Profesora Cipariņa klubs 1993./1994. mācību gads

Uzdevumi

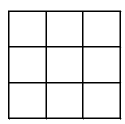
1.NODARBĪBA (1.-12.)

A grupa (1.-6.)

1. Aija un viņas dzimšanas dienas viesi nostājās aplī. Izrādījās, ka ikkatram zēnam abās pusēs stāv meitenes, bet katrai meitenei - zēni. Aijas viesu vidū bija 8 zēni. Cik meiteņu bija viesos pie Aijas? (Pieņemam, ka citu viesu kā zēni un meitenes nebija.)

2. Vai, izmantojot tikai 2 g, 6 g, 10 g, 12 g un 20 g smagus atsvarus, var no miltu maisa nosvērt miltu paciņu, kura sver tieši 255 g? Svēršanā drīkst lietot sviras svarus. Tos atļauts izmantot vairākkārt, pie tam vienīgi sekojošā veidā novietot uz to kausiem atsvarus (varbūt tikai dažus no tiem), varbūt novietot tur arī dažas jau iepriekš nosvērtas miltu porcijas un tad, ja kausi nav līdzsvarā, piebērt uz vieglākā kausa tādu miltu porciju, lai kausi nostātos līdzsvarā.

3. Kvadrāts sastāv no 3x3 rūtiņām (sk. 13.zīm.). Katrā rūtiņā ierakstīts pozitīvs skaitlis vai 0. Zināms, ka katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 1. Kāda var būt vismazākā visu deviņu ierakstīto skaitļu summa?



13.zīm.

4. Neviens no skaitļiem a, b, c, d, e, f nav nulle, bet var būt gan pozitīvi, gan negatīvi. Vai var gadīties, ka tieši 3 no skaitļiem ab, cd, ef, ac, bf, de ir pozitīvi un tieši 3 - negatīvi?

5. Kas ir lielāks: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ (80 reizinātāju) vai $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3$ (50 reizinātāju)?

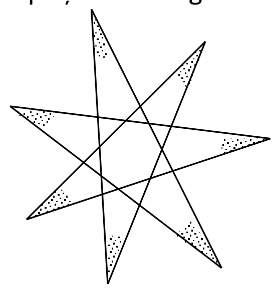
6. Parādi, kā kvadrātu var sagriezt vienādsānu trapecēs. (Paskaidrojums: par vienādsānu trapeci sauc četrstūri, kura divas pretējās malas ir paralēlas, bet nav vienādas, turpretī divas citas pretējās malas ir vienādas, bet nav paralēlas.

B grupa (7.-12.)

7. Zināms, ka a, b, c, d - naturāli skaitļi.
Pierādīt, ka $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ dalās ar 12.

8. Skudra rāpo pa kuba karkasu. Zināms, ka tā nekad negriežas atpakaļ (t.i. nepagriežas par 180 grādiem). Vai skudra var rāpot tā, lai 7 virsotnēs nonāktu pa 4 reizēm, bet astotajā - vismaz 6 reizes?

9. Atrodi leņķu lielumu summu pie septiņstūra zvaigznes virsotnēm.



14.zīm.

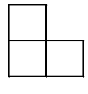
10. Andris konstatēja, ka visiem viņa 25 klasesbiedriem ir dažāds draugu skaits (apskatām tikai draudzības šīs klases ietvaros). Cik draugu var būt Andrim?
Norādiet visas iespējas un pamatojiet, ka citu bez jūsu norādītajām nav.

11. Es, profesors Cipariņš, pateicu Sandrai triju naturālu skaitļu summu, bet Regīnai - šo pašu skaitļu reizinājumu (varbūt starp šiem trim skaitļiem bija arī vienādi). Pēc tam starp meitenēm notika šāda saruna.
Sandra: "Ja es zinātu, ka tev pateikts lielāks skaitlis nekā man, tad es varētu pateikt trīs sākotnējos skaitļus. "

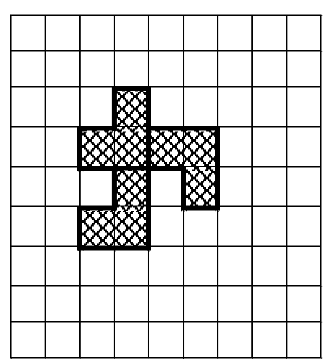
Regīna: "Man ir pateikts mazāks skaitlis nekā tev, un trīs sākotnējie skaitļi ir ..."

Kādus skaitļus nosauca Regīna? Ievērojiet: sākumā neviena meitene nezināja, kāds skaitlis pateikts otrai.

12. Kārlītim uzdeva kvadrātu ar izmēriem 9x9 rūtiņas sagriezt 27 tādos stūrīšos, kādi redzami 15.zīm. Pirmos viņš izgrieza 16.zīm. parādītos trīs stūrīšus. Vai Kārlītim izdosies izpildīt uzdevumu?



15.zīm.



16.zīm.

2.NODARBĪBA (13.-24.)

A grupa (13.-18.)

13. No visiem 10 cipariem, izmantojot katru tieši vienu reizi, izveidot divus skaitļus, kuru summa būtu vismazākā iespējamā. Pamatojiet savu atbildi.

14. skaitļi a, b, c, d visi ir dažādi un pieņem vērtības 1; 2; 3; 4. Kādu lielāko un kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme a/1+b/2+c/3+d/4?

15. Cik dažādos veidos skaitļi 1993 var izsacīt kā divu tādu naturālu skaitļu summu, kam lielākais kopīgais dalītājs ir 1? (Veidi a+b un b+a netiek uzskatīti par dažādiem.)

16. Izliekta četrstūra ABCD diagonāles AC un BD krustojas punktā O. Zināms, ka AD=BC un BO=OD. Vai ABCD noteikti ir paralelograms?

17. Kvadrāta izmēri ir 15x15. Parādi, ka to var sagriezt 13 mazākos kvadrātos (starp tiem var būt arī vienādi) tā, lai vismaz viena kvadrāta malas garums nepārsniegtu 1.

18. Dotas četras pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka starp katrām trijām no tām atradīsies divas ar vienādām masām. Mūsu rīcībā ir sviras svari bez atsvariem. Kā ar divu svēršanu palīdzību noskaidrot, vai ir dažādu masu monētas, un, ja ir, tad atrast divas monētas ar atšķirīgām masām?

B grupa (19.-24.)

19. Kvadrāts sastāv no 3x3 rūtiņām. Rūtiņās jāieraksta pa vienam skaitlim no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā cits skaitlis) tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā vidējais skaitlis būtu puse no abu malējo summas. Atrodiet visus veidus, kā to izdarīt, un pamatojiet, kāpēc citu bez jūsu atrastajiem nav.

20. Skaitļi a_1, a_2, ..., a_{100} visi ir dažādi un pieņem vērtības 1; 2; ...; 100. Kādu lielāko un kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $a_1/1+a_2/2+...+a_{100}/100$?

21. Dots, ka n - naturāls skaitlis. Ar kādiem skaitļiem var vienlaikus dalīties 2n+3 un 5n+7?

22. Sk. 76.uzdevumu, ja papildus vēl zināms, ka BC>1/2 BD.

23. Sk. 77.uzdevumu, ja lielais kvadrāts jāsagriež 12 mazākos kvadrātos.

24. Sk. 78.uzdevumu, ja monētu pavisam ir 16 un atļautas 4 svēršanas.

3.NODARBĪBA (25.-36.)

A grupa (25.-30.)

25. Vai pastāv tāds trīsciparu skaitlis, kas palielinās 8 reizes, ja tā pirmo ciparu pārnes uz beigām?

26.

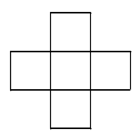
a) atrodiet kaut vienu tādu naturālu skaitļu pāri a un b, ka a+b+ab=1993.

b) atrodiet visus šādus pārus.

27. Kvadrātiska režģa veidā izvietoti 16 punkti. Uzzīmējiet kaut vienu slēgtu lauztu līniju ar 16 virsotnēm, kas pati sevi nekrusto un kuras visas virsotnes atrodas šajos punktos.

28. Ansamblī dzied 9 skolēni. Vai var būt, ka trim no viņiem šajā ansamblī ir pa 8 draugiem, trim - pa 7 draugiem, bet pārējiem attiecīgi 6, 5 un 4 draugi?

29. Dotas 12 vienādas figūras (17.zīm.), kas katra sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiem. Vai var pagatavot tādu kubu, kura virsmu var aplīmēt ar šīm figūrām tā, lai figūras nepārklātos un lai nepaliktu neaplīmētas vietas?



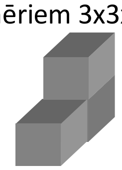
17.zīm.

30. Trijstūris ABC ir vienādmalu. Caur punktu S tā iekšpusē novilktas trīs taisnes paralēli ABC malām. Apskatām nogriežņus, kuros tās sadala ABC malas, un nogriežņus no S līdz taišņu krustpunktiem ar ABC malām. Cik dažādu garumu var būt šiem nogriežņiem?

B grupa (31.-36.)

31. Skaitļi a un b ir trīsciparu skaitļi, kas uzrakstīti ar vieniem un tiem pašiem cipariem pretējā kārtībā; pirmais cipars atšķiras no pēdējā. Skaitļu a un b kvadrāti ir piecciparu skaitļi un arī uzrakstīti ar vieniem un tiem pašiem cipariem pretējā kārtībā. Atrodiet visus šādus skaitļu a un b pārus.

32. Vai no 9 tādām figūriņām, kāda parādīta 18.zīm. (tā sastāv no trim vienādiem kubiņiem ar izmēriem 1x1x1) var salikt kubu ar izmēriem 3x3x3 ?



18.zīm.

33. Sk. 87.uzdevumu, kur skaitlis 16 aizstāts ar 64.

34. Sauksim skaitli par interesantu, ja tas ir tieši divu (vienādu vai dažādu) pirmskaitļu reizinājums. Kāds lielākais daudzums viens otram sekojošu naturālu skaitļu var būt interesanti?

35. Kādā karaļvalstī ir 13 pilsētas. Starp dažiem pilsētu pāriem nodibināta abpusēja satiksme ar autobusa, vilciena vai lidmašīnas palīdzību.
Kāds ir mazākais iespējamais šādu pāru skaits, ja ir zināms: lai kādus divus transporta veidus izvēlētos, no jebkuras pilsētas var nokļūt jebkurā citā (varbūt ar pārsēšanos), neizmantojot trešo transporta veidu?

36. Dots, ka n - naturāls nepāra skaitlis. Pierādiet, ka $n^{12}-n^8-n^4+1$ dalās ar 512.

4.NODARBĪBA (37.-48.)

A grupa (37.-42.)

37. Rindā izrakstīti seši divnieki. Starp katriem diviem blakus cipariem jāieraksta + vai x zīme (pavisam trīs x zīmes un divas + zīmes) tā, lai iegūtais rezultāts būtu iespējami liels. Kāds tas būs?

38. Ir zināms, ka šī mācību gada 7.nodarbības B grupas 2.uzdevums būs jubilejas - tūkstošais uzdevums "Profesora Cipariņa klubā" kopš tā pirmsākumiem. Ja pieņemam, ka katru gadu turpmāk notiks 7 vai 8 nodarbības un katrā būs 12 uzdevumu, tad kurā mācību gadā publicēs "Profesora Cipariņa kluba" 2000. uzdevumu? Uzrādi visas iespējas.

39. Kvadrāts sastāv no 6x6 rūtiņām. Katra no tām jānokrāso balta, melna vai sarkana tā, lai vienlaikus

a) būtu vairāk nekā 24 baltas rūtiņas,
b) katrai baltai rūtiņai blakus būtu vismaz viena melna, katrai melnai - vismaz viena sarkana un katrai sarkanai - vismaz viena balta. Vai to var izdarīt?

(Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

40. Izliektā četrstūrī ABCD pastāv vienādības AB=2 un CD=5, bez tam leņķi B un C vienādi savā starpā: Pierādi, ka AD>3.

41. Kvadrātiska tabula sastāv no 3x3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (tie visi dažādi), pie tam katrā rindiņa un katrā kolonnā skaitļi ierakstīti augošā kārtībā (pa labi un uz leju). Kāda ir lielākā un mazākā iespējamā vidējās rindiņas skaitļu summa?

42. Vai 1994 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa var dalīties ar 3?

B grupa (43.-48.)

43. Doti 10 stienīši ar garumiem 1 cm, 2 cm, ..., 10 cm. Cik dažādus trijstūrus var izveidot, savienojot trīs no tiem ar galiem?

44. Kvadrātu krusto divas savstarpēji perpendikulāras taisnes tā, ka tas sadalās četros četrstūros. Pierādi: divu četrstūru perimetru summa vienāda ar otru divu četrstūru perimetru summu.

45. Katra trijstūra virsotne savienota ar kādu pretējās malas punktu (ne virsotni). Vai iegūto triju nogriežņu viduspunkti var atrasties uz taisnes?

46. No naturāla skaitļa atļauts iegūt jaunu skaitli, pieskaitot sākotnējam kādu tā dalītāju (ne 1 un ne viņu pašu). Pierādi, ka no 6 var iegūt jebkuru lielāku saliktu skaitli, atkārtojot šādus gājienus vairākas reizes.

47. Sk. 101.uzdevumu, tabulā 7x7 ieraksta skaitļus no 1līdz 49.

48. Astoņstūra virsotnēs ierakstīja pa skaitlim. Pēc tam uz katras malas uzrakstīja tās galos esošo skaitļu summu. Pēc tam nodzēsa visus skaitļus virsotnēs, kā arī vienu skaitli uz malas.
Vai, zinot tikai 7 palikušos skaitļus, var atjaunot uz malas nodzēsto skaitli?

5.NODARBĪBA (49.-60.)

A grupa (49.-54.)

49. Jāņa dzimšanas dienas svinībās piedalījās 4 zēni un 4 meitenes. Jānis nodejoja 7 dejas, Pēteris un Andris pa 8 dejām, Juris 6 dejas, Inta 7 dejas, Skaidrīte - 5, bet Gunta - 10 dejas. Cik dejas nodejoja Maija?

50. Zināms, ka n un m ir naturāli skaitļi, n+5 dalās ar m, bet m+5 dalās ar n. Atrodiet, kādas var būt n un m vērtības.

51. Vai var plaknē atzīmēt 6 punktus tā, lai katri trīs no tiem būtu vienādsānu trijstūra virsotnes?

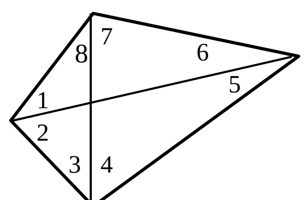
52. No deviņiem nenulles cipariem, katru no tiem lietojot tieši vienu reizi, izveidojiet trīs skaitļus tā, lai to summa būtu mazākā iespējamā.

53. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas. 7 no tām sver pa 10 g katra, bet 2 - pa 11 g katra. Mūsu rīcībā ir atsperu svari ar vienu svaru kausu; svaru skalas iedaļa ir 1 g. Kā ar 5 svēršanām atrast abas smagākās monētas?

54. Kvadrātiska tabula sastāv no 4x4 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Ja divām rūtiņām ir kopīga mala vai kopīgs stūris, tad tajās ierakstīto skaitļu starpība nepārsniedz 2. Vai tabulā var būt ierakstīti 8 dažādi skaitļi?

B grupa (55.-60.)

55. Apskatām 8 leņķus, ko izliekta četrstūra diagonāles veido ar tā malām (sk. 19.zīm.). Zināms, ka četrstūris nav ne paralelograms, ne trapece. Cik daudzi no šiem leņķiem var būt savā starpā vienādi?



19.zīm.

56.

a) Atrodiet kaut vienu naturālu skaitli, kura visi cipari nav vienādi, kas nesatur ciparu 0 un kas dalās ar savu ciparu kvadrātu summu.

b) Pierādiet, ka šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

57. Pierādiet, ka katru daudzstūri var sagriezt vienādsānu trijstūros.

58. No deviņiem nenulles cipariem, katru no tiem lietojot tieši vienu reizi, izveidojiet trīs trīsciparu naturālus skaitļus tā, lai to reizinājums būtu mazākais iespējamais.

59. Kādā firmā katram strādājošam ir tieši viens draugs un tieši viens ienaidnieks (visas draudzības un ienaidus apskatām tikai šīs firmas ietvaros). Pierādīt: darbiniekus var sadalīt pa divām filiālēm tā, lai nevienā filiālē nestrādātu ne 2 draugi, ne 2 ienaidnieki.

60. Sk. 114.uzdevumu, kur jautāts par 7 dažādu skaitļu ierakstīšanas iespējām.

6. NODARBĪBA (61.-72.)

A grupa (61.-66.)

61. Dots, ka a, b, c, d ir pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Pierādiet, ka to reizinājums dalās ar 12.

62. Pierādīt, ka četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājumam pieskaitot 5, nevar iegūt vesela skaitļa kvadrātu.

63. Kādā laika posmā trīs draugi apmeklēja kino. Katru vakaru uz kino gāja tieši divi no viņiem, katru reizi vienam filma tā patika, ka viņš gāja uz kino arī nākošajā vakarā, bet otram filma nepatika, un viņš nākošajā vakarā palika mājās.
Apskatāmajā posmā viens no draugiem redzēja 15 filmas, bet otrs 31 filmu. cik filmas šajā laika posmā redzēja trešais draugs?

64. Ir 10 strādnieki un 10 instrumenti. Katrs strādnieks prot strādāt ar tieši 2 instrumentiem, ar katru instrumentu prot strādāt tieši 2 strādnieki. Pierādiet: instrumentus var sadalīt strādniekiem tā, lai katram tiktu instruments, ar kuru viņš prot strādāt.

65. Sauksim daudzstūra virsotni par īpašu, ja neviena diagonāle, kas no tās iziet, neatrodas šī daudzstūra iekšpusē. Uzzīmējiet desmitstūri, kam ir 5 īpašas virsotnes.

66. Uzzīmējiet 6 vienādas riņķa līnijas tā, lai katra no tām pieskartos tieši 3 citām.

B grupa. (67.-72.)

67. Pierādiet: sešciparu skaitlis dalās ar 7 tad un tikai tad, ja ar 7 dalās starpība, ko iegūst, no pēdējo triju ciparu veidotā skaitļa atņemot pirmo triju ciparu veidoto skaitli.

68. Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi un pastāv vienādība $2x^2+x=3y^2+y$. Pierādiet, ka $x-y$ un $2x+2y+1$ ir veselu skaitļu kvadrāti.

69. Valstī ir 16 dzelzceļa līnijas; katra no tām var iet caur vairākām pilsētām. Vai var gadīties, ka dzelzceļa tīklam vienlaikus piemīt divas sekojošas īpašības.

a) lai arī kuru vienu līniju slēgtu, pa atlikušajām var no katras pilsētas aizbraukt uz katru citu.
b) lai arī kuras divas līnijas slēgtu, atradīsies divas pilsētas, ko dzelzceļa satiksme vairs nesavieno.

70. Vai A grupas 124.uzdevuma apgalvojums paliek spēkā, ja vārdu "tieši" abās vietās aizstāj ar "vismaz"?

71. Pierādiet, ka nevienam desmitstūrim nav vairāk par 5 īpašām virsotnēm (sk. A grupas 125.uzdevumu).

72. Kvadrātu sagriež taisnstūros. Katram taisnstūrim aprēķinām tā īsākās malas garuma attiecību pret garākās malas garumu. Pierādiet, ka visu iegūto attiecību summa nav mazāka par 1.