	20
3	6	9	12	15	18	21
22	26	30	34	38	42	46
23	27	31	35	39	43	47
24	28	32	36	40	44	48
25	29	33	37	41	45	49

102.zīm.

48.

Atbilde Jā, var.

Risinājums Apzīmēsim astoņstūra virsotnēs ierakstītos skaitļus ar a_i, $1 \leq i \leq 8$, bet malas sanumurēsim ar skaitļiem no 1 līdz 8 (sk.103.zīm.).



103.zīm.

Pēc skaitļu nodzēšanas uz pirmās malas uzrakstīts skaitlis a_1+a_2, uz otrās - a_2+a_3, uz trešās - a_3+a_4, …, uz astotās - a_8+a_1.
Aplūkosim uz 1., 3., 5. un 7. malas uzrakstīto skaitļu summu S_1; redzam, ka
$S_1=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+ (a_5+a_6) +(a_7+a_8)$.
Aplūkosim uz 2., 4., 6. un 8. malas uzrakstīto skaitļu summu S_2; redzam, ka
$S_2=(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+ (a_6+a_7) +(a_8+a_1)$. Viegli redzēt, ka $S_1=S_2$. Nodzēšot vienu no skaitļiem "uz malas", viena no summām S_1 un S_2 paliek "neizbojāta". Tad, atņemot no šīs summas otru, iegūsim nodzēsto skaitli.

49.

Atbilde Maija nodejoja 7 dejas.
Risinājums Tā kā katrā dejā katrā pārī dejo divi - meitene un zēns, tad visu meiteņu nodejoto deju kopskaitam jāsakrīt ar visu zēnu nodejoto deju kopskaitu. Tā kā visi zēni kopā nodejojuši 7+8+8+6=29 dejas, tad arī visas meitenes kopā nodejojušas 29 dejas. Tad Maijas nodejoto deju skaits ir 29-(5+7+10)=29-22=7.

50.

Atbilde Der skaitļu pāri (1;1), (5;5), (1;2), (1;3), (1;6), (2;7), (3;4), (5;10), (10;15), kā arī tiem "simetriskie" pāri (2;1), (3;1) utt.
Risinājums Aplūkosim gadījumu, kad m=n. Tā kā m+5 jādalās ar n un n=m, tad m+5 jādalās arī ar m. Tā kā summai (m+5) jādalās ar m un viens no tās saskaitāmajiem dalās ar m, tad arī otram saskaitāmajam jādalās ar m. Tātad 5 dalās ar m. Esam ieguvuši, ka m ir skaitļa 5 dalītājs. Tātad m=1 vai m=5.
Ja m=1, tad n=1. Pārbaudīsim, vai šīs vērtības apmierina uzdevuma nosacījumus:
m+5=1+5=6 un 6 dalās ar 1. Ja m=5, tad n=5, m+5=10 un 10 dalās ar 5. Esam ieguvusi divus skaitļu pārus: (1;1) un (5;5). Aplūkosim gadījumu, kad $m\neq n$. Pieņemsim, ka $m<n$. Vispirms pamatosim, ka m un n nevar atšķirties viens no otra vairāk kā par 5. Pieņemsim pretējo: n=m+i, kur $i\geq 6$, $i\in N$. Pēc dotā m+5 dalās ar n, tātad m+5 jādalās ar m+i. Tā kā $i\geq 6$, tad $m+5<m+i$. Šādā gadījumā dalīšana naturālos skaitļos nav iespējama. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams, un m un n atšķiras viens no otra ne vairāk kā par 5. Tad iegūstam, ka

$$n=m+1;$$
$$n=m+2;$$
$$n=m+3;$$
$$n=m+4;$$

n=m+5.

Ja n=m+1, tad n+5=m+1+5=m+6, un m+6 jādalās ar m, tātad m ir skaitļa 6 dalītājs, proti, iespējamās m vērtības ir 1; 2; 3 un 6.

Ja m=1, tad n=2.

Pārbaudām: m+5=1+5=6 un 6 dalās ar n=2.
n+5=2+5=7 un 7 dalās ar m=1.
Tātad skaitļu pāris (1;2) der par atrisinājumu.

Ja m=2, tad n=2+1=3.

Pārbaudām: m+5=2+5=7, bet 7 nedalās ar n=3.
Tātad pāris (2;3) neder par atrisinājumu.

Ja m=3, tad n=3+1=4.

Pārbaudām: m+5=3+5=8 un 8 dalās ar n=4.
n+5=4+5=9 un 9 dalās ar m=3.
Tātad skaitļu pāris (3;4) der par atrisinājumu.

Ja m=6, tad n=7.

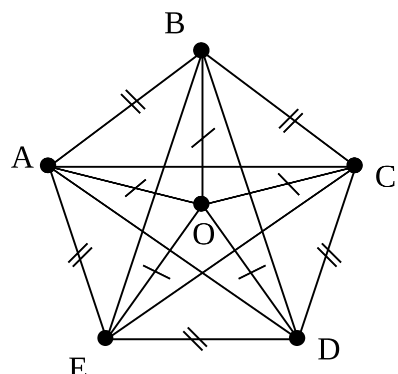
Pārbaudām: m+5=6+5=11, bet 11 nedalās ar n=7.
Tātad pāris (6;7) neder par atrisinājumu.

Līdzīgi aplūko pārējās iespējas, kad n=m+2; n=m+3; n=m+4 un n=m+5, un, veicot pārbaudi, iegūst pārējos atrisinājumus (1;3), (1;6), (2;7), (5;10) un (10;15).

Tā kā var būt arī m>n un šajā gadījumā visi spriedumi būs līdzīgi jau izdarītajiem, tikai m un n mainīsies vietām, tad der arī jau atrastajiem pāriem "simetriskie" pāri (2;1), (4;3), (3;1) utt.

51.

Atbilde Jā, var (sk. 104.zīm.)



104.zīm.

Risinājums Aplūkosim regulāru piecstūri. Tā virsotnes būs 5 no atzīmētajiem punktiem, bet centrs - sestais atzīmētais punkts. Tad AB=BC=CD=DE=AE kā regulāra piecstūra malas. Arī AO=BO=CO=DO=EO, jo centrs atrodas vienādā attālumā no virsotnēm. Pamatosim, ka visi trijstūri, kuru virsotnes atrodas šajos punktos, tiešām ir vienādsānu. Aplūkosim visus trijstūrus, kuru viena virsotne atrodas punktā A. (Tā kā piecstūris ir regulārs, tad visu pārējo trijstūru aplūkošanu varēs veikt analogi). Šādu trijstūru ir 10:

1) ΔABC, ΔABE, ΔADE.
2) ΔABO, ΔACO, ΔADO, ΔAEO.

3) ΔABD, ΔACE, ΔACD.

1) grupas trijstūri ir vienādsānu, jo katrs kā savas malas satur 2 regulārā piecstūra mals.

2) grupas trijstūri ir vienādsānu, jo katrs kā savas malas satur 2 nogriežņus, kas savieno piecstūra virsotnes ar centru.

3) grupas trijstūri ir vienādsānu, jo katrs kā savas malas satur 2 piecstūra diagonāles, bet regulāram piecstūrim visas diagonāles ir vienāda garuma.

52.

Atbilde Piemēram, 147; 258; 369. Summa ir 774.

Risinājums Ja kaut viens no izveidotajiem skaitļiem būs vismaz četrciparu skaitlis, tad arī summa būs vismaz četrciparu skaitlis. Ja kāds no skaitļiem būs divciparu skaitlis, tad noteikti kādam no pārējiem skaitļiem būs jābūt vismaz četrciparu skaitlim. Katrs četrciparu skaitlis ir lielāks par jebkuru trīsciparu skaitli, tāpēc izveidosim tādus trīs trīsciparu skaitļus, lai summa arī būtu trīsciparu skaitlis. Lai summa būtu iespējami mazāka, simtu cipari jāņem iespējami mazākie - 1; 2 un 3. Par desmitu cipariem jāizvēlas 4; 5 un 6, bet par vienu cipariem - 7, 8 vai 9. Apzīmēsim izveidotos trīs skaitļus ar $\overline{a_1b_1c_1}$, $\overline{a_2b_2c_2}$, $\overline{a_3b_3c_3}$ un aplūkosim to summu:

$$\overline{a_1b_1c_1}+\overline{a_2b_2c_2}+\overline{a_3b_3c_3}=100a_1+10b_1+c_1+100a_2+10b_2+c_2+100a_3+10b_3+c_3.$$

Sagrupējot saskaitāmos, iegūsim:

$$100(a_1+a_2+a_3)+10(b_1+b_2+b_3)+(c_1+c_2+c_3).$$

Atcerēsimies, ka a_i vērtības ir 1, 2, 3, un neatkarīgi no tā, kuram skaitlim būs kurš simtu cipars, summa nemainīsies, proti, $a_1+a_2+a_3=6$. Līdzīgi $b_1+b_2+b_3=15$ un $c_1+c_2+c_3=24$. Tad $100\cdot6+10\cdot15+24=774$.

Kā redzam, tad izveidoto triju skaitļu summa nav atkarīga no tā, kādas izvēlamies burtu vērtības vienas šķiras ievaros. Pavisam iespējami 36 dažādi skaitļu trijnieki ar vienu un to pašu minimālo summu 774.

53.

Risinājums Piedāvāsim vienu no iespējamajām svēršanas shēmām.

I svēršana: nosveram 4 monētas reizē. Ir trīs iespējas svaru rādījumam - 40g, 41g, 42g. analizēsim katru no šīm situācijām atsevišķi..

1) **40 grami.** Tātad starp nosvērtajām monētām smago monētu nav. Tās abas ir starp nesvērtajām monētām. Tad **II svēršanā** sveram patvaļīgas 2 monētas no piecām nesvērtajām; sauksim tās par A un B, bet trīs atlikušās par C, D, E. Atkal iespējami 3 varianti:

20 grami (A,B)

Tad abas smagās ir starp trīs nesvērtajām monētām C, D, E. Lai atrastu smagās, **III, IV, V svēršanā** C, D, E var svērt pa vienai un noteikt katras monētas masu, tādējādi atrodot smagās.

21 grams (A,B)

Tad viena ir uz šī svaru kausa, otra starp C, D, E.
III svēršanā sveram A; tādējādi mēs noskaidrojam vienu smago monētu, jo tā ir vai nu a, vai B.
IV svēršanā sveram C.
V svēršanā sveram D. Ja ne C, ne D nav smagās, tad smagā ir E. Līdz ar to abas smagās ir atrastas.

22 grami (A,B)

Šajā gadījumā šīs monētas arī ir abas smagās, ko vajadzēja atrast.

2) **41 grams.** Tātad starp nosvērtajām monētām ir viena smagā, bet otra ir starp nesvērtajām monētām. Pirmās grupas monētas nosauksim par A, B, C, D, bet otrās grupas - par E, F, G, H, I. Atcerēsimies, ka katrā no šīm grupām ir pa vienai smagajai monētai.

II svēršanā sveram A, B, C un E, F, G. Iespējami trīs svaru rādījumi - 60g, 61g un 62g. Analizēsim katru gadījumu atsevišķi:

60 grami

Tātad smago monētu starp A, B, C, E, F, G nav. Tātad smagā ir D, jo starp A, B, C, D viena ir smagā. Otra smagā ir starp H un I. To var noskaidrot **III svēršanā.**

61 grams (A,B)

Tātad viena smagā monēta ir starp A, B, C, E, F, G,* bet otra - starp nesvērtajām D, H, I. (   ) Pie tam ievērosim, ka viena ** smagā monēta ir starp A, B, C, D (* *), bet otra starp E, F, G, H, I (   ).
III svēršanā sveram A, B, C un H. Ir iespējami trīs rezultāti:

62 grami (A,B)

Abas smagās monētas ir starp ABC un EFG, pa vienai katrā grupā.
III svēršanā sveram A,B un E,F. Ir trīs varianti:

40 grami

Tad A, B, C, H ir vieglās monētas, un * * smagās ir D (ievērojot (* *   )) un viena no D, I (ievērojot (   ). To var noskaidrot **IV svēršanā**. Būs atrastas abas smagās monētas.

41 grams**

Tad, ievērojot (   ), starp ABCD ir viena smagā un pēc šī svaru rādījuma starp ABCH ir viena smagā *monēta. Tātad monētas D un H ir vienāda svara. Ievērojot (   ), tās abas nevar būt smagās. Tātad smagā monēta ir I. Tātad otra smagā monēta ir starp A, B, C. To var noskaidrot **IV un V svēršanā**. Līdz ar to abas smagās monētas būs atrastas.

42 grami

Tad starp A, B, C, H ir 2 smagās monētas. Tā kā starp A, B, C, D (   ) ir viena smagā monēta, tad starp a, b, c nevar būt 2 smagās monētas. Tātad viena smagā monēta ir H, bet otra - starp a, b, c. To var noskaidrot ar **IV un V svēršanu.**

40 grami

Tātad starp šīm monētām nav smago. Abas smagās ir nesvērtās C un G.

41 grams

Tātad viena smagā monēta ir starp A, B, E, F, bet otra starp CG. **IV svēršanā** sveram vienu no CG. Ja smagā ir C, tad **V svēršanā** sveram vienu no E, F (jo starp ABC ir viena smagā). Ja smagā ir G, tad V svēršanā sveram vienu no A, B. Līdz ar to abas smagās monētas būs atrastas.

42 grami

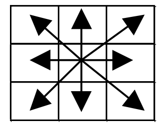
Abas smagās ir starp A, B, E, F, viena starp A, B, otra - starp E, F. To var noskaidrot **IV** un **V svēršanā**, sverot pa vienai monētai no katras grupas.

3) **42 grami**. Tātad abas smagās monētas ir starp šīm četrām. Līdz ar to atlikušajās četrās svēršanās var svērt pa vienai, tādējādi noskaidrojot divas smagās monētas.

54.

<u>Atbilde</u> Nē, nevar.

<u>Risinājums</u> Ievērosim, ka, lai "pa īsāko ceļu" nokļūtu no vienas tabulas rūtiņas kādā citā tabulas rūtiņā, jāšķērso ne vairāk kā divas citas tabulas rūtiņas (ar vienu gājienu atļauts šķērsot divu rūtiņu kopējo malu vai kopējo stūri, sk.105.zīm.)

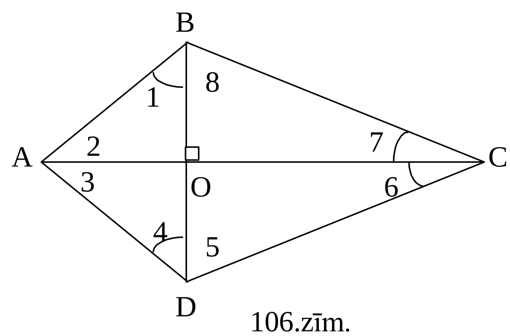


105.zīm.

Atradīsim tabulā ierakstīto pašu mazāko un pašu lielāko skaitli. Aplūkosim īsāko ceļu starp šīm divām rūtiņām. Pēc iepriekš teiktā mēs savā ceļā šķērsosim ne vairāk kā divas citas rūtiņas. Ja mazākais skaitlis ir a, tad nākamajā rūtiņā (ceļā uz lielākā skaitļa rūtiņu) ierakstītais skaitlis nepārsniedz a+2, nākamajā - a+4, bet lielākais tabulas skaitlis nepārsniedz a+6. Ja tabulas mazākais skaitlis ir a, bet lielākais a+6, tad tabulā ierakstītie skaitļi var pieņemt tikai 7 dažādas vērtības, proti, a; a+1; a+2; a+3; a+4; a+5; a+6. Uzdevuma prasība tātad nav izpildāma.

55.

Atbilde 4 leņķi var būt vienādi (sk. 106.zīm.)



106.zīm.

Risinājums Pamatosim, kāpēc nevar būt vairāk kā 4 vienādi leņķi. Apvienosim dotos leņķus pāros - $\angle 1$ un $\angle 5$; $\angle 2$ un $\angle 6$; $\angle 3$ un $\angle 7$; $\angle 4$ un $\angle 8$. Katrā pārī esošie leņķi ir iekšējie šķērsleņķi. Ja kādā pārī abi leņķi būtu vienādi, tad attiecīgās malas būtu paralēlas (piemēram, ja $\angle 8=\angle 4$, tad AD||BC) un dotajam četrstūrim būtu paralēlas malas. Tātad katrā no šiem pāriem var būt ne vairāk kā viens no savstarpēji vienādajiem leņķiem.

56.

Atbilde a) Piemēram, skaitlis 133. Tiešām, 133: $(1^2+3^2+3^2)$=133:19=7.

b) Šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

Risinājums Pieņemsim, ka A ir n-ciparu skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, t.i., tas nesatur ciparu 0, tā visi cipari nav vienādi un tas dalās ar savu ciparu kvadrātu summu.

Pierādīsim, ka skaitlis B, kuru iegūst, 3 reizes pēc kārtas uzrakstot skaitli A, arī apmierina uzdevuma nosacījumus.

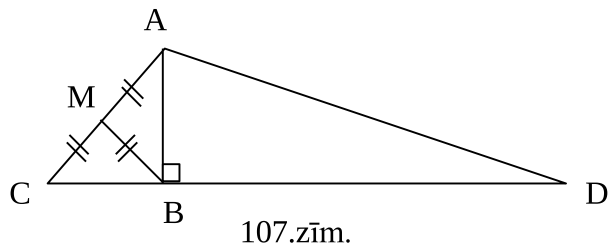
a) tā kā A visi cipari nav vienādi, tad arī visi B cipari nav vienādi,
b) tā kā A nesatur nulli, tad arī B nesatur nulli,
c) acīmredzot B var uzrakstīt kā $A\cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{2n\text{ nulles}}+A\cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{n\text{ nulles}}+A=A\cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\text{n-1}}1\underbrace{000\ldots0}_{n-1}1.$ Apzīmēsim A ciparu kvadrātu summu ar K; tad A dalās ar K. Skaitļa B ciparu kvadrātu

summa ir 3K; jāpierāda, ka B dalās ar 3K. Bet tas ir acīmredzams, jo B=A·10…010…01, A dalās ar K un 10…010…01 dalās ar 3 (tā ciparu summa dalās ar 3).

Tātad B apmierina visas uzdevuma prasības. Tādējādi no skaitļa 133 varam iegūt 133133133, no tā savukārt 133133133133133133133133133, utt. Tie visi apmierina uzdevuma prasības.

57.

<u>Risinājums</u> Katru daudzstūri, griežot pa diagonālēm, ir iespējams sagriezt trijstūros. Katru trijstūri, novelkot augstumu, var sagriezt 2 taisnleņķa trijstūros (sk. 107.zīm.).



107.zīm.

Aplūkosim taisnleņķa trijstūri ABC. Taisnleņķa trijstūrī hipotenūzas viduspunkts M ir arī apvilktās riņķa līnijas centrs. Tātad AM=BM=CM, no kurienes seko, ka ΔABM un ΔBCM ir vienādsānu. Tāpat rīkojamies arī ar taisnleņķa trijstūri ABD.
Esam aprakstījuši metodi, kā katru daudzstūri iespējams sagriezt vienādsānu trijstūros.

58.

<u>Atbilde</u> $147\cdot258\cdot369=1394694$. ($*$)

<u>Risinājums</u> Lasītājs pats var pārbaudīt atbildē norādītās skaitliskās vienādības pareizību. Lai pamatotu, ka tur redzamais reizinājums ir mazākais iespējamais, pietiek pamatot, ka citos gadījumos reizinājums iznāk lielāks par 13994694.

Pieņemsim pretējo: ir iespējams iegūt mazāku reizinājumu par ($*$).

Vispirms noskaidrosim, kādi var būt reizinātāju pirmie cipari. Ja tie visi lielāki par 1, tad reizinājums ir lielāks par $200\cdot300\cdot400=24000000>13994694$. Tātad vienam reizinātājam jāsākas ar 1. Spriežot līdzīgi, konstatējam, ka abu pārējo reizinātāju pirmie cipari varētu būt vienīgi (2;3), (l;4), (2;5), (2;6), (3;4) ($**$)

Tagad pierādīsim vairākus apgalvojumus par ciparu kārtību minimālā reizinājuma reizinātājos.

Skaidrs: ja kādā reizinātājā desmitu cipars ir lielāks par vienu ciparu, tad, samainot šos ciparus vietām, reizinātāja un tātad arī reizinājuma vērtība samazināsies. Tāpēc turpmāk aplūkosim tikai tādus gadījumus, kur visos trijos reizinātājos cipari ir augošā kārtībā.

Tālākajam būs svarīga vienādība

$$xy=\frac{1}{4}\left((x+y)^2-(x-y)^2\right),$$

par kuras pareizību lasītājs var patstāvīgi pārliecināties, atverot iekavas. No tās acīmredzami seko: ja divu skaitļu summa ir konstants lielums, tad to reizinājums ir jo mazāks, jo vairāk šie skaitļi atšķiras viens no otra.

Apzīmēsim divus no mūsu trīsciparu reizinātājiem ar x un y, turklāt pieņemsim, ka $x<y$. Ja mēs savā starpā mainītu x un y vienu ciparus, tad x un y summa nemainītos; bet x un y viens no otra vairāk atšķirtos tajā gadījumā, ja x vienu cipars būtu mazāks par y

vienu ciparu, nevis otrādi. Tas nozīmē, ka, meklējot minimālo reizinājuma vērtību, vērts apskatīt tikai tādus gadījumus, kur skaitlim ar mazāku simtu ciparu ir arī mazāks vienu cipars. Gluži analoģiski iegūstam, ka minimālā reizinājuma gadījumā skaitlim ar mazāku simtu ciparu ir arī mazāks desmitu cipars.
Aplūkosim tagad gadījumu, kad reizinātāju pirmie cipari ir 1; 2; 3. Ierakstīsim reizinātāju ciparus pa rindiņām tabulā ar izmēriem 3x3, pie tam simtu ciparus rakstīsim pirmajā kolonnā no augšas uz leju. Tad saskaņā ar iepriekšējiem spriedumiem katrā rindiņā cipariem jāpieaug no kreisās uz labo pusi, bet katrā kolonnā - no augšas uz leju (sk. 108.zīm. a) gad.)

a)

1	A	
2		
3		B

b)

1	4	
2		8
3		9

c)

1	4	
2		
3	8	9

108.zīm.

Pats mazākais no atlikušajiem cipariem 4 nevar būt nekur citur kā rūtiņā a (citādi pa kreisi vai uz augšu no tā atrastos kāds par to lielāks cipars); līdzīgi pats lielākais no atlikušajiem cipariem 9 nevar atrasties nekur citur kā rūtiņā B. Savukārt no cipara 8 pa labi vai uz leju var atrasties tikai 9; tāpēc 8 var novietoties tikai tā, kā tas parādīts 108.zīm. b) vai c) gadījumā.
Tagad, ņemot vērā pieaugšanas nosacījumu rindās un kolonnās, viegli konstatēt, ka pārējie cipari 5; 6; 7 var tikt ierakstīti tikai 5 dažādos veidos; tie visi parādīti 109.zīm. un tiem blakus uzrakstīts atbilstošais reizinājums.

1	4	5
2	6	8
3	7	9

$145 \cdot 268 \cdot 379 = 14727940$

1	4	7
2	5	8
3	6	9

$147 \cdot 258 \cdot 369 = 13994694$

1	4	6
2	5	8
3	7	9

$146 \cdot 258 \cdot 379 = 14276172$

1	4	5
2	6	7
3	8	9

$145 \cdot 267 \cdot 389 = 15060135$

1	4	6
2	5	7
3	8	9

$146 \cdot 257 \cdot 389 = 14596058$

109.zīm.

Redzams, ka reizinājums $147 \cdot 258 \cdot 369$ mūsu apskatāmajā gadījumā ir vismazākais.
Līdzīgā ceļā lasītājs var aplūkot arī citus iespējamos gadījumus saskaņā ar $(**)$ un pārliecināties, ka mazāku reizinājumu kā $(*)$ iegūt neizdodas. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un $(*)$ ir mazākais iespējamais reizinājums.

59.

Risinājums Centīsimies izvietot firmas darbiniekus aplī pēc tāda principa. Darbiniekam A_1 vienā pusē novietosim tā draugu A_2, bet otrā pusē tā ienaidnieku A_3. Tā kā A_2 vienīgais draugs ir A_1, tad A_2 blakus otrā pusē novietosim viņa ienaidnieku. Tas būs kāds A_4, jo A_3 ir ienaidnieks A_1. Savukārt A_3 blakus novietosim viņa draugu

A_5, utt. Ja kāds aplis noslēdzas, tad sāksim veidot jaunu apli. Tātad katram darbiniekam šajos apļos vienā pusē stāvēs draugs, bet otrā - ienaidnieks. Pierādīsim, ka katrā aplī noteikti stāv pāra skaits darbinieku. Liksim draugiem sadoties rokās. Tā kā katram blakus stāv tikai viens draugs, tad katrā aplī situācija būs šāda: sadotas rokas, nesadotas, sadotas, nesadotas,…. Tātad cilvēki būs sadalījušies pāros, tātad viņi ir pāra skaitā. Visus katra apļa pāra vietās stāvošos nosūtīsim uz vienu filiāli, bet nepāra vietās stāvošos - uz otru. Uzdevuma prasības būs izpildītas, jo jebkuram darbiniekam X, kas stāv pāra vietā, vienīgie, ar kuriem viņš nedrīkst nonākt vienā filiālē, ir viņa kaimiņi, bet viņi stāv nepāra vietās un tāpēc nevar nonākt vienā filiālē ar X.

60.

Atbilde Jā, var. Sk. 110.zīm.

4	5	6	7
3	4	5	6
2	3	4	5
1	2	3	4

110.zīm.

61.

Risinājums Katrs trešais naturālais skaitlis dalās ar 3 . Tātad vismaz viens no dotajiem skaitļiem a, b, c, d dalās ar 3. Tā kā katrs otrais naturālais skaitlis ir pāra skaitlis, tad tieši divi no dotajiem skaitļiem ir pāra skaitļi - vai nu a un c, vai b un d dalās ar 2. Tātad reizinājums $a\cdot b\cdot c\cdot d$ dalās ar $3\cdot 2\cdot 2=12$.

62.

Risinājums Apzīmēsim dotos skaitļus ar n, n+1, n+2, n+3. Aplūkosim šo skaitļu reizinājumu $A=n\cdot(n+1)(n+2)(n+3)$. Izdarīsim vairākus pārveidojumus.

$$A=(n^2+n)(n^2+5n+6)=$$
$$n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n=$$
$$=(n^2)^2+6n^3+11n^2+6n=$$
$$=(n^2)^2+(9n^2+2n^2)+2(n^2\cdot 3n)+2\cdot(1\cdot 3n)=$$
$$=(n^2)^2+(3n)^2+1^2+2\cdot(n^2\cdot 1)+2\cdot(n^2\cdot 3n)+2\cdot(1\cdot 3n)-1=$$
$$=(n^2+3n+1)^2-1$$

[Pārveidojumi tika veikti ar mērķi izmantot formulu
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$].

$$\text{Tātad } A=(n^2+3n+1)^2-1, \text{ jeb}$$
$$A+1=(n^2+3n+1)^2$$

Vienādības labā puse ir naturāla skaitļa kvadrāts. Tātad arī A+1 ir naturāla skaitļa kvadrāts. Ja arī A+5 (kā tas prasīts uzdevumā) ir naturāla skaitļa kvadrāts, tad mums ir divi naturālu skaitļu kvadrāti, kas atšķiras viens no otra par 4. Bet kvadrātu virknē 1; 4; 9; 16; 25; 36; … nav divu skaitļu, kas atšķirtos viens no otra par 4. Tātad, četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājumam pieskaitot 5, nevar iegūt naturāla skaitļa kvadrātu.

63.

Atbilde 16 filmas.

Risinājums No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka neviens no draugiem divas dienas pēc kārtas nepaliek mājās. Piemēram, ja A un B iet uz kino, bet C paliek mājās, tad nākamajā vakarā vai nu A, vai B noteikti paliek mājās, tātad C iet uz kino. Līdz ar to C nav iespējams divus vakarus pēc kārtas palikt mājās.

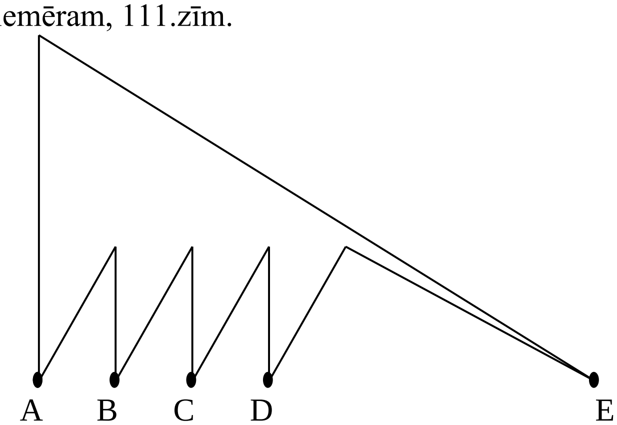
Tā kā viens no draugiem redzēja 15 filmas, tad maksimālais dienu skaits, kurā notika kino apmeklējumi, ir $15 \cdot 2+1=31$. (Ja katru otro vakaru viņš apmeklē filmu un tā viņam nepatīk). Tā kā viens no draugiem ir redzējis tieši 31 filmu, tad viņš uz kino ir gājis katru vakaru. Tā kā viens no draugiem gāja kopā ar viņu 15 vakarus, tad otrs gāja uz kino $31-15=16$ atlikušos vakarus, jo visas kinofilmas tika apmeklētas divatā.

64.

Risinājums Apzīmēsim strādniekus ar 10 melniem aplīšiem, bet instrumentus - ar 10 baltiem aplīšiem. Divus aplīšus (baltu un melnu) savienosim ar līniju tikai tādā gadījumā, ja atbilstošais strādnieks prot strādāt ar atbilstošo instrumentu. Tā kā katrs strādnieks prot strādāt ar diviem instrumentiem, tad no katra melnā aplīša izies tieši 2 līnijas. Analogi, no katra baltā aplīša izies tieši 2 līnijas uz melniem aplīšiem. Tātad aplīši noteikti izvietosies pamīšus - balts, melns, balts, melns…. Aplīši var izvietoties vienā vai vairākos apļos. Tā kā katrā aplī ir minētais pamīšus izkārtojums, tad blakus esošos aplīšus apvienosim pāros - katrā pāri vienu baltu un vienu melnu aplīti. Atbilstošajam strādniekam no katra pāra iedodam šī paša pāra baltajam aplītim atbilstošo instrumentu. Instrumentu sadale ir notikusi.

65.

Atbilde Sk., piemēram, 111.zīm.

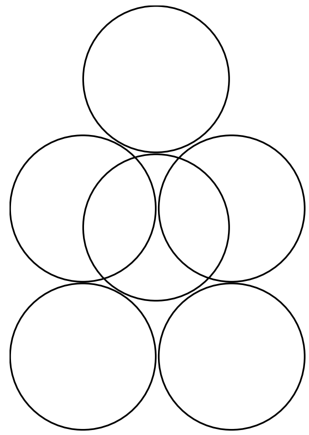


111.zīm.

A, B, C, D un E ir šī desmitstūra īpašās virsotnes.

66.

Atbilde Sk., piemēram, 112.zīm.



112.zīm.

114.

Risinājums Aplūkosim sešciparu skaitli $A = \overline{abcdef}$. Uzrakstīsim to šādi:

$$A = \overline{abcdef} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{def} .$$

Izdarīsim vairākus pārveidojumus:

$$A = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{def} + \overline{abc} - \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1001 + \overline{def} - \overline{abc} .$$

Šīs summas pirmais saskaitāmais $\overline{abc} \cdot 1001$ dalās ar 7, jo 1001=7·143.
Tātad, ja a dalās ar 7, tad noteikti $\left(\overline{def} - \overline{abc}\right)$ jādalās ar 7. Savukārt, ja $\left(\overline{def} - \overline{abc}\right)$ dalās ar 7, tad A jādalās ar 7, jo summas abi saskaitāmie $\overline{abc} \cdot 1001$ un $\left(\overline{def} - \overline{abc}\right)$ dalās ar 7.

115.

Risinājums Izdarīsim ar doto vienādību identiskus pārveidojumus:

$2x^2+x=3y^2+y$ (pārnesam $2y^2$ un y uz kreiso pusi).

$$2x^2-2y^2+x-y=y^2$$

$$2(x-y)(x+y)+(x-y)=y^2$$

$$(x-y)(2(x+y)+1)=y^2$$

$$(x-y)(2x+2y+1)=y^2 \quad (1)$$

Analizēsim vienādību (1). Tās labā puse ir naturāla skaitļa kvadrāts. Tātad katrs tās pirmreizinātājs ir pāra pakāpē. Tā kā $(x-y)(2x+2y+1)=y^2$, tad kreisā puse satur tādus pašus pirmreizinātājus tādās pašās pakāpēs kā labā puse y^2. Ja (x-y) un (2x+2y+1) būtu savstarpēji pirmskaitļi, tad tiem nebūtu kopīgu pirmreizinātāju. Līdz ar to gan (x-y), gan (2x+2y+1) pirmreizinātājiem jābūt pāra pakāpēs: pretējā gadījumā nevarētu pastāvēt vienādība. Tātad (x-y) un (2x+2y+1) būtu pilni kvadrāti.
Atliek pamatot, ka (x-y) un (2x+2y+1) ir savstarpēji pirmskaitļi. Pieņemsim pretējo. Tātad (x-y) un (2x+2y+1) ir kopīgs dalītājs; pieņemsim, ka abas šīs izteiksmes dalās ar pirmskaitli p. Ja tā, tad reizinājums (x-y)·(2x+2y+1) dalās ar p^2. Tā kā $(x-y)(2x+2y+1)=y^2$, tad arī y2 dalās ar p^2. Tātad y dalās ar p. Tā kā x-y dalās ar p un y dalās ar p, tad arī x ir jādalās ar p. Tātad ar p dalās arī izteiksme 2x+2y. Sastādīsim vienādību: (2x+2y+1)-(2x+2y)=1.

Abas kreisās puses izteiksmes dalās ar p, tad arī labajai pusei jādalās ar p. Proti, 1 jādalās ar p. Tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka p ir pirmskaitlis. Tātad (x-y) un (2x+2y+1) ir savstarpēji pirmskaitļi un saskaņā ar iepriekšpierādīto - pilni kvadrāti.

116.

Atbilde Jā, to var izdarīt.

Risinājums Iedomāsimies 16 taisnes, starp kurām nekādas divas nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. Katrā taišņu krustpunktā atradīsies pilsēta. Pa katru taisni iet dzelzceļa līnija, kas savieno visas uz tās atrodošās pilsētas. Ja nekādas divas taisnes nav paralēlas, tad katra taisne krustojas ar visām pārējām taisnēm. Tātad katras divas dzelzceļa līnijas krustojas. Pēc dotā izriet, ka caur katru pilsētu iet tieši 2 dzelzceļa līnijas. Tā kā pilsētas atrodas tikai taišņu (dzelzceļa līniju) krustpunktos, tad nav tādas pilsētas, caur kuru iet tikai viena dzelzceļa līnija.

Aplūkosim pilsētu A. Caur to iet divas dzelzceļa līnijas - a un b. Pieņemsim, ka līniju a slēdz. Pamatosim, ka no A tomēr var nokļūt jebkurā citā pilsētā. Pēc dotā līnija b krustojas ar visām citām dzelzceļa līnijām. Lai nokļūtu no A līdz pilsētai, kas atrodas uz konkrētas līnijas, no A pa b vienkārši jāsasniedz šī līnija un tad jāturpina ceļš pa to līdz izraudzītajai pilsētai. Kā no A nokļūt tajās pilsētās, kas atrodas uz slēgtās līnijas a? Tā kā caur šīm pilsētām iet vēl pa vienai dzelzceļa līnijai, tās noteikti krusto līniju b (b krusto visas līnijas). Tātad atkal jābrauc pa b līdz attiecīgajai līnijai.

Ja slēgs patvaļīgas divas dzelzceļa līnijas, tad no pilsētas, kas atradās to krustpunktā (jebkuras 2 līnijas krustojas), nevarēs nokļūt nevienā citā pilsētā.

117.

Risinājums Ir iespējams uzkonstruēt piemēru, kad uzdevuma prasības nav izpildāmas. Izveidosim tabulu ar izmēriem 10x10 (sk.113.zīm.).

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A_1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_4	x	x	x							
A_5	x	x	x							
A_6	x	x	x							
A_7	x	x	x							
A_8	x	x	x							
A_9	x	x	x							
A_{10}	x	x	x							

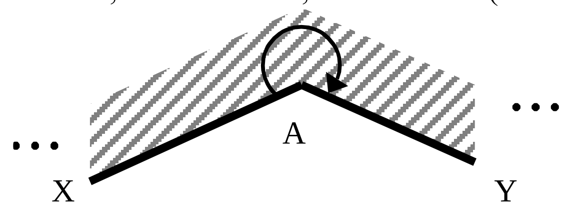
113.zīm.

Apzīmēsim instrumentus ar skaitļiem no 1 līdz 10, bet strādniekus - A_1 līdz A_{10}. Ja kāds strādnieks prot strādāt ar kādu instrumentu, attiecīgajā rūtiņā ievilksim krustiņu. Šāds instrumentu sadalījums atbilst uzdevuma nosacījumiem. Viegli redzēt, ka, piemēram, strādnieki A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 un A_{10} prot strādāt tikai ar instrumentiem 1., 2. un 3. Skaidrs, ka 3 instrumentus nevar sadalīt 7 strādniekiem.

118.

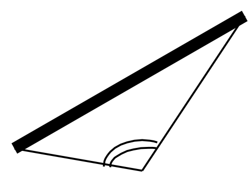
<u>Atbilde</u> Pierādīsim, ka divas blakus virsotnes abas vienlaicīgi nevar būt īpašas. No tā izrietēs uzdevuma apgalvojums.

Vispirms pierādīsim, ka neviena virsotne, kurā esošais daudzstūra leņķis ir lielāks par 180^o, nav īpaša. Tiešām, iedomāsimies, ka $\angle A>180^o$ (114.zīm.)



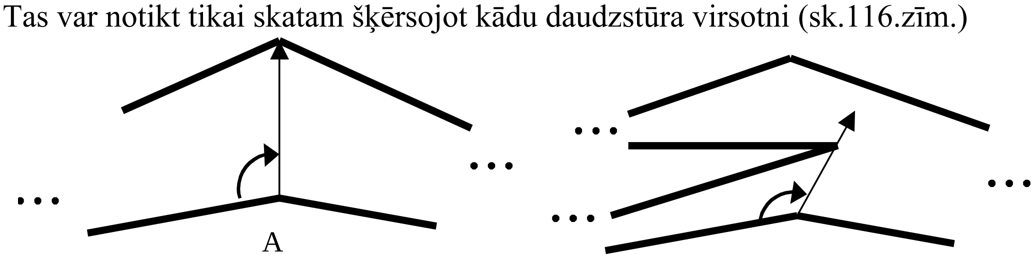
114.zīm.

Nostāsimies virsotnē a ar skatu stara AX virzienā un griezīsimies pa labi, ļaujot skatam slīdēt daudzstūra iekšpusē, līdz tas sasniegs stara AY ieņemto stāvokli. Griešanās procesā mūsu skats visu laiku atdursies pret kādu daudzstūra malu. Tā kā jebkuru nogriezni no punkta ārpus tā redz leņķī, kas mazāks par 180^o (sk. 115.zīm.), bet $\angle A>180^o$, tad griešanās procesā mūsu skats vismaz vienreiz pārslīdēs no vienas malas uz otru.



115.zīm.

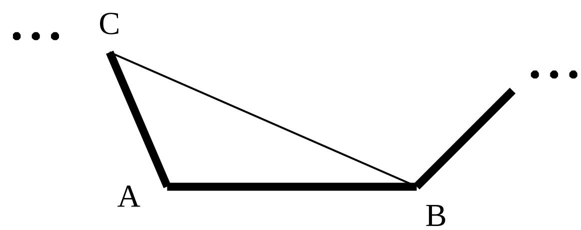
Tas var notikt tikai skatam šķērsojot kādu daudzstūra virsotni (sk.116.zīm.)



116.zīm.

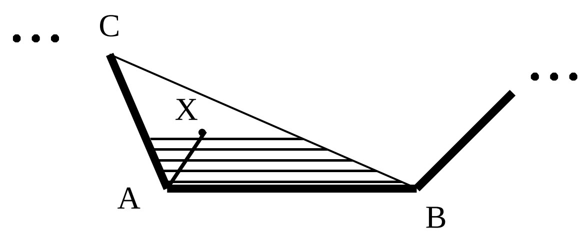
Abos iespējamajos gadījumos uzskatāmi redzama diagonāle, kas atrodas daudzstūra iekšpusē.

Tagad aplūkosim divas blakus esošas daudzstūra virsotnes A un B. Ja vismaz vienā no tām leņķis ir lielāks par 180^o, tad tā nav īpaša. Atliek aplūkot gadījumu, kad $\angle A<180^o$ un $\angle B<180^o$. Apzīmēsim to virsotni, kas pa daudzstūra kontūru atrodas otrā pusē no A nekā virsotne B, ar C.



117.zīm.

Ja ΔABC iekšpusē vai uz tā malas BC starp B un C nav daudzstūra virsotņu, tad diagonāle BC atrodas daudzstūra iekšpusē (11.zīm.); tāpēc virsotne B nav īpaša. Ja turpretī ΔABC iekšpusē vai uz tā malas BC starp B un C atrodas dažas daudzstūra virsotnes, tad aplūkosim to no šīm virsotnēm, kura atrodas vistuvāk taisnei AB (118.zīm.); apzīmēsim to ar X.



118.zīm.

Mēs apgalvojam, ka tad diagonāle AX pilnīgi atrodas daudzstūra iekšpusē. Tiešām, lai tā nebūtu, nogrieznim AX jābūt kopīgiem punktiem ar kādu daudzstūra malu. Bet tad viens šīs malas galapunkts atrastos iesvītrotajā apgabalā, un tā būtu virsotne, kas atrodas tuvāk malai AB nekā X; iegūta pretruna ar X izvēli.

Tātad šai gadījumā virsotne A nav īpaša. Vajadzīgais pierādīts.

119.

Risinājums Apzīmēsim kvadrāta malas garumu ar A, bet taisnstūru īsākās malas ar a_i, garākās ar b_i, kur i=1; 2; …; n. Tā kā kvadrāta laukums vienāds ar visu taisnstūru laukumu summu, tad $A^2=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n$.

Izdalīsim abas izteiksmes puses ar A^2.

$$1= a_1\cdot b_1\cdot \frac{1}{A^2} +a_2\cdot b_2 \frac{1}{A^2} +\ldots+a_n\cdot b_n \frac{1}{A^2} .$$

Tā kā $A \geq a_i$ un $A \geq b_i$ katram i, tad

$$\frac{1}{A^2} \leq \frac{1}{b_i^2}$$

Tad

$$1= a_1\cdot b_1\cdot \frac{1}{A^2} +a_2\cdot b_2 \frac{1}{A^2} +\ldots+a_n\cdot b_n \frac{1}{A^2} \leq a_1\cdot b_1\cdot \frac{1}{b_1^2} +a_2\cdot b_2 \frac{1}{b_2^2} +\ldots+a_n\cdot b_n \frac{1}{b_n^2} =$$

$$= \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n},$$

ko arī vajadzēja pierādīt.